MATEMÁTICA V

notas de clase

CONSTRUCCIONES | **MECÁNICO ELECTRICA** | QUÍMICA

OPTIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

DERIVACIÓN EN FORMA IMPLÍCITA

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

INTEGRAL INDEFINIDA

INTEGRAL DEFINIDA

ESTADÍSTICA

FERNÁNDEZ, Jimena

MAUMARY, María Eugenia

SANTARRONE, María Alejandra

Matemática V : notas de clase / María Alejandra Santarrone ; Jimena Fernández ; María Eugenia Maumary. - 1a ed . - Santa Fe : Universidad Nacional del Litoral, 2018.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-692-171-8

1. Matemática. 2. Escuela Secundaria. 3. Educación Técnica. I. Fernández, Jimena II. Maumary, María Eugenia III. Título

CDD 510.712

Esta publicación no puede ser reproducida en todo o en parte, ni archivada o trasmitida por ningún medio electrónico, mecánico, de grabación, de fotocopia, de microfilmación o en otra forma, sin el previo conocimiento de los autores.

Email: jimenaf85@gmail.com ; eugemaumary@gmail.com ; santarrone@gmail.com

2018-Santa Fe- Argentina

PRÓLOGO

"La matemática aplicada necesita de la matemática pura

tanto como los hormigueros necesitan de las hormigas".

Paul Halmos

"Matemática V - Notas de Clases" ha sido elaborada como soporte didáctico para el cursado anual de matemática (de dos horas cátedras semanales) para estudiantes de quinto año de Escuelas Técnicas.

Tanto el desarrollo de los contenidos y las secuencias de actividades que se exponen tienden a posibilitar la construcción de un aprendizaje significativo en contexto, ya que se plantean actividades para la especialidad correspondiente del futuro técnico.

El libro se presenta para tres especialidades: Construcciones, Química y Mecánico Eléctrica.

Las situaciones planteadas en los inicios de cada capítulo están pensadas para trabajarse de manera heurística en el aula.

Si bien los conceptos, principalmente de análisis matemático, encierran en sí mismos un gran nivel de abstracción, en el texto se los pretende desarrollar de manera intuitiva sin perder la formalidad en la notación, definiéndolos y brindando las propiedades más relevantes.

Aspiramos a que el docente que use estas notas en sus aulas, haga las observaciones que crea conveniente a sus alumnos, adapte actividades a la realidad de su propia práctica, que critique y analice.

Así mismo anhelamos que estos tipos de textos sirvan para lograr el equilibrio esperado entre la formación matemática y sus aplicaciones.

Las autoras.

ÍNDICE

OPTIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN 7

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA 19

DERIVACIÓN EN FORMA IMPLÍCITA 29

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN 35

INTEGRAL INDEFINIDA 41

INTEGRAL DEFINIDA 53

ESTADÍSTICA 71

TABLA DE FÓRMULAS 77

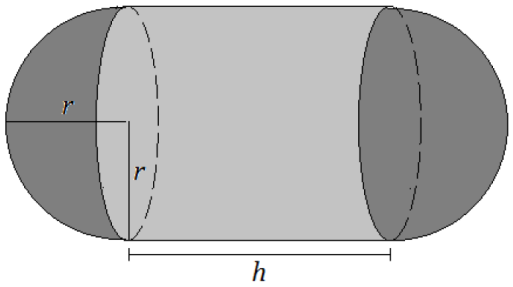
RESPUESTAS NUMÉRICAS A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS 81

OPTIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN

Los entendidos en compra y venta de automóviles usados hamacan a los coches, dan puntapiés a sus ruedas y los miran desde lejos. Dicen que con sólo esas breves operaciones saben si el vehículo chocó o no, y en qué estado mecánico se encuentra. Cada uno tiene sus trucos favoritos: los médicos nos hacen decir *ahhh* y sacar la lengua, los vendedores de melones por atrás los aprietan para saber si están maduros y a los caballos se les mira los dientes. ¿Qué hace un matemático?, deriva una y otra vez una función.

SITUACIÓN

Un depósito de combustible de cierta máquina tiene la forma mostrada en la siguiente figura:



Se desea determinar la longitud del radio que hace mínima el área superficial del depósito que puede contener un volumen fijo V_0. Podemos determinar la función que da el área del tanque en relación a las variables r y h:

A(r, h) =…….

además como el volumen es fijo, podemos plantear la siguiente fórmula:

V_0 =……..

despejando h y sustituyendo en A(r, h), obtenemos:

A(r) =……

Y así logramos expresar el área en función de una sola variable. El dominio de esta función es……

Ahora lo que necesitamos es encontrar el o los valores de r que hacen mínima a A(r).

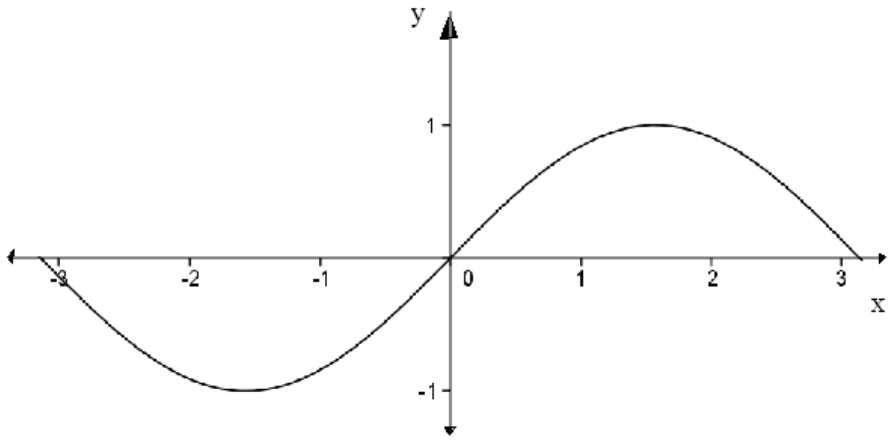
La tarea de localizar máximos y mínimos de una función, recibe el nombre de **optimización**. En algún valor del dominio, una función, puede presentar en particular un valor máximo o

un valor mínimo. Éstos se localizan en los **números críticos** de la función y se relacionan con los intervalos de crecimiento o decrecimiento y concavidad de la misma.

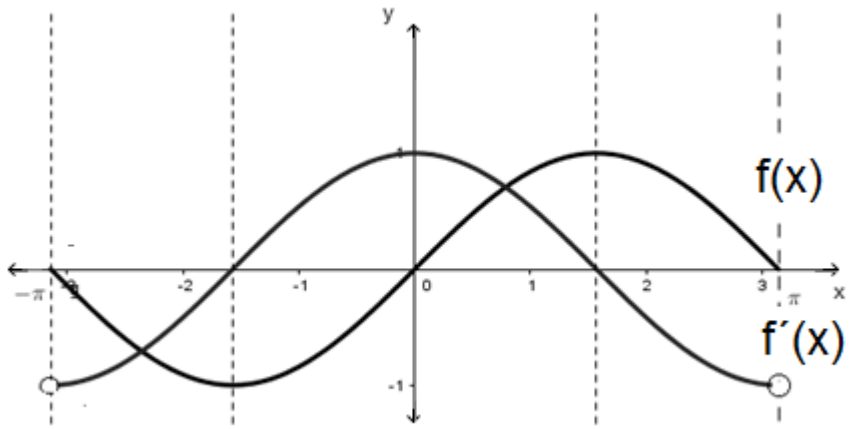
- ☆ *Dada una función f, los números c del dominio de f para los cuales f´(c)=0 o f´(c) no existe se denominan* ***números críticos*** *de f.*

Analicemos algunos ejemplos:

1) Sea $f(x) = sen(x)$ con dominio $[-\pi, \pi]$,



Es una función creciente en…….., decreciente en……..……., cóncava hacia arriba en $(-\pi, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \pi)$. Su función derivada es: $f´(x) = cos(x)$ con dominio $(-\pi; \pi)$



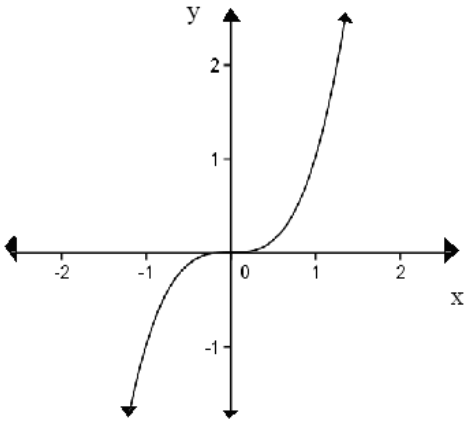
Los números críticos de la función son: $-\pi$, π ,…….

Dada una función f(x):

- ☆ si f´(x)>0 en un intervalo I abierto de su dominio, entonces f(x) es **creciente** en dicho intervalo.
- ☆ si f´(x)<0 en un intervalo I abierto de su dominio, entonces f(x) es **decreciente** en dicho intervalo.
- ☆ si f´(x)=0 en un intervalo I abierto de su dominio, entonces f(x) es **constante** en dicho intervalo.
- ☆ si f´´(x) > 0 en un intervalo I abierto de su dominio, entonces f(x) es **cóncava hacia arriba** en dicho intervalo.
- ☆ si f´´(x) < 0 en un intervalo I abierto de su dominio, entonces f(x) es **cóncava hacia abajo** en dicho intervalo.

2) Sea g: R $\rightarrow$ R/ g(x) = x^3

Observando la gráfica completa:

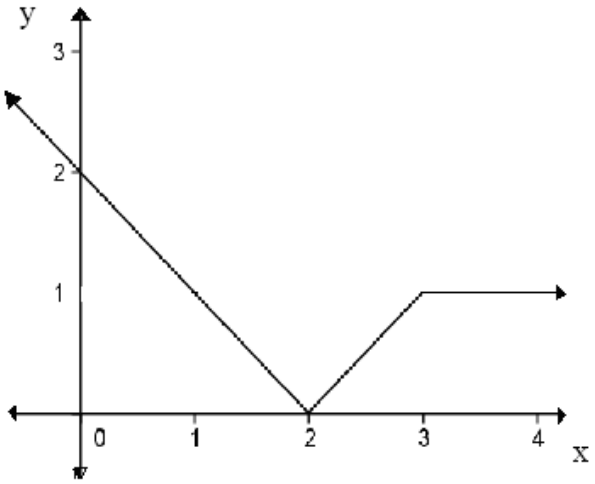


El número crítico de la función es……Es creciente en todo su dominio. Cóncava hacia arriba en ……y cóncava hacia abajo en…….

- ☆ Un punto (c,f(c)) es **punto de inflexión** si y sólo si en un entorno de c la función cambia la concavidad a la izquierda y a la derecha de c.

La función del ejemplo 1, tiene un punto de inflexión en…… porque……..y la función del ejemplo 2, tiene un punto de inflexión en…… porque……..

3) Sea h: R $\rightarrow$ R /h(x) = $\begin{cases} |x-2| & x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$



Analizando la gráfica completa:

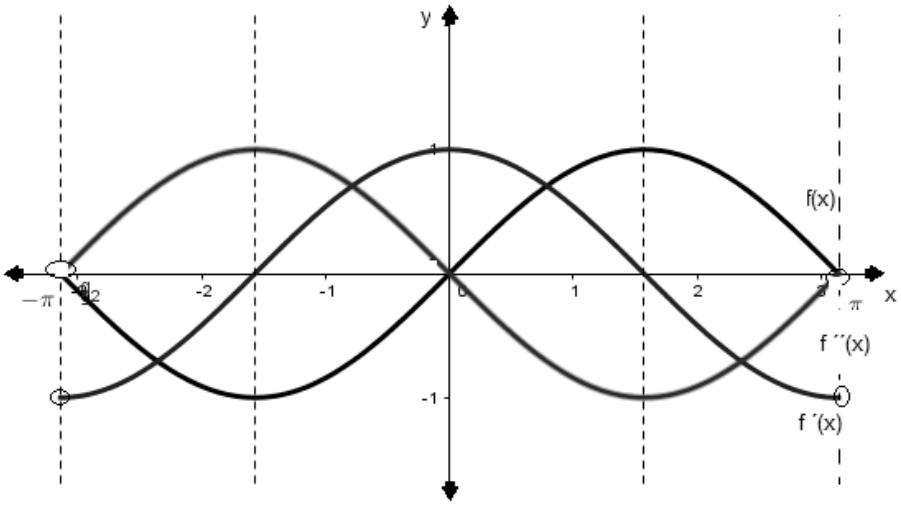
Es una función creciente en …….., decreciente en…….y constante en…….Los números críticos son ….. y ……..

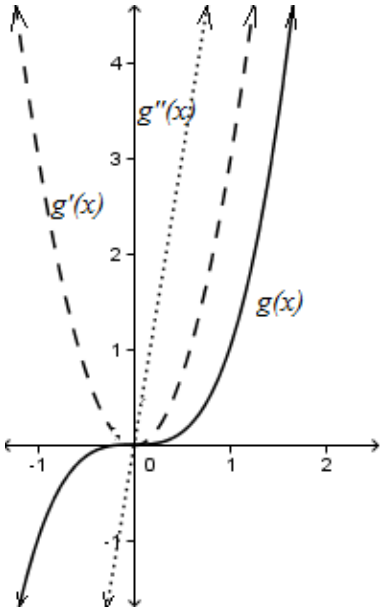
Contesta: ¿se puede determinar la concavidad en $(-\infty;3)$?

……

……

Observa, en los ejemplos 1 y 2, los gráficos de las funciones y de sus derivadas primera y segunda:





Puedes verificar el siguiente criterio:

<u>Criterio de la derivada segunda:</u>

Si una función f(x), derivable en un valor c de su dominio, cumple que:

- ☆ f´(c)=0 y f´´(c)>0 entonces f(c) es un **mínimo absoluto o relativo** de f(x).
- ☆ f´(c)=0 y f´´(c)<0 entonces f(c) es un **máximo absoluto o relativo** de f(x).

Retomando lo anterior, la función del ítem 1) presenta un máximo absoluto en ……y un mínimo absoluto en ……porque…….....

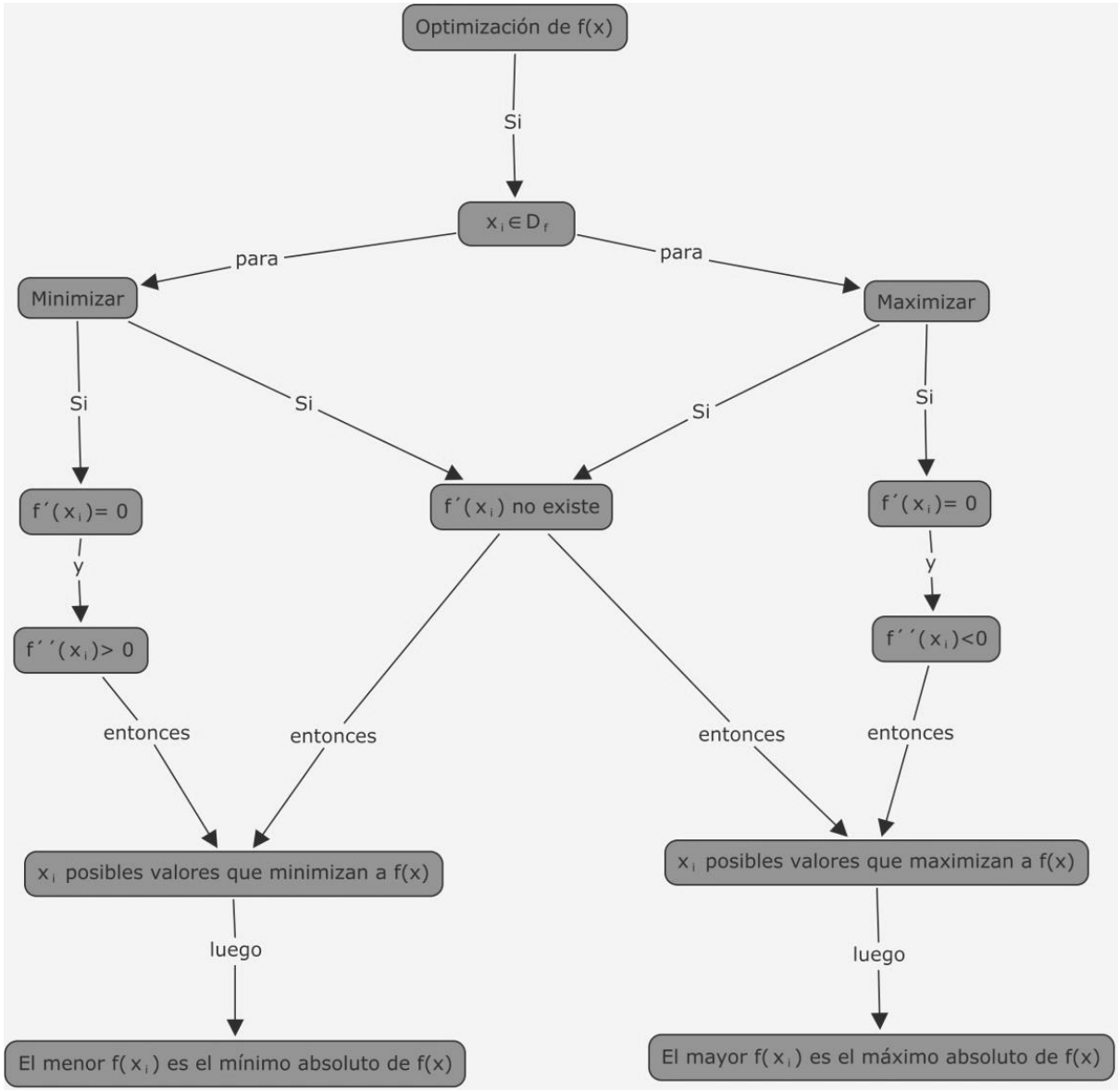
……

La función del ítem 3) presenta un mínimo……. …en……..porque…….

……

<u>Aclaración:</u> A través de los gráficos has <u>comprobado</u> las propiedades mencionadas arriba, ten en cuenta que cada una de las propiedades anteriores tiene su correspondiente demostración.

EN SÍNTESIS:


Optimización de f(x)
Si
$x_i \in D_f$
para
para
Minimizar
Maximizar
Si
Si
Si
Si
$f'(x_i)= 0$
$f'(x_i)$ no existe
$f'(x_i)= 0$
y
y
$f''(x_i)> 0$
$f''(x_i)<0$
entonces
entonces
entonces
entonces
x_i posibles valores que minimizan a f(x)
x_i posibles valores que maximizan a f(x)
luego
luego
El menor $f(x_i)$ es el mínimo absoluto de f(x)
El mayor $f(x_i)$ es el máximo absoluto de f(x)

PROBLEMA RESUELTO

Ahora, retomando la situación inicial, determinemos el valor de r que hace mínima a A(r).

Recordemos que $A(r)=\frac{4}{3}\pi\cdot r^2+2\cdot V_0\cdot r^{-1}$ cuyo dominio es R^+

Teniendo en cuenta los pasos del cuadro anterior, debemos determinar aquellos valores donde $A'(r)$ sea igual a cero o no exista.

Aplicando las reglas de derivación obtenemos lo siguiente:

$$A'(r)=\frac{8}{3}\pi\cdot r-2\cdot V_0\cdot r^{-2}$$

$A'(r)$ existe en todo el dominio de A(r), por lo que los números críticos sólo serán aquellos en donde $A'(r)=0$, luego:

$$0=\frac{8}{3}\pi\cdot r-2\cdot V_0\cdot r^{-2}$$

$$\frac{8}{3}\pi\cdot r=\frac{2\cdot V_0}{r^2}$$

$$r^3=\frac{3\cdot V_0}{4\pi}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_0}{4\pi}}$$

El único número crítico de la función es $\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_0}{4\pi}}$.

A continuación, es necesario que apliquemos el criterio de la segunda derivada para determinar si éste minimiza A(r). Mediante el uso de las reglas de derivación:

$$A''(r)=\frac{8}{3}\pi+4\cdot V_0\cdot r^{-3}$$

reemplazando el número crítico en $A''(r)$ obtenemos:

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_0}{4\pi}}\right)=\frac{8}{3}\pi+\frac{4\cdot V_0}{\left(\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_0}{4\pi}}\right)^3}=\frac{8}{3}\pi+16\frac{\pi}{3}=8\pi$$

Como $A'\left(\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_0}{4\pi}}\right)=0$ y $A''\left(\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_0}{4\pi}}\right)>0$ entonces $A\left(\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_0}{4\pi}}\right)$ es un mínimo de la función, por lo tanto la superficie del depósito será mínima para $r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_0}{4\pi}}$.

ACTIVIDADES

Aclaración: En las actividades propuestas de todos los capítulos, cuando se dé la ley de una función y no se especifique el domino y codominio, se considerará el más amplio.

1) Para cada una de las funciones de los ejemplos anteriores, comprueba analíticamente las propiedades enunciadas.

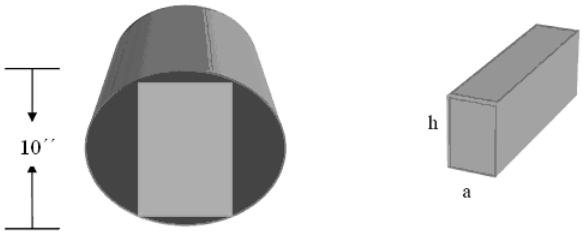
2) Determina los valores máximos y mínimos relativos de:
   a) f: R→R/ $f(x) = e^x \cdot (3x^2 - 6)$.
   b) g: R→R/ g(x) = $2x^3 - 4x^2 + 2x + 12$
   c) Con respecto a a) y b), responde: ¿puedes determinar si los máximos y mínimos obtenidos son absolutos?

3) Un coche de competición se desplaza a una velocidad que, entre las 0 y las 2 horas, viene dada por la función v(t) = (2-t) e^t. donde t es el tiempo medido en horas y v es la velocidad en cientos de kilómetros por hora. Halla en qué momento del intervalo $[0,2]$:

   a) circula a la velocidad máxima y determina dicha velocidad.

   b) la velocidad disminuye.

4) Aserrado de Viga: La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho a por el cuadrado de su altura h. Calcula las dimensiones de la viga de máxima resistencia que puede aserrarse de un tronco de madera de forma cilíndrica de diámetro 10[´´].



5) Halla las dimensiones que hacen mínimo el costo de un contenedor que tiene forma de prisma recto de base rectangular sabiendo que su volumen ha de ser 9 $\left[m^3\right]$, su altura 1

[m] y el costo de su construcción por metro cuadrado es de $500 para la base; $600 para la tapa y $400 para cada pared lateral.

6) El pistón de un motor a explosión de cierta máquina se mueve a una velocidad v[m/s] que viene dada por v(t)= $-\frac{t^3}{4}+2t^2-\frac{15t}{4}$, donde t es el tiempo medido en segundos.
   a) Indica en qué instante la velocidad del pistón es máxima.
   b) Responde: ¿cuál es la velocidad máxima?
   c) Determina en qué momentos la velocidad disminuye.

7) En un trabajo de investigación sobre el rendimiento de cierta válvula de un motor de automóvil durante 24 horas de funcionamiento (t medido en horas), unos ingenieros han comprobado que dicho rendimiento se comporta de acuerdo con la siguiente función:

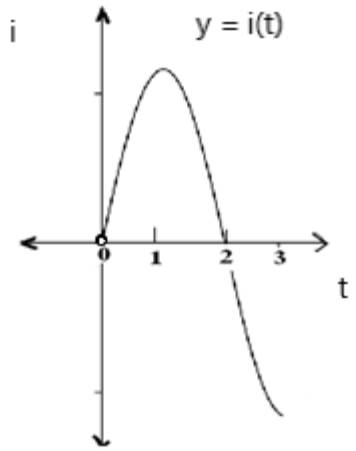
$$R(t)=\frac{(30-t)\cdot(t+10)}{4}$$

Contesta: ¿cuánto tiempo debe permanecer funcionando la válvula para conseguir su máximo rendimiento?

8) El rendimiento de cierta pieza de fábrica en función del tiempo x años de uso viene dado por la siguiente expresión: f(x) = $8,5+\frac{3x}{1+x^2}$. Responde:
   a) ¿en qué momento se alcanza el rendimiento máximo?
   b) por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al que el producto tenía cuando era nuevo?

9) Una locomotora que se desplaza a una velocidad v $[km/h]$ tiene un gasto de combustible g dado por la función: g(v) = v + $\frac{3600}{v}[\$/km]$ .Halla:
   a) la velocidad para que el gasto sea mínimo y determina dicho gasto.
   b) el costo de un viaje de 1000$[km]$, si se viaja siempre a la velocidad más económica.

10) Justifica si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:



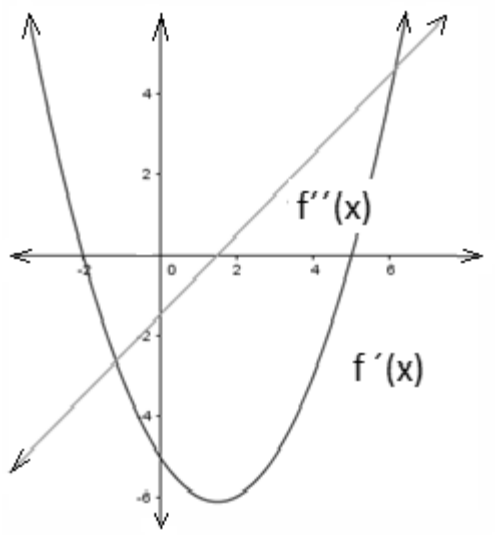
a) Dada la gráfica de la corriente i(t) de un conductor, se puede afirmar que en t = 1 la carga Q(t) tiene un valor máximo. Recuerda: La corriente indica la rapidez con que varía la carga Q que atraviesa el conductor. (i(t) = Q´(t)).

b) Sea $f : R \to R \,/\, y = (2-x)\cdot e^{x}$, en x = 1 la función tiene un máximo.

c) La función $f : \mathrm{R} - \{1\} \to R \,/\, f(x) = \frac{3x}{x-1}$ no tiene números críticos.

d) Si una función tiene un número crítico en $x = a$, entonces $f'(a) = 0$.

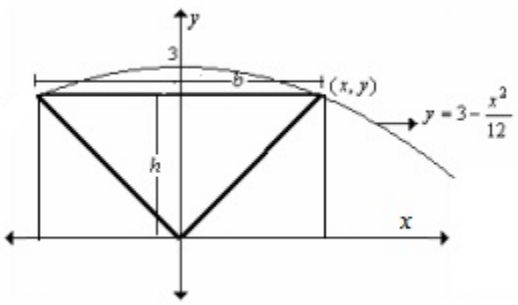
e) La función f(x) cuyas primera y segunda derivada se muestran en el gráfico, tiene mínimos relativos en x=-2 y x=5.



11) Para cada una de las siguientes afirmaciones, encuentra las funciones que sirven de contraejemplo.

a) Si una función tiene un máximo en x = 2 entonces f´(2) =0.
b) Si una función tiene un punto de inflexión en x = 0 entonces f´(0) = 0.
c) Si una función es creciente en todo su dominio entonces f´(x) $\geq$ 0.

12) Una pieza mecánica (cuya parte superior es modelada por $y = 3 - \frac{x^2}{12}$) se desea reemplazar por otra con forma de triángulo, como muestra la imagen. Calcula las dimensiones de la pieza triangular para que ocupe la mayor superficie posible.



DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Uno de los pilares en la formación técnica es el de promover y desarrollar la cultura del trabajo y la producción para el desarrollo sustentable. Entendiendo el mismo, como aquel que persigue el desarrollo económico y social para hacer frente a las necesidades del presente sin poner en peligro la capacidad de las futuras generaciones, para satisfacer sus propias necesidades. El cuidado del medio ambiente, recursos no renovables como el agua, carbón y petróleo deben ser tenidos en cuenta en el desarrollo tecnológico.

SITUACIÓN

Los desechos de una fábrica son compactados para su posterior tratamiento, de tal manera que adquieren una forma cúbica. La arista del cubo inicialmente es de 3 metros y al transcurrir el prensado disminuye a razón de 0,07 metros por minuto. ¿Cuál será el volumen del desecho al cabo de 5 minutos de iniciado el proceso?

Si denominamos V al volumen de desechos y x a la longitud de la arista del cubo, se puede definir la función: V(x) = ……

que relaciona el volumen en función de la longitud de la arista. Pero ésta va variando en relación al tiempo, por lo que se puede definir:

x(t) =……

Luego para poder determinar el volumen en cualquier instante podemos hacerlo a partir de:

C(t) = V(x(t)) =……..

Vemos como x está en función de t, V está en función de x y por lo tanto se tiene una función C que depende de t.

El volumen del cubo de desecho, al cabo de 5 minutos de iniciado el proceso, es:

C(5) = V(x(5)) =……..[m^3]

Observemos que el dominio de x(t) es ……

El conjunto imagen de x(t) es……..

El dominio de V(x) es……que incluye al conjunto imagen de……..

- ✩ Dadas dos funciones f y g, tales que el conjunto imagen de g esté incluido en el dominio de f, se llama **función compuesta** h a aquella que haga corresponder a cada elemento del dominio de g una única imagen en el conjunto de llegada (codominio) de f, mediante la relación:

$$h(x) = f(g(x))$$

Si nos interesa además saber cuán rápido disminuye el volumen de los desechos en función del tiempo, debemos calcular $\frac{dC}{dt}$.

Razonemos de la siguiente manera:

Tomando $V(x)$ calculemos $\frac{dV}{dx} =$ …….

Tomando $x(t)$, $\frac{dx}{dt} =$ …….

Tomando $C(t)$, $\frac{dC}{dt} =$ ……

Observa que $\frac{dC}{dt} = \frac{dV}{dx} . \frac{dx}{dt}$

Coloquialmente……
……

Concluimos que la función que determina la rapidez con que disminuye el volumen del desecho en función del tiempo viene dada por:…… ……..

- ✩ La técnica empleada para derivar funciones compuestas se denomina **Regla de la Cadena**. Si g es diferenciable en $(a; b)$ y f es diferenciable en $(g(a);g(b))$, entonces la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ es diferenciable en $(a; b)$, y su derivada se denota por:

$$h'(x) = f'(g(x)) = f'(g).\ g'(x) \qquad \text{o} \qquad \frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg} . \frac{dg}{dx}$$

EJEMPLOS

a) f(x) = sen(4x) $\Rightarrow$ f´(x) = cos(4x). 4 = 4cos(4x)

b) I(t) = $4e^{wt} \Rightarrow \dfrac{dI}{dt} = 4e^{wt}.w = 4we^{wt}$

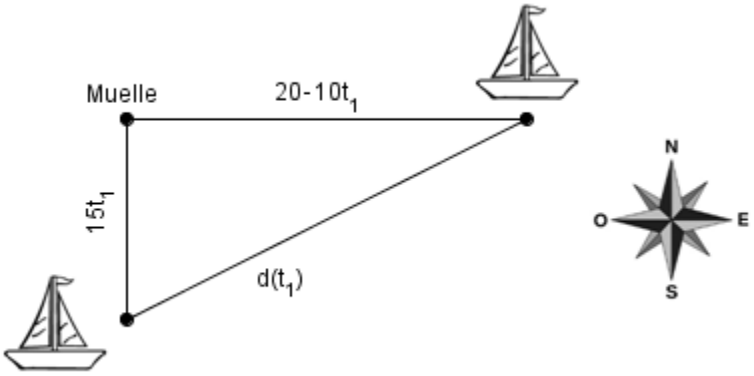
c) $\mathrm{m(q)} = \dfrac{1}{\sqrt{q^2+6q}} \Rightarrow \dfrac{dm}{dq} = -\dfrac{1}{2}\left(q^2+6q\right)^{-\frac{3}{2}}.(2q+6) = -\dfrac{2q+6}{2\sqrt{\left(q^2+6q\right)^3}} = -\dfrac{q+3}{\sqrt{\left(q^2+6q\right)^3}}$

PROBLEMA RESUELTO

Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 15 [km/h]; el otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 20 [km] al oeste, a 10 [km/h]. Determina el momento en que se encuentran más próximos estos dos navíos.

Solución:

Los datos del problema se pueden representar en un esquema como el siguiente:



Planteado de esta manera se debe averiguar para qué valor de *t* la distancia *d* entre los barcos es mínima o dicho de otra manera qué valor de *t* minimiza la función distancia.

Utilizando el teorema de Pitágoras, la función a minimizar viene dada por:

$$d(t) = \sqrt{(15t)^2 + (20-10t)^2} = \left(325t^2 - 400t + 400\right)^{1/2} \quad \text{con} \quad \mathrm{Dom}\,d:\ \mathrm{R}_0^{\,+}$$

Siguiendo los pasos del proceso de optimización de funciones, debemos calcular los números críticos y para poder hacerlo hallamos $d'(t)$.

$$d'(t) = \frac{1}{2}\left(325t^2 - 400t + 400\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(650t - 400\right).$$

Como *d(t)* tiene dominio [0;∞), *d´(t)* no existirá en t =0, además $d'(t)$=0 cuando:

$$0 = \frac{\left(650t - 400\right)}{2 \cdot \left(325t^2 - 400t + 400\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 0 = \left(650t - 400\right) \Rightarrow t = \frac{8}{13}$$

Por lo tanto, la función presenta números críticos en *t = 0* y $t = \frac{8}{13}$.

Para poder saber si en el valor $t = \frac{8}{13}$ la distancia es mínima debemos aplicar el criterio de la segunda derivada.

$$d''(t) = -\frac{1}{4}\left(325t^2 - 400t + 400\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(650t - 400\right)^2 + 325 \cdot \left(325t^2 - 400t + 400\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Evaluando la misma en el número crítico obtenemos $d''\left(\frac{8}{13}\right) \cong 19{,}5$.

Como $d'\left(\frac{8}{13}\right) = 0$ y $d''\left(\frac{8}{13}\right) > 0$ entonces $d\left(\frac{8}{13}\right)$ es un mínimo de la función.

Ahora debemos analizar *d*(0), *d*(0) = 20[km] que por el contexto del problema podemos ver que no será la menor distancia, pese a ello aritméticamente se puede ver que

$$d(0) > d\left(\frac{8}{13}\right)$$

Por lo tanto, concluimos que la menor distancia entre los navíos se produce luego de las $\frac{8}{13}[h]$ de la salida.

ACTIVIDADES

1) Determina en cada caso $\frac{dy}{dx}$:

$a) y = (6x-5)^2$ $\quad b) y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\quad c) y = \sqrt{x^2-1}$ $\quad d) y = \left(\frac{3x}{2}\right)^2$

$e) y = 4\cos(wx) + x^2$ $\quad f) y = (5x-2)^{3/2}$ $\quad g) y = x(5x-2)^{3/2}$

$$h) y = \ln(x^2+1)$$

2) Se carga con vapor de agua un cilindro con un émbolo de radio 3 [cm], de modo que la altura aumenta con el tiempo según la relación $h = 3t^2$ y el radio se mantiene constante. Calcula la variación instantánea del volumen a los 10 segundos, si la temperatura y la presión permanecen constante.

3) Una bebida se saca de la heladera a una temperatura de 8 [ºC] y se deja en una habitación en la que la temperatura es de 22 [ºC]. Según la ley de enfriamiento de Newton la temperatura T de la bebida variará en el tiempo de acuerdo con la expresión:

$T(t) = 25 - A\, e^{-k.t}$ con A, k constantes y t medido en minutos.

a) Sabiendo que al cabo de 20 minutos la temperatura de la bebida es de 15 [ºC], calcula el valor de las constantes A y k.
b) Encuentra la función que describe con qué rapidez se calienta la bebida.

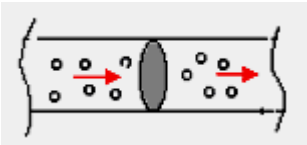
4) Una cooperativa que distribuye energía domiciliaria ha realizado mediciones de la potencia requerida por sus consumidores a distintos horarios del día. Determinó así que la potencia se puede modelizar a través de la siguiente función:

$$P(t) = -42.sen(\frac{\pi}{12}.t) - 7\cos(\frac{\pi}{12}.t) + 70 \text{ donde t } [h], \text{ P } [MW], \frac{\pi}{12}[rad/h]$$

Determina el primer momento del día en que se requiere la mínima potencia.

5) La carga eléctrica Q que atraviesa la sección de un conductor está dada por la expresión

$$Q(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t)$$

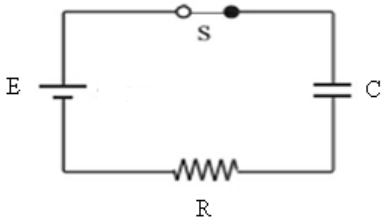


Siendo A y ω constantes positivas.

a) Determina la intensidad de la corriente I(t). Recuerda que la intensidad de la corriente indica la rapidez con que varía la carga Q que atraviesa el conductor.

b) Durante las primeras seis horas, contesta: ¿en qué instante la intensidad es máxima? Considera ω=1.

6) Se conecta una resistencia R en serie con un condensador C y una batería E de resistencia interna despreciable. La carga del condensador viene dada por:



$$Q(t) = E.C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

a) Determina la intensidad de la corriente en función del tiempo.

b) Para el tiempo t = RC, si C = 1,5 [μF], R= 2 [MΩ] E = 6 [V], determina la potencia suministrada por la batería (P = EI)

7) Un generador de fuerza electromotriz constante E y resistencia interna r se conecta a una resistencia de carga R. En esas condiciones la potencia P disipada por la resistencia R esta expresada por la relación $P = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$, R y r en [Ω], P en [W]. Encuentra el valor de R para que la potencia sea máxima y determínala

8) Dos puntos A y B están en distintas márgenes del río, justo en el sitio donde el ancho del mismo es de 3 [km]. El punto C está en la misma margen que B, a 6 [km] a su derecha. Una compañía eléctrica desea tender un cable de A a C, sabiendo que el costo por kilómetro es 25% más caro bajo el agua que por tierra. Responde: ¿a qué distancia debe encontrarse el punto P (ubicado entre C y B) para que la línea sea lo menos costosa para la compañía? Observación: el punto P es el lugar donde comienza a realizarse el tendido por tierra.

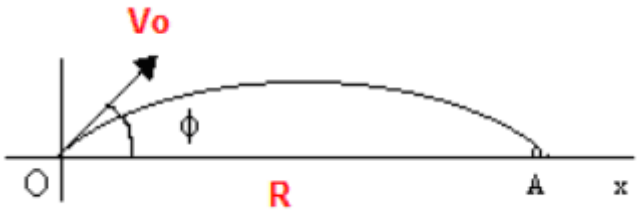
9) Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario C de dióxido de carbono CO_2 en el aire, en partes por millón [ppm], en una ciudad, está relacionado con la población p expresada en miles de habitantes por la siguiente expresión:

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$$

El aumento de población de esa ciudad en t años se estima que está dado por la relación siguiente: $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$ en miles de habitantes.
Responde: ¿con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en esa ciudad dentro de 3 años?

10) El tanque de combustible de cierta motocicleta tiene forma de cono recto y está ubicado de forma vertical con el vértice del mismo hacia abajo. Se está cargando de combustible a una velocidad constante de 60π [cm^3/min], y la altura que alcanza el combustible es siempre 2/3 del radio. Contesta: ¿a qué velocidad está cambiando el radio de la cantidad de gasolina cuando la altura que alcanza el líquido es 5cm?

11) La distancia horizontal R (en el vacío) que recorre un proyectil, lanzado con velocidad inicial V_0= 80 $\left[m/s\right]$ desde una pieza de artillería que tiene un ángulo de elevación θ respecto a la horizontal, se determina según la fórmula $R = \frac{6400 \cdot sen(2\theta)}{g}$ (donde g = 9.81 $\left[m/s^2\right]$) .Determina el ángulo θ con el cual la distancia R es máxima.



12) La ecuación de una onda transversal que viaja por una cuerda tensa está dada por

$$y = 6sen(0,02\pi x + 4\pi t)$$

donde x es la distancia al extremo de la cuerda donde se comienza la perturbación en cm, y t es el tiempo en segundos a partir del inicio de la perturbación. Si una partícula se encuentra a 2 [cm] del inicio de la cuerda, responde:

a) ¿cuál es la onda máxima de propagación que experimenta?
b) ¿a cuántos segundo de comenzada la perturbación se da?

13) Un camión descarga arena formándose un montículo que tiene la forma de cono recto circular. La altura **h** va variando manteniéndose constantemente igual al radio r de la base. Cuando la altura es de 2 $[m]$, ella está aumentando a razón de 25 $[cm/\min]$. Contesta, ¿con qué rapidez está cambiando en ese instante el volumen V de arena?

14) La iluminación de una lámpara es directamente proporcional a su intensidad e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la lámpara. Dos lámparas de intensidades I y 2I están separadas a una distancia de 6 metros. Determina en qué punto del segmento recto que las une es mínima la iluminación.

15) La velocidad de una onda de longitud L en aguas profundas es:

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

donde k y C son constantes positivas conocidas. Responde: ¿cuál es la longitud de la onda que da la mínima velocidad?

16) El potencial $\boldsymbol{V}$ (en voltios) en un punto que está a una distancia $\boldsymbol{r}$ de una carga puntual de $\boldsymbol{Q}$ (en Culombios) está expresada por:

$$V = \frac{kQ}{r}$$ siendo K una constante, r medida en metros.

Sean $Q_1 = 5.10^{-10}\left[C\right]$ y $Q_2 = 5$ Q1, dos cargas puntuales positivas que distan entre sí una distancia $d = 5\left[cm\right]$ con $K = 9.109\left[V.m/C^2\right]$

a) Expresa el potencial V en un punto interior al segmento $\overline{Q_1Q_2}$ en función de la distancia del punto a la carga Q_1. (El potencial es la suma del producido por cada carga).
b) Determina a qué distancia de la carga Q_1 debe encontrarse para que el potencial sea mínimo.

17) Un meteorito esférico entra en la atmósfera de la tierra y se va fundiendo a una tasa proporcional a su superficie. Demuestra que su radio disminuye a una tasa constante.

DERIVACIÓN EN FORMA IMPLÍCITA

La energía cinética (K) de un cuerpo es aquella energía que posee debido a su movimiento. Se define como el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa determinada desde el reposo hasta la velocidad indicada. Una vez conseguida esta energía durante la aceleración, el cuerpo mantiene su energía cinética salvo que cambie su velocidad. La energía cinética de una masa puntual depende de su masa m y su velocidad v, se expresa en Joules [J]= [kg·m^2/s^2]:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

SITUACIÓN

Se necesita determinar la aceleración que experimenta un cuerpo de masa 0,4 [kg], en el momento en que su velocidad es 8 [m/s] y su potencia[1] es de7 [watt].

Como la velocidad en la ecuación está elevada al cuadrado, no podemos determinar v(K) a partir de una única ecuación para luego derivarla. La alternativa es derivar ambos miembros de la ecuación teniendo en cuenta que tanto v como K dependen de t. Este método se denomina **derivación implícita**, el mismo se puede aplicar siempre y cuando la función sea derivable en todo su dominio.

$$\frac{d}{dt}(K) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

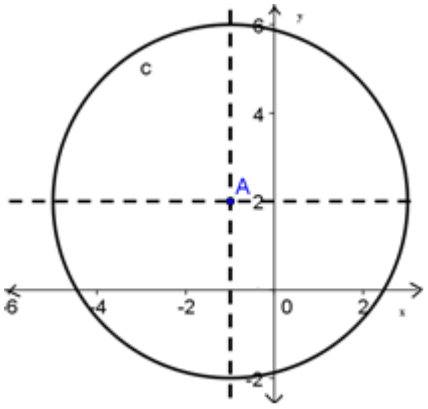
$$\frac{dK}{dt} = mv\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = ...$$

Luego la aceleración que experimenta el cuerpo en ese instante es de……[m/s^2].

[1] La potencia es la derivada del trabajo respecto al tiempo. $[j/s] = [watt]$

EJEMPLO

Determina las ecuaciones de las rectas tangente a la circunferencia cuyo radio mide 4 unidades, representada a la derecha, en x = -2.



La ecuación de la circunferencia viene dada por:

……..

La pendiente de la recta tangente a la circunferencia viene dada por:

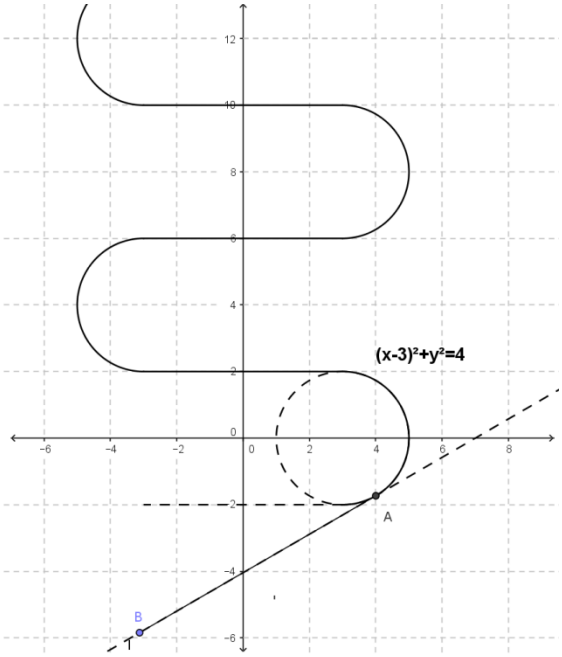
2(x+1)+2(y-2) $\frac{dy}{dx}$ =0 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{(2-y)}$ en x =-2 , y = $\pm\sqrt{15}$ +2

Las ecuaciones correspondientes son:

$$m_1 : y = 0,258x + 6,39 \text{ y } m_2 : y = -0,258x - 2,39$$

Verifica gráficamente con el software GeoGebra

PROBLEMA RESUELTO



El gráfico de la derecha muestra el desarrollo de una serpentina de un sistema de calefacción. Se desea hacer una desviación en el punto A, suponiendo que la misma es tangencial. Considerando que la ecuación que modeliza el codo a desviar es:

$$(x-3)^2+y^2=4 \qquad \textbf{(1)}$$

se necesita conocer la ecuación de la recta que contiene al tramo $\overline{AB}$ que es tangente al codo en el punto *A*.

Solución:

Si se quiere despejar la variable y en la ecuación (1), no podemos determinar una única expresión para luego derivarla:

$$y_1=\sqrt{4-(x-3)^2}\ ,\ y_2=-\sqrt{4-(x-3)^2}$$

La alternativa es derivar ambos miembros de la ecuación (1) teniendo en cuenta que la variable y depende de la variable:

$$\frac{d}{dx}\left[(x-3)^2+y^2\right]=\frac{d}{dx}[4]\Rightarrow$$
$$\frac{d}{dx}(x-3)^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}[4]\Rightarrow$$
$$2(x-3).1+2y.\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2(x-3).}{2y}=\frac{3-x}{y}$$

Ahora bien, se sabe que la primera derivada evaluada en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en dicho punto. En este caso se conoce la coordenada x=4 del punto A por lo que reemplazando en la ecuación (1) obtenemos:

$(4-3)^2+y^2=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}73$, entonces *A*= (4;-1,73) ya que el punto pertenece al cuarto cuadrante.

Conociendo las coordenadas del punto *A*, se tiene: $\frac{dy}{dx}=\frac{3-4}{-1{,}73}\approx 0{,}58$

Entonces la ecuación de la recta que contiene al tramo $\overline{AB}$ que es tangente al codo en el punto *A* es:

$$y=0{,}58x+b$$
$$y(4)=-1{,}73\Rightarrow$$
$$y=0{,}58x-4{,}04$$

ACTIVIDADES

1) Sea f: $R\rightarrow R$ / f(x) = $a+\frac{1}{k}x$ con a constante y $k\neq 0$.
   a) Responde: ¿qué tipo de función es? Determina su derivada.
   b) Se dice que una función está dada en forma implícita cuando está expresada como g(x) = 0. Escribe la función dada en forma implícita, determina su derivada y comprueba que has obtenido lo mismo que en el inciso a).

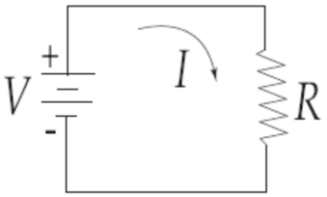
2) Determina $\frac{dy}{dx}$ siendo:
   a) $x^2 + y^2 = 2xy + 3$ b) $xy - y - 4x = 5$ c) $xe^y + y = 4$

3) Prueba que las rectas tangentes a las curvas con ecuaciones:

$$4y^3 - x^2y - x + 5y = 0 \quad \text{y} \quad x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$$

son perpendiculares entre sí, en el origen de coordenadas. Comprueba gráficamente lo obtenido con el software GeoGebra.

4) El voltaje V $[V]$, la intensidad I $[A]$ y la resistencia R $[\Omega]$ de un circuito eléctrico, como el que se muestra en la figura, se relacionan mediante la ecuación V = I · R



Si V es constante e I decrece a razón de 1/3 $[A/s]$. Halla la razón a la cual R cambia cuando V = 12 $[V]$ e I = 2 $[A]$. Responde: ¿R aumenta o disminuye?

5) Sean dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo. La resistencia equivalente R cumple: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

Si R_1 y R_2 aumentan a razón de 0,01 y 0,02 [Ω/s]. Respectivamente, calcula la razón de cambio de R cuando R_1= 30 [Ω]y R_2= 90 [Ω].

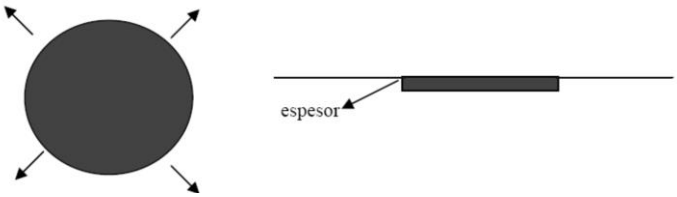
6) La ley de Boyle para los gases perfectos establece que a temperatura constante P.V = K donde P es la presión, V el volumen y K una constante. Si la presión está dada por la expresión: P(t) = 30 + 2t con P [cm de Hg], t en [s]; y el volumen inicial es de 60 [cm^3], determina la razón de cambio del volumen V con respecto al tiempo t a los 10 [s].

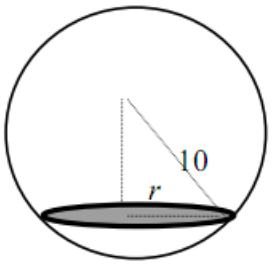
7) Si un objeto de masa *m* tiene velocidad *v* y energía cinética E_C entonces se cumple que:

$$E_C-\frac{1}{2}mv^2=0$$

Determina la variación instantánea de energía cinética que experimenta un cuerpo de 5 [kg], en el momento en que su velocidad es 7 [m/s] y su aceleración es 10 [m/s^2].

8) Una mancha con forma de cilindro recto circular se ha formado al derramarse en el mar 100 [m^3] de petróleo. Calcula con qué rapidez aumenta el radio de la mancha cuando ese radio es de 50 [m], si el espesor disminuye a razón de 10 [cm/h] en el instante que el radio es 50 [m].





9) Se vacía el agua de un tanque esférico de radio 10 pies. El nivel del agua en el tanque es 5 pies y está decreciendo a razón de 3 [ft/s]. Responde, ¿con qué razón disminuye el radio r de la superficie del agua?

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Sea una función y = f(x) y su derivada f´(x) con dominio en todos los valores de x donde $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.

Si llamamos $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ y h = Δx se tiene que:

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon \text{ donde } \varepsilon \in R \wedge \varepsilon \to 0 \text{ si } \Delta x \to 0$$

despejando Δy , $\Delta y = f'(x).\Delta x - \varepsilon.\Delta x$ (*expresión 1)*

donde a la expresión f´(x) . Δx se la denomina diferencial de la función f(x) y se la denota por dy.

De esta forma, $\Delta y = dy - \varepsilon.\Delta x$ donde $\varepsilon \to 0$ si $\Delta x \to 0$

Sin perder generalidad observemos que Δx = dx, ya que si y = f(x) = x, se tiene que

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \Rightarrow dx = 1 \cdot \Delta x, \quad \text{luego se puede definir:}$$

☆ El **diferencial de una función** y = f(x) viene dado por la expresión

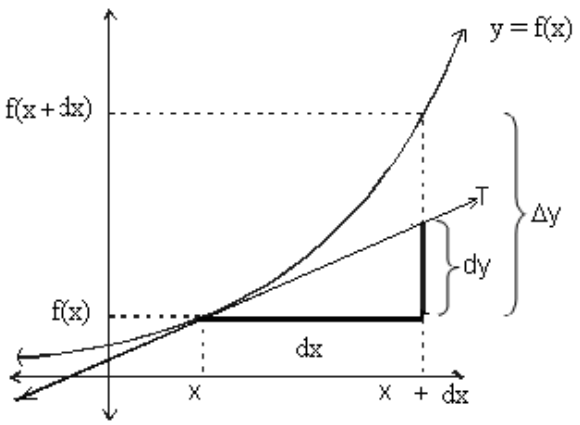
dy = f´(x).dx *(expresión 2)*

para todo x $\in D_f$ y donde f´(x) existe.

Un poco de historia...

En el año 1684, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) publicó en la revista Acta Eruditorum *"Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas"*. En este escrito utilizó la notación *dx* para el diferencial.

Geométricamente:



Observación: aplicando la propiedad uniforme se puede ver que la derivada de una función (en una variable) es igual al cociente entre diferenciales, y que coincide con la notación adoptada por Leibniz.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Esta notación es especialmente útil cuando se trabaja con funciones multivariables ya que indica en cada momento la variable de la función que se considera independiente, dejando el resto de variables como

Como una función de dos variables:

Teniendo en cuenta que dy = f´(x).dx, al diferencial de una función se lo puede interpretar como una función que depende de x y de dx.

Dada la función y = sen(2x), el diferencial de la función viene dado por

dy = 2cos(2x). dx

para x = 5 y dx = 0,4 dy = …….

para x = 1 y dx = 10 dy = ……..

Como aproximación a la variación exacta de la función.

Supongamos que se quiere estimar $\sqrt{102}$. Para esto se puede utilizar el diferencial y aproximar la variación de la función a partir de un valor cuya raíz cuadrada sea conocida. Si además se busca que el error de estimación sea pequeño, se debe trabajar con un valor cercano a 102, en este caso 100.

Observando la *expresión 1*, tomando y = f(x) = $\sqrt{x}$, dx = 2, y x= 100 se tiene que

$\Delta y = f'(x).dx + \varepsilon.dx$, luego $\Delta y \simeq f'(x).dx$, siendo $\varepsilon.dx$ el error de estimación.

Se tiene que $\sqrt{102} - \sqrt{100} \simeq \frac{1}{2}.100^{-\frac{1}{2}}.2$= 0,1

Con esto se puede aproximar $\sqrt{102} \simeq \sqrt{100}$ +0,1=10,1

Si en y = f(x), dy se utiliza para aproximar Δy entonces el **error absoluto de la aproximación** viene dado por Δy-dy, si es positivo la aproximación se dice por defecto y si es negativa la aproximación es por exceso.

Observación: Al ser dx relativamente pequeño, el error de aproximación lo es también, si se compara el resultado arrojado por una calculadora este es aproximadamente de 0,0005.

Respecto a la aproximación anterior, representa en un mismo gráfico con el software GeoGebra:

a) dy
b) El error de aproximación.

PROBLEMA RESUELTO

Una esfera de metal, de 10 [cm] de radio, se va a recubrir con una capa de plata de 0,02 [cm] de espesor. Estima, utilizando el concepto de diferencial, cuánto variará el volumen de dicha esfera.

Solución:

Como sabemos, la expresión de la ecuación del volumen de una esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi.r^3$

$$\frac{d}{dr}V(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi.r^3\right) \Rightarrow$$
$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow$$
$$dV = 4\pi.r^2.dr$$

Si el radio es 10 [cm] y la variación del radio es 0,02 [cm], entonces:

$$dV = 4\pi.10^2.0{,}02 \Rightarrow dV = 8\pi \approx 25{,}13[cm^3]$$

ACTIVIDADES

1) Sea la función f(x) = ln(2x) en x= $\frac{1}{4}$:

   a) Si Δx = 0,1 calcula la variación exacta de la función (Δy) y la variación aproximada (dy).

   b) Responde las mismas consignas del ítem anterior, pero para Δx = 0,8. Extrae conclusiones.

2) La corriente de una onda senoidal tiene un valor máximo de 58 [mA]y una frecuencia expresada en 90[rad/s]. Su ley viene dada por i(t) = 58sen(90t). Estima, a través del uso de diferenciales, cuánto varía la corriente i(t) cuando pasan 0,01 [s] del tiempo $t_1 = \frac{\pi}{90}[s]$.

3) Cuando se calienta un cubo de metal cada arista aumenta a razón de un 0,1% por grado de aumento en la temperatura. Responde: ¿cuánto aumenta su área cuando el cubo tiene 4[cm] de arista, al aumenar un grado la temperatura? Y el volumen, ¿cuánto aumenta? Utiliza diferenciales.

4) La resistencia eléctrica R de un conductor (cable) es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. Suponiendo que la longitud es constante, determina el error relativo con que debe medirse el diámetro para que el módulo del error relativo de la resistencia sea menor a 0,03.

> Muchas veces es importante determinar la magnitud de la variación de una función. Se define **error relativo como:**
>
> $$\frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{dy}{y}$$

5) El tiempo de oscilación de un péndulo viene dado por

$$t = \pi . \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Donde *t* se mide en segundos, g= 9,81 [m/s^2] y l es la longitud del péndulo medida en metros. Si un péndulo de 0,994 [m] oscila una vez por segundo, halla el cambio aproximado de t si el péndulo se alarga 3 [mm] (utiliza diferenciales).

6) Completa para que las oraciones resulten correctas:

a) $y = 2sen(a) + cos(x^2) \Rightarrow dy =$ ..... .dx

b) $y = 2sen(a) + cos(x^2) \Rightarrow dy =$ ..... ……..da

c) $h = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-1}} \Rightarrow dh =$ .....

d) $u = 2 + \ln(3x) \Rightarrow du \Big|_{\substack{x=10 \\ \Delta_x=0,5}} =$ .....

e) $z = e^t . \ln(t) \Rightarrow \dfrac{dz}{dt} =$ …….....

7) La Ley de Boyle para la expansión de un gas encerrado es PV = C, donde P es la presión expresada como el número de libras por unidad de área, V es el volumen del gas y C es una constante. Demuestra que si la ley de Boyle se cumple entonces;

$$VdP + PdV = 0$$

8) Calcula el trabajo realizado por el campo eléctrico para mover una partícula cuya carga eléctrica es de 10 [µC] desde el punto A hasta el punto B, sabiendo que el potencial eléctrico en el punto A tiene 8 [V] y en el B es igual a 4 [V]. Utiliza diferenciales y recuerda que $W = q\,(V_f - V_i)$.

9) El calibre de un cilindro en una máquina de combustión interna es de 8,890$[cm]$ y su carrera de 12,7$[cm]$. Si el cilindro se recalibra hasta un diámetro de 8,915 $[cm]$responde: ¿cuál es aproximadamente el aumento de la cilindrada del motor? (utiliza diferenciales).

10) La rapidez adquirida por un objeto que cae libremente una distancia de 100 $[m]$ a partir del reposo, está dada por $\boldsymbol{r} = \sqrt{64,4h}\,[m/s]$. Calcula la variación que sufrirá ***r*** debido a un error por exceso de 0.5 m al medir la altura, cuando ésta es de 50 $[m]$ (Utiliza diferenciales).

INTEGRAL INDEFINIDA

SITUACIÓN

Al entrar en una curva a 30 $\left[m/s\right]$, un conductor reduce su velocidad con una aceleración de 4 $\left[m/s^2\right]$ ¿Cuál será su velocidad 3 segundos después de empezar a frenar? La función velocidad desde que entra a la curva hasta que cambia su aceleración viene dada V(t)=…….. Luego V(3)=……. $\left[m/s\right]$

Observa que v´(t) = a(t) . ¿Cómo modificarías el enunciado para que haya otra expresión para v(t) pero donde a(t) siga siendo igual?

……
……

Completa:

1-	f(x) =	$\Rightarrow$ f´(x) = 2
2-	g(m) = $4m^5$	$\Rightarrow$ g´(m) =
3-	r(a) =	$\Rightarrow$ r´(a) = $5a^4$
4-	m(d) = $\frac{2}{d^3}$	$\Rightarrow$ m´(d) =
5-	a(x)= $e^x + x$	$\Rightarrow$ a´(x) =
6-	f(h) =	$\Rightarrow$ f´(h) = sen(h) + cos(h)
7-	w(z) =	$\Rightarrow$ w´(z)= z^{-3}
8-	q(u) = $3\sqrt[3]{u^2}$	$\Rightarrow$ q´(u) =
9-	w(z) =	$\Rightarrow$ w´(z) = me^z
10-	p(n) =	$\Rightarrow$ p´(n) = $5\sqrt[5]{n^2}$

¿Son únicas las respuestas dadas en la tabla? ¿En cuáles sí y en cuáles no? ¿Por qué? ¿A qué conclusión puedes arribar?

……
……..

☆ **Primitiva de una función**

Dada una función f(x), diremos que otra función F(x) es una *primitiva* de f(x) si y sólo si se cumple que la derivada de F(x) es f(x).

En Símbolos: F(x) es una primitiva de f(x) $\Leftrightarrow$ F´(x) = f(x).

Todas las primitivas de una función se diferencian en una constante.

Calculemos los diferenciales de las siguientes funciones, previa obtención de sus derivadas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d(-5x^2+3)}{dx} = -10x \Rightarrow d(-5x^2+3) = -10xdx \\ \dfrac{d(-5x^2+3/5)}{dx} = -10x \Rightarrow d(-5x^2+3/5) = -10xdx \\ \dfrac{d(-5x^2-\sqrt{2})}{dx} = -10x \Rightarrow d(-5x^2-\sqrt{2}) = -10xdx \end{array}\right\} \quad d(-5x^2+c) = -10xdx$$

Podemos observar que la expresión diferencial -10xdx se puede obtener a partir de infinitas primitivas que sólo difieren en una constante.

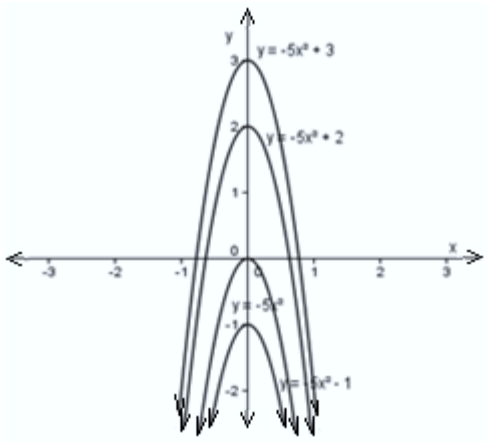
La expresión $-5x^2+c$ se llama integral indefinida de -10xdx y lo designamos de la siguiente manera:

$$\int -10xdx = -5x^2 + c \quad , c \in \mathrm{R}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

La integral indefinida representa una familia de funciones.

El significado geométrico es un conjunto infinito de curvas y cada una de ellas se obtiene por un desplazamiento vertical de las otras.



- ☆ La **Integral indefinida** de una expresión diferencial dada es la función cuya diferencial es la expresión dada.

En Símbolos: Sea $F(x)$ una función tal que su derivada es $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow d\left[F(x) + c\right] = f(x)dx$$

<u>Observación:</u>

Además podemos decir que la integral indefinida de $f(x).dx$ es el conjunto de las infinitas primitivas $F(x) + c$.

De la definición se deduce que:

"La diferenciación y la integración son operaciones inversas"

I) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

II) $\int dF(x) = F(x) + c$

REFLEXIONA: ¿en qué casos es necesaria la notación de integral indefinida para determinar las primitivas de una función y no basta con sólo enunciar "determine las primitivas de…"

EJEMPLO

$$d\int -10xdx = d(-5x^2 + c) = -10xdx$$

$$\int d(-5x^2 + 3) = \int -10xdx = -5x^2 + c$$

☆ PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

La integral indefinida es un operador lineal, lo que se traduce en las dos propiedades siguientes:

a) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

b) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, siendo k constante

EJEMPLOS

a) $\int \left[x^2 + sen(x)\right]dx = \int x^2 dx + \int sen(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + c_1\right] + \left[-\cos(x) + c_2\right] =$

$= \frac{1}{3}x^3 - \cos(x) + c$

b) $\int \frac{8}{x^3}dx = 8\int \frac{1}{x^3}dx = 8\int x^{-3}dx = 8\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) + c = -\frac{4}{x^2} + c$

PROBLEMA RESUELTO

Una barra de longitud L tiene una densidad que se modela a través de $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$, siendo x la medida desde su extremo izquierdo.

Hallar la expresión que determina la masa en función de x, sabiendo que la densidad de la barra es la variación instantánea de la masa con respecto a la longitud y que cuando x=9 [m] su masa es igual a 40 [kg].

Solución:

Por ser la densidad la variación instantánea de la masa con respecto a la longitud, significa que:

$$\frac{dm}{dx} = \rho(x) = 9 + 2\sqrt{x} \Rightarrow$$

$$dm = \left(9 + 2\sqrt{x}\right)dx \Rightarrow \int dm = \int \left(9 + 2\sqrt{x}\right)dx$$

$$\mathrm{m} = \int 9dx + \int 2.x^{1/2}dx$$

$$\mathrm{m} = 9\mathrm{x} + \mathrm{C}_1 + \frac{4}{3}x^{3/2} + C_2 \quad \text{si } \mathrm{C} = \mathrm{C}_1 + C_2$$

$$\mathrm{m(x)} = 9\mathrm{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$$

pero se sabe que cuando cuando x=9 [m] su masa es igual a 40 [kg], por lo tanto:

$$m(9) = 40$$

$$40 = 9.9 + \frac{4}{3}\sqrt{9^3} + C \Rightarrow C = -77\left[kg\right]$$

Luego la expresión, que determina para cada distancia x la masa de la barra, es:

$$\mathrm{m(x)} = 9\mathrm{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 77$$

ACTIVIDADES

1) Resuelve las siguientes integrales trabajando con la tabla de fórmulas, cuando sea necesario:

a) $\int (4x^3 - 3x^2 + 2)dx =$

b) $\int (x^3 - 2)^2 3x^2 dx =$

c) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$

d) $\int 4sen(t)dt =$

e) $\int \left(5e^w + w - a \right) dw =$

f) $\int \left(\cos(m) + \frac{1}{x} \right) dx =$

2) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) La integral indefinida $\int -5x^6 dx$ es igual a la función $-\frac{5}{7}x^7$

b) La familia de funciones, con dominio en reales, f(x)= $2x^3 + C$ se puede expresar como la integral $\int 6x^2 dx$

c) Una primitiva de la función f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$ es $2\sqrt{x}$

d) La única función que cumple que dy = $\frac{t-4}{t^2}$ dt es y = $\ln(t) + \frac{4}{t}$

3) Demuestra que la ecuación del desplazamiento de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es:

$$X(t) = ½.at^2 + v_0t + x_0$$

donde a es la aceleración contante, v_0 es la velocidad inicial y x_0 es el desplazamiento inicial.

4) Un bidón de agua destilada de cinco litros tiene un orificio en el fondo. La variación instantánea de su volumen en función del tiempo está dada por la ley: $(0,002t - 5)\ \left[cm^3 / \min \right]$. Encuentra la cantidad de agua que queda en el bidón transcurridas diez horas.

5) El conductor de un auto que estaba transitando a 120 $\left[km/h\right]$ vio un accidente a 200 [m] de él y aplicó al máximo sus frenos y logró detenerse justo antes de impactar. Determina la desaceleración constante que realizó.

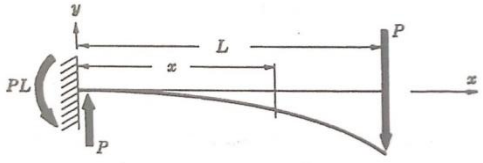
6) Un tanque de base circular con radio 0,5 $\left[m\right]$ y de altura 2$\left[m\right]$ se encuentra completamente lleno de agua. Si en la parte inferior se abre una abertura circular de 2 $\left[cm\right]$ de radio para que el agua salga, se cumplirá que: $\frac{1}{\sqrt{h}}dh = -0,007081847\left[s\right]dt$, donde h es la altura del agua en $\left[m\right]$.Responde, ¿en cuánto tiempo se vaciará el tanque?

7) La temperatura de una taza de café acabada de servir es de 200 [°F]. Un minuto después se ha enfriado a 190 [°F] en un cuarto que está a 70 [°F]. Según la ley de enfriamiento de Newton, la variación de la temperatura T en función del tiempo viene dada por: $\frac{dT}{dt} = 130.\,ln\left(\frac{12}{13}\right).\left(\frac{12}{13}\right)^t$. Determina el tiempo que debe pasar para que el café se encuentre a una temperatura de 150 [°F].

8) V [m^3] expresa el volumen de agua de un tanque en cada instante t[h]. Al llenarse, la tasa de variación instantánea de V con respecto a t viene dada por la fórmula $\pi \cdot (2t^2 + 6t + 4)$. Determina el volumen de agua en el tanque luego de las tres horas de iniciado el llenado, sabiendo que inicialmente el tanque contenía 1.000 litros.

9) En el momento que el semáforo se pone en verde, un automóvil inicia la marcha con aceleración constante de 2 $\left[m/s^2\right]$. En ese mismo momento un camión que lleva velocidad constante de 20 $\left[m/s\right]$ le adelanta. Responde, ¿a qué distancia alcanzará el automóvil al camión?

10) Siendo *y* la elástica en cada punto de la viga en voladizo, sometida a la carga aislada *P* (representada en la figura). Determina la flecha máxima sabiendo que;



✓ Momento Flector *M* (*x*)= - *PL* + *Px*

- ✓ $y'' = \dfrac{M(x)}{EI}$
- ✓ *E* e *I* constantes en toda la longitud de la viga.
- ✓ $y'(0) = 0$ y $y(0) = 0$

11) Una viga en voladizo tiene 3 [m] de longitud y está cargada con una fuerza *P* de 1200 [kg], ubicada al final de la viga. Se trata de un perfil H 220, con un momento de inercia respecto al eje neutro, de 8050 [cm^4]. Determina la flecha máxima de la viga. Considerar $E = 2{,}1 \times 10^6$ [kg/cm^2].

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Si necesitamos determinar $\int sen\,(2x-1)\,dx$, no encontramos una regla de integración que nos permita calcularla inmediatamente por tratarse de la integral de una función compuesta.

Pero si logramos sustituir la expresión: $2x-1$ por otra variable "*z*", y calculamos sus respectivos diferenciales, de modo que en el integrando sólo intervenga la nueva variable, la habríamos transformado en una función simple y estaríamos en condiciones de aplicar la regla de integración correspondiente. Sea

$$z = 2x-1$$

Diferenciando ambos miembros:

$$d(z) = d\,(2x-1)$$

$$1.dz = 2\,dx$$

$$\frac{1}{2}.dz = dx$$

La integral planteada la resolvemos así:

$$\int sen\,(2x-1)\,dx = \int sen\,z.\frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}\int sen\,z\,dz = \frac{1}{2}(-\cos z)+c$$

Después de integrar, debemos expresar el conjunto de primitivas, en función de la variable dada:

$$\int sen\,(2x-1)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-1)+c$$

- ✰ <u>En general</u>: Dada la $\int f\,(x)\,dx$, debemos hallar una expresión $\int g\,(z)\,dz$ que sea equivalente a la primera y que se pueda calcular aplicando alguna regla conocida. Para ello debemos obtener el dz en función de la sustitución planteada.

EJEMPLO

Hallar: $\int \frac{dx}{(3+2x)^2}$

Haciendo u = 3 + 2x y du = 2 dx $\Rightarrow$ ½ du = dx

$$\int \frac{dx}{(3+2x)^2} = ½ \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{2u}+c = -\frac{1}{2(3+2x)}+c$$

ACTIVIDADES

1) Calcula las siguientes integrales aplicando el método de sustitución:

a) $\int \sqrt[3]{-2+5x}\,dx$

b) $\int e^{5x-2}dx$

c) $\int senv \cos v\, dv$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

e) $\int \frac{3z\,dz}{\left(1+2z^2\right)^4}$

f) $\int (4x+1)^6\,dx$

g) $\int \frac{dx}{2-x}$

h) $\int (2n-3n^2)^3(1-3n)dn$

i) $\int \frac{x-1}{x^2-2x}dx$

j) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{5-2x^2}}$

2) Dada la función f(w) = $6w.e^{-w^2}$:

   a) Determina la función primitiva que pasa por el punto (0, 6).

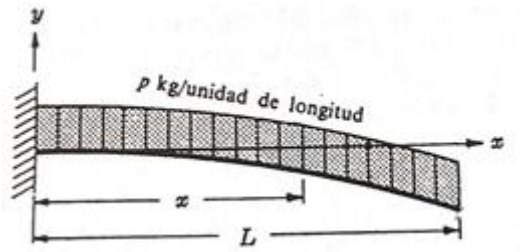
   b) Verifica lo hallado en a).

3) Determina la expresión Q(t) de la carga eléctrica que atraviesa la sección de un conductor, sabiendo que la corriente viene dada por:

$$I(t) = 67\left[mA\right].\text{sen}(30\left[rad/s\right]t)$$

4) Se sabe que *y es* la elástica en cada punto de la viga en voladizo, sometida a la carga *p* en kilogramos por metro lineal, uniformemente repartida (representada en la figura). Determina la flecha máxima sabiendo que;

Momento Flector $M(x) = -\frac{p}{2}(L-x)^2$



- ✓ $y'' = \frac{M(x)}{EI}$
- ✓ E e I constantes en toda la longitud de la viga.
- ✓ $y'(0) = 0$ y $y(0) = 0$

5) Sea una viga en voladizo de sección rectangular de 10 x 15 [cm]. La barra mide 2 [m] de longitud y soporta una carga uniformemente repartida de 1000 [kg/m]. El material es acero, para el cual E = 2,1x10^6 [kg/cm^2] e I = 8050 [cm^4].. Determina la flecha máxima.

<u>Recuerda:</u> No todas las funciones se podrán integrar mediante este método, existen muchos otros que no desarrollaremos en este curso. En esos casos puedes utilizar la tabla de integrales que se encuentra al final o algún software, por ejemplo, Microsoft Mathematics.

INTEGRAL DEFINIDA

SITUACIÓN

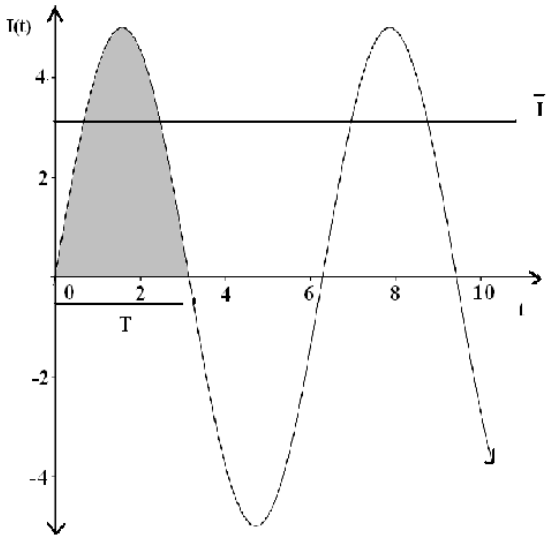
Se desea calcular el valor medio de una corriente de onda senoidal cuyo valor máximo es $5\left[mA\right]$ y su frecuencia es $1\left[rad/s\right]$ en el intervalo $\left[0;\pi\right]$

El valor medio de la corriente es el valor promedio de la misma en un periodo. Gráficamente se lo puede interpretar como:

$$\text{Área sombreada} = \overline{I}.T$$

$$\frac{\text{Área sombreada}}{T} = \overline{I}$$

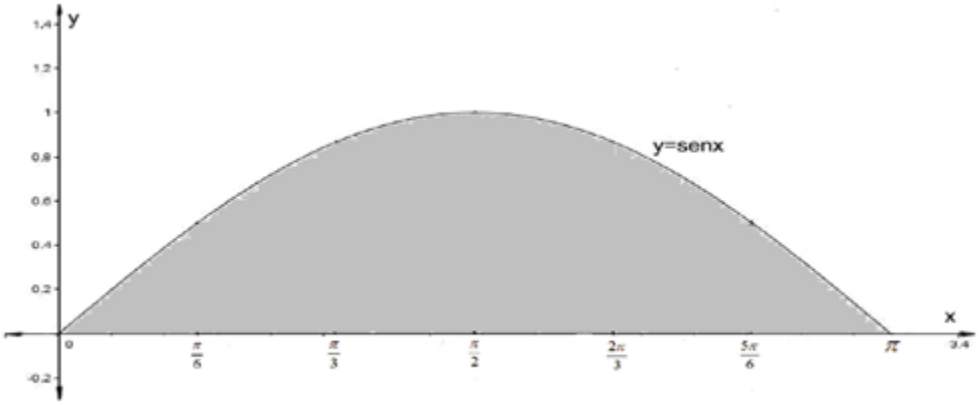
T = Periodo



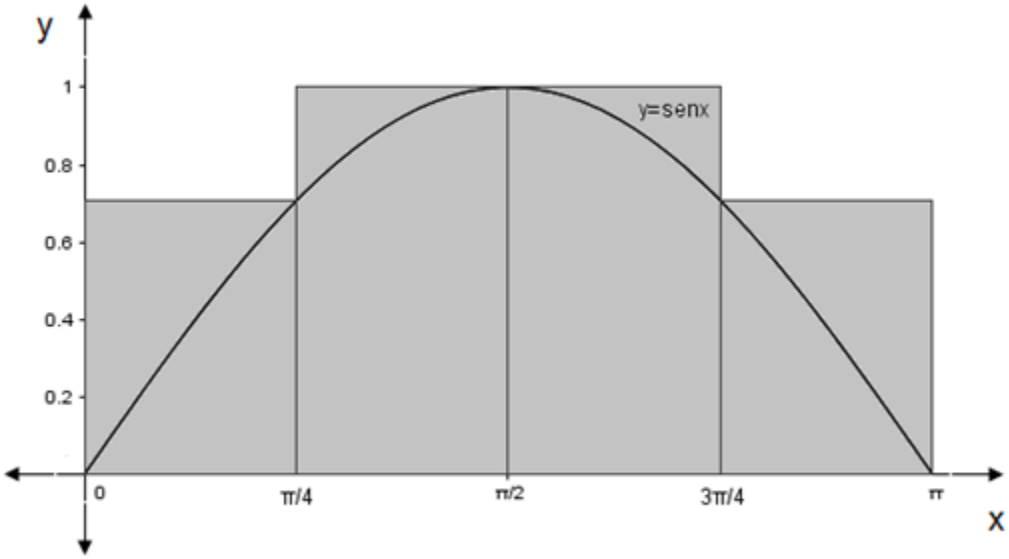
"El área determinada por la función corriente y el eje de abscisas- desde el tiempo 0 hasta el tiempo T- dividido T, es igual al valor promedio de la corriente o valor medio en ese período".

El problema se reduce a poder determinar el área sombreada. Para ello analicemos un caso más simple:

Calcular el área determinada por la función $y = senx$ en $\left[0;\pi\right]$ y el eje de abscisas.



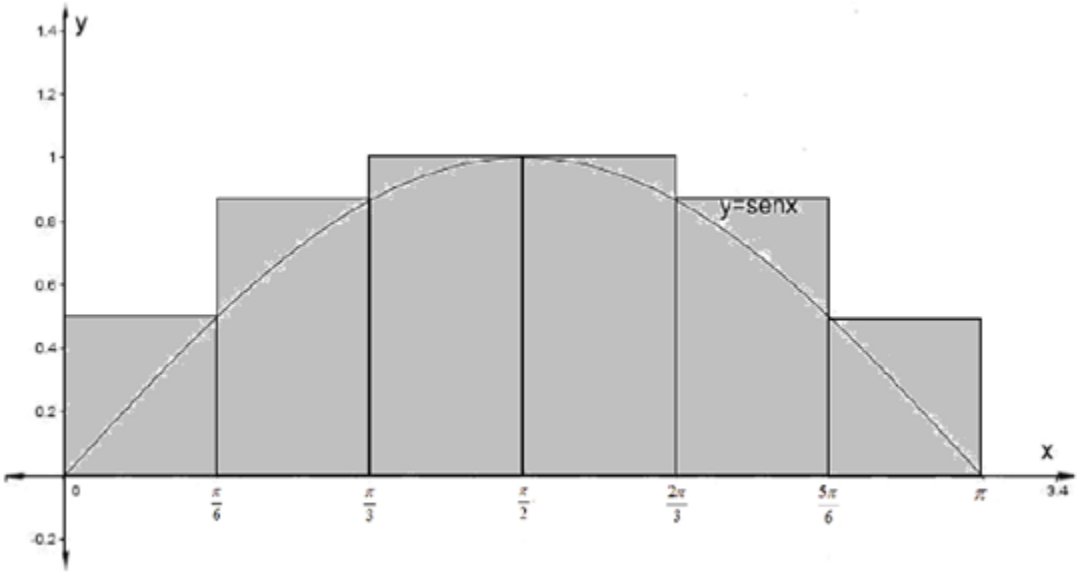
Una posibilidad para aproximar su valor sería particionando el intervalo $[0;\pi]$ en subintervalos más pequeños (en este caso 4), que no se solapan, y considerar que cada uno de estos subintervalos (Δx) es la base de un rectángulo. Tomemos como altura de los mismos al máximo de la función en cada intervalo i y llamémosle M_i:



$$A=\sum_{i=1}^{4} M_i \cdot \Delta x=\frac{\pi}{4}\left(sen\frac{\pi}{4}+sen\frac{\pi}{2}+sen\frac{\pi}{2}+sen\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\cong 2,69\left[u^2\right]$$

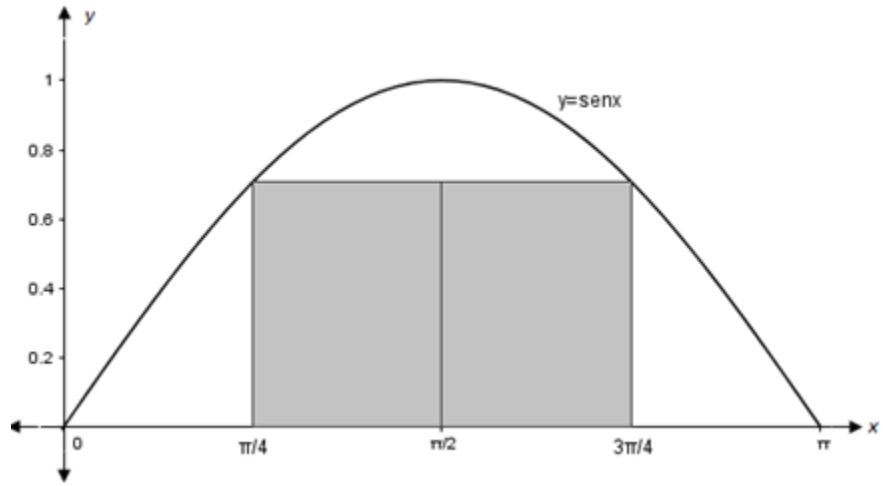
La aproximación obtenida es por exceso y la misma se podría mejorar si el intervalo se dividiera en una mayor cantidad de subintervalos más pequeños.



$$\boldsymbol{A \sim \sum_{i=1}^{6} M_i \Delta x = \frac{\pi}{6}\left(sen\frac{\pi}{6} + sen\frac{\pi}{3} + sen\frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2} + sen\frac{2\pi}{3} + sen\frac{5\pi}{6}\right) =}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right) \cong 2,47\left[u^2\right]$$

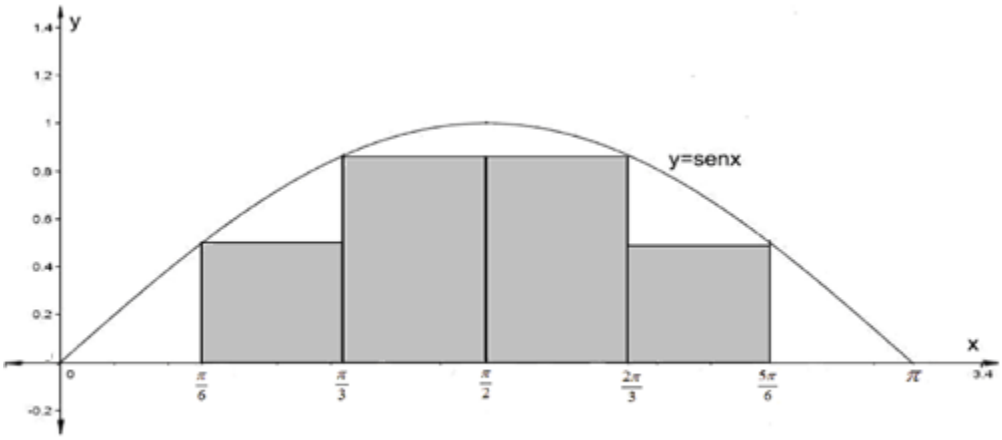
Otra forma de aproximar el área buscada puede ser análoga a la anterior, tomando como altura de los rectángulos al mínimo valor de la función en cada subintervalo i, que llamaremos m_i:



$$A=\sum_{i=1}^{4} m_i \cdot \Delta x=\frac{\pi}{4}\left(sen\,0+sen\frac{\pi}{4}+sen\frac{3\pi}{4}+sen\,\pi\right)=\frac{\pi}{4}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}\right)\cong 1{,}11\left[u^2\right]$$

La aproximación obtenida es por defecto y la misma se podría mejorar si el intervalo se dividiera en una mayor cantidad de subintervalos más pequeños.

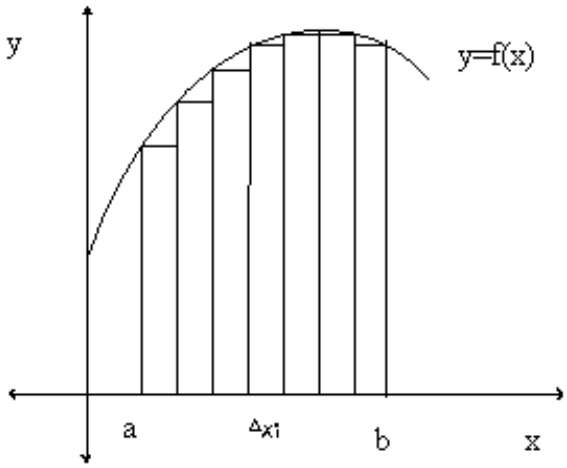


$$\boldsymbol{A\sim\sum_{i=1}^{6} m_i\Delta x=\frac{\pi}{6}\left(sen\,0+sen\frac{\pi}{6}+sen\frac{\pi}{3}+sen\frac{2\pi}{3}+sen\frac{5\pi}{6}+sen\,\pi\right)=}$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)\cong 1{,}43\left[u^2\right]$$

De todas formas ya se puede concluir que el área buscada se encuentra entre 1,43 $\left[u^2\right]$ y 2,47 $\left[u^2\right]$.

<u>En general:</u> Sea una función continua en $[a;b]$ y positiva en el intervalo (a;b), la gráfica de la función y = f(x) y las rectas de ecuaciones x = a, x = b, y = 0 definen una región cuyo área se trata de calcular. Para ello, en primer lugar se divide el intervalo $[a;b]$ en una serie de subintervalos y se trazan los rectángulos que tienen como base la longitud del subtintervalo Δx_i y como altura, la mínima m_i alcanzada por la función en ese subintervalo. Lógicamente si se suman las áreas de todos los rectángulos dará un área menor que la descrita por la función. Pero si aumentamos el número de subintervalos el valor de su área se va aproximando a la buscada.

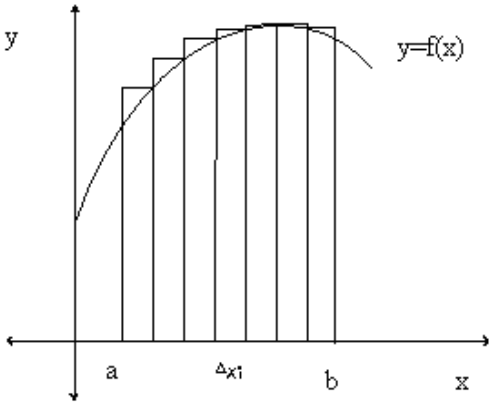


$$\text{Área inferior} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Cuando el número de subintervalos n tiende a infinito tendremos:

$$\text{Área} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

También se puede aproximar el área por exceso, utilizando como aproximación el área de los rectángulos que tienen como base la longitud del subintervalo Δx_i y como altura, el máximo M_i alcanzado por la función en cada subintervalo.



$$\text{Área superior} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Cuando el número de subintervalos n tiende a infinito tendremos:

$$\text{Área} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Si estos límites existen y son finitos e iguales, se dice que la función f(x) es integrable en $[a;b]$ y al límite se lo llama, por definición **Integral Definida** de la función f(x) en el intervalo $[a;b]$; se escribe:

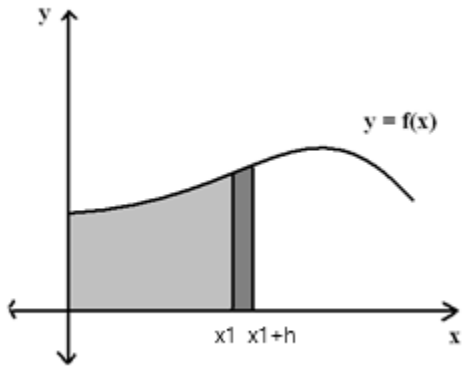
$$\int_a^b f(x)dx$$

y representa el área de la región limitada por la función y = f(x), el eje de abscisas y las rectas x =a y x= b.

$$\text{Área } = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

- El símbolo $\int$ es una antigua variante de la letra "S" y hace referencia la suma.
- El símbolo dx es la variación Δx y representa la base de cada rectángulo.
- El producto f(x) dx representa el área de cada rectángulo.
- Los números a y b se llaman "límites o extremos de integración".

Veamos a qué es igual $\int_0^{x1} f(x)dx$, es decir el área determinada por una función f(x) continua y positiva en un intervalo [0; x_1] y el eje de las abscisas:



Denotemos a dicha área como A(x_1), luego

$\boldsymbol{A(x1+h)-A(x1)\approx f(x1)\cdot h}$ para h pequeño

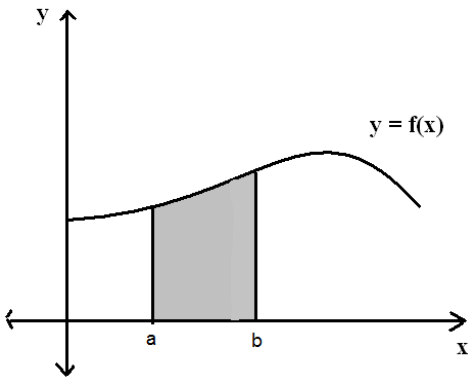
$$\frac{\boldsymbol{A(x1+h)-A(x1)}}{\boldsymbol{h}}\approx \boldsymbol{f(x1)}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{A(x1+h)-A(x1)}{h}=f(x1)$ si el límite existe

$\boldsymbol{A'(x1)=f(x1)\Rightarrow A(x1)}$ es una primitiva de $f(x)$ evaluada en x_1, por lo tanto:

$$\boldsymbol{\int_0^{x1} f(x)dx = F(x1)}$$

Si se quiere hallar el área en un intervalo [a;b]



$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx-=F(b)+c-(F(a)+c)=F(b)-F(a)$$

Lo anterior es la idea intuitiva del **Teorema Fundamental del Cálculo Integral** que dice:

☆ Si $f(x)$ es una función continua en $[a;b]$. Si F(x) es una primitiva de f(x) en $[a;b]$ entonces se verifica: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ahora estamos en condiciones de calcular el área buscada

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = \left[-\cos(\pi) + \cos(0)\right] = 2$$

El área es igual a 2 [u²]

Retomando la situación original:

Podemos definir el valor medio de la corriente de la siguiente forma:

$$\bar{I} = \frac{\int_0^T I(t)dt}{T}$$

$$\bar{I} = \frac{\int_0^{\pi} 5sen(t)dt}{\pi} = -5\cos(t)\Big|_0^{\pi} = \frac{-5\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right]}{\pi} = \frac{10}{\pi}\left[mA\right]$$

I) Calcula $\int_{-2}^{2} x^3 dx =$

II) Determina el área de la región cerrada limitada por y =0; y = x^3, x = 2, x = -2. Representa gráficamente.

III) Comparando los resultados obtenidos en los ítems anteriores responde: ¿una integral definida siempre representa el valor de un área?

☆ La integral definida verifica las siguientes propiedades:

a) Si f(x) >0 en $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx > 0$.

b) Si f(x) <0 en $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx < 0$.

c) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

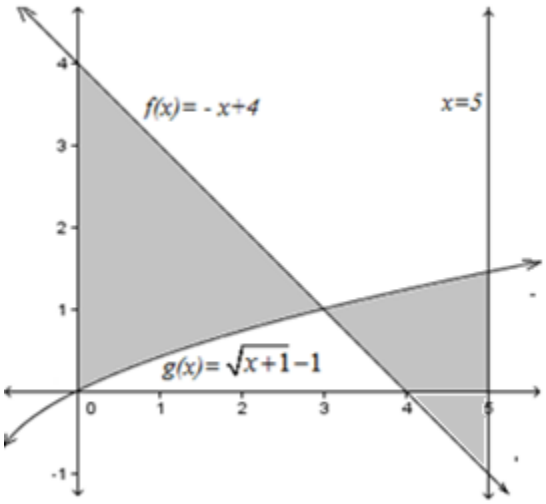
d) Si $c \in [a;b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

e) $\int_a^b [cf(x)+kg(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx + k\int_a^b g(x)dx$, siendo c y k constantes.

Estas propiedades son muy importantes para el cálculo de integrales definidas. Por ejemplo, la propiedad d) nos dice que la integral definida también es un operador lineal, y podremos efectuar la descomposición en forma análoga a lo aplicado en la integral indefinida. En todos los casos nos será de utilidad para calcular áreas de recintos limitados por curvas.

PROBLEMA RESUELTO

Se quiere calcular el área de la región sombreada, determinada por las curvas que se muestran en la imagen de la derecha.



Solución:

Para poder determinar el área sombreada hará falta plantear dos integrales, ya que en una parte f(x) es mayor a g(x) y en otra lo contrario.

Hallemos la abscisa del punto de intersección de ambas funciones:

$$f(x) = g(x)$$

$$-x + 4 = \sqrt{x+1} - 1$$

$$(-x+5)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$$

$x^2 - 10x + 25 = |x+1|$ pero como sabemos que $0 \leq x+1$ por el dominio de la función g(x)

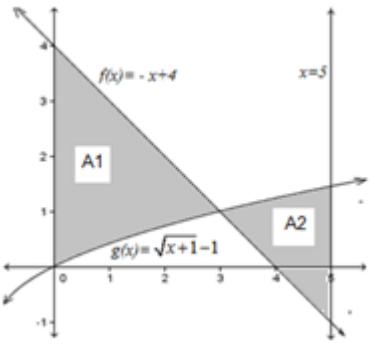
$$x^2 - 10x + 25 = x + 1$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow x_1 = 8; x_2 = 3$$

Pero como x_1 es una raíz extraña de la ecuación planteada, x_2 =3 es el valor buscado.

Entonces:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^3 \left[-x+4-\left(\sqrt{x+1}-1\right)\right]dx + \int_3^5 \left[\sqrt{x+1}-1-\left(-x+4\right)\right]dx =$$



$$= \int_0^3 \left[-x+5\right]dx - \int_0^3 \sqrt{x+1}dx + \int_3^5 \sqrt{x+1}dx + \int_3^5 \left[x-5\right]dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big|_0^3 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right)\Big|_0^3 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right)\Big|_3^5 + \left(\frac{x^2}{2}-5x\right)\Big|_3^5 =$$

$$= \left(\frac{21}{2}-0\right) - \left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right) + \left(4\sqrt{6}-\frac{16}{3}\right) + \left(-\frac{25}{2}-\left(-\frac{21}{2}\right)\right) \approx 8,3$$

Luego el área sombreada es $8,3\ \left[u^2\right]$

ACTIVIDADES

1) Calcula el área de la región delimitada por f(a) y el eje de abscisas, siendo

$$f(a) = \begin{cases} a+4 & \text{si } a<-2 \\ a^2-2 & \text{si } a \geq -2 \end{cases}$$

2) Calcula el área de la región cerrada limitada por $y = \sqrt{x}$, su recta tangente en el punto (4; 2) y el eje de abscisas.

3) Halla el valor del parámetro **a** sabiendo que: $\int_a^4 (-x^2+4x)dx = \frac{32}{3}$. Verifica lo obtenido.

4) Representa gráficamente y calcula el área encerrada por las siguientes curvas (en todos los casos obtiene los datos analíticamente):

a) $\begin{cases} h(x) = x \\ g(x) = x^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = \cos x + 1 \\ y = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$

c) $\begin{cases} u(x) = 0 \\ g(x) = -x + 7 \\ h(x) = 5x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2^x \\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$ y el eje x

e) $\begin{cases} f(t) = -sen(2t) \\ g(t) = 1 \\ en\left[0, 2\pi\right] \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = x \end{cases}$

5) Considerando $f : R \to R$ / f(x) = $3x\sqrt{2 + x^2}$, escribe la expresión analítica y describe el lugar geométrico de:

a) $\int f(x)\ dx$

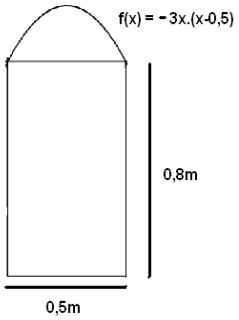
b) una primitiva de *f*

c) $\int_1^4 f(x)dx$

6) Encuentra el valor de $\int_1^2 \left[f(x) + 2g(x) \right] dx$ sabiendo que se verifica lo siguiente: $\int_1^2 2f(x)dx = 5$ y $\int_1^2 g(x)dx = 7$

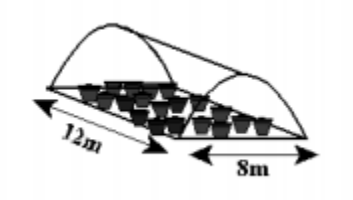
7) La siguiente imagen muestra los restos de un acueducto romano (Arles). Si aproximadamente en ese tramo el mismo tenía 10 metros de extensión y las dimensiones aproximadas del corte transversal son las mostradas en el gráfico de la derecha. Calcula la capacidad en dicho tramo.

Extraído de: http://traianusnet.blogspot.com/2013/01/restos-romanos-en-arles-arelates.html (27/07/13)



8) Estima el volumen de aire del invernadero cuya frontal es una curva de ecuación:

$$y = \frac{8x - x^2}{4} \quad 0 \le x \le 8$$



9) La entrada de la mina que se muestra en la imagen de la derecha, se puede modelizar a través de la función:

y = $-2x.(x-1)$ para $0[m] \le x \le 1[m]$

Si su interior es de 500 metros de largo, responde: ¿cuánto tiempo podrá estar sin que se le acabe el aire, una persona que queda atrapada luego de derrumbarse la entrada?

Nota: se calcula que en promedio una persona consume 6 $\left[\frac{l}{\min}\right]$

El **trabajo** realizado por una fuerza f = F(x) al mover una partícula desde a hasta b, a lo largo del eje x, viene dado por

$$w = \int_a^b F(x)dx$$

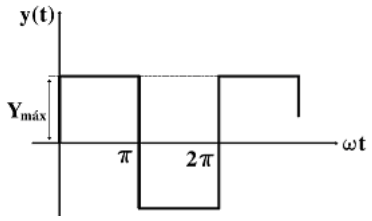
10) Un resorte tiene una longitud natural de 8 pulgadas. Si una fuerza de 20 libras estira el resorte 1/2 pulgada, determina el trabajo realizado al estirar el resorte de 8 pulgadas a 11 pulgadas.

11) Una fuerza de 25 $[kg]$ alarga un resorte 3 $[cm]$. Determina el trabajo requerido para alargar el resorte 2 $[cm]$ más.

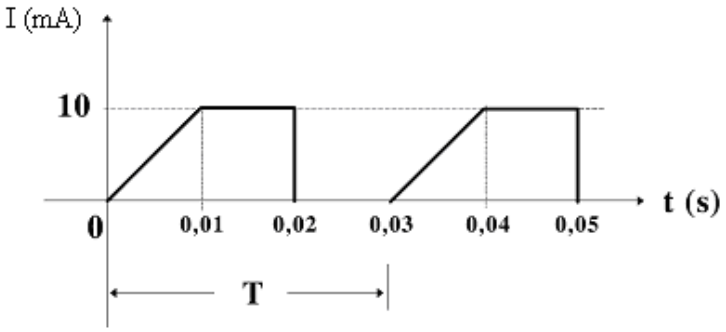
Dada una corriente *i*(*t*), el **valor medio** y el **valor eficaz** en un periodo *T* vienen dados por:

$$\bar{i} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt \quad i_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2 dt}$$

12) Determina el valor medio y eficaz de la onda representada a la derecha.



13) Determina el valor eficaz de la siguiente señal:



14) Calcula el valor medio y eficaz de una corriente de onda senoidal (corriente alterna) cuyo valor máximo es 32,5 [mA] y tiene una frecuencia de $1\left[\frac{rad}{s}\right]$.

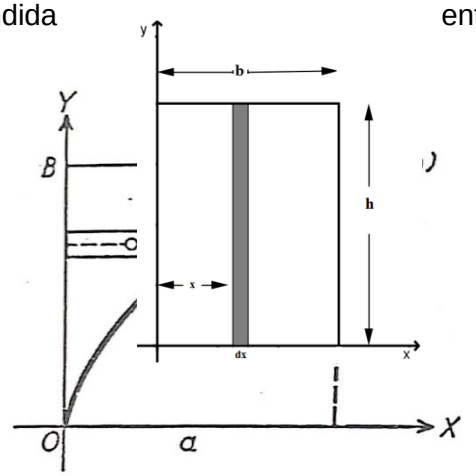
El centro de gravedad $(\bar{x}\ ;\bar{y})$ de una superficie plana determinada por los ejes coordenados y una curva *y=f(x)* viene dado por:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{A} \qquad \text{e} \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_a^b xy\, dx}{A}.$$

siendo *A* el área debajo de la curva en (*a*; *b*).

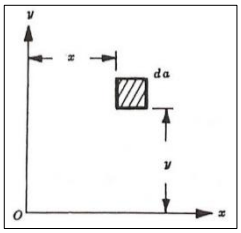
15) Halla el centro de gravedad de la superficie comprendida entre la función $y = senx$, x= 0;

x= π e y=0 (una arcada de la sinusoide).



16) En la figura se muestra un arco de la parábola cuya ley es: $y^2 = 2px$. Halla el centro de gravedad de la superficie delimitada por el arco de parábola y las rectas x=0 e y =b

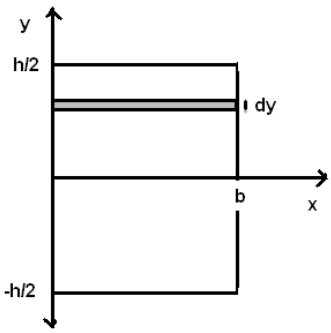
El momento de inercia de un área finita respecto a un eje en su plano es la suma de los momentos de inercia de ese eje de los elementos de área contenidos en ella;



Es decir, $I_x = \int y^2 da$ e $I_y == \int x^2 da$

17) Deduce la fórmula que permite determinar el momento de inercia de un rectángulo respecto a un eje que coincide con su altura. Ten en cuenta la figura que se da como referencia. Recuerda que: $I_y = \int x^2$ da

18) Calcula el momento de inercia del rectángulo de base **b** y altura **h** respecto a un eje por su centro de gravedad, paralelo a la base.



$$I_y = \int y^2.da = \int_{-h/2}^{h/2} y^2.b\,dy =$$

19) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)dx$ da el área de la región limitada por f(x); y =0; x = a y x=b.

c) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}dx = 0$

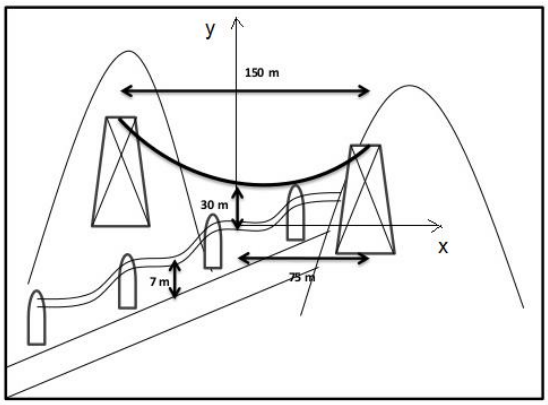
Si la función f(x) es derivable en (a,b) y f´(x) es continua en $[a,b]$ entonces la **longitud *s* del arco** descripto por f(x) y delimitado por *a* y *b* se puede calcular a través de la siguiente integral:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

20) Halla la longitud de la curva f(x) = $x^{1/2}$ en el intervalo $[0;1]$

21) Determina la distancia recorrida por un proyectil que sigue una trayectoria dada por f(x) = x-0,005x^2, donde x está medida en metros.

22) El gráfico de la derecha muestra la instalación de torres de alta tensión que se desea realizar. Se determinó que la ecuación de la catenaria viene dada por $f(x)=15\left(e^{\frac{x}{30}}+e^{-\frac{x}{30}}\right)$. Determina la longitud del cable.



Supongamos que una función *f(x)*es no negativa y continua en [a;b]. Si giramos la región delimitada por f(x), el eje x y las rectas x=a y x=b, alrededor del eje x obtenemos un sólido de revolución. El **volumen** de este sólido puede calcularse a través de la siguiente integral:

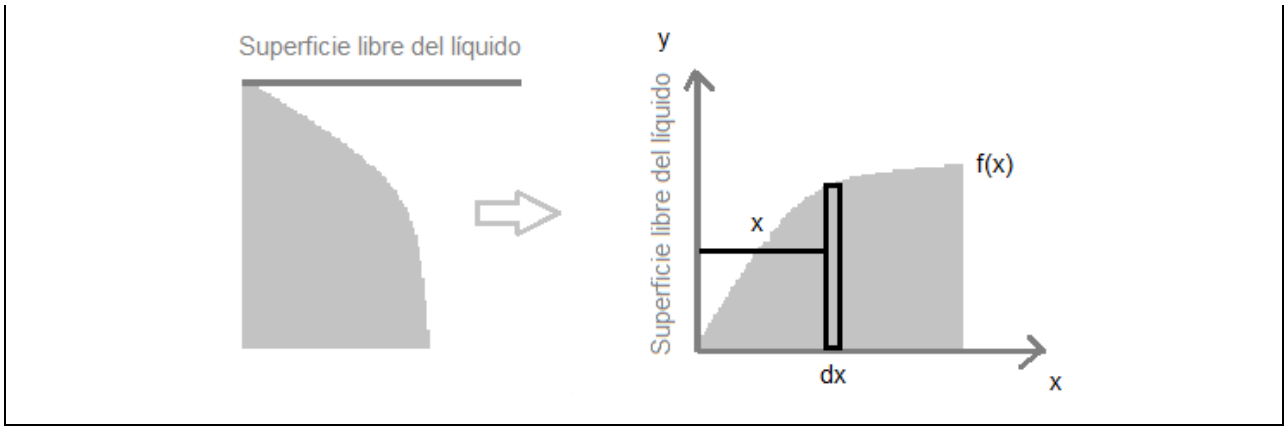
$$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

23) Halla el volumen del sólido generado al hacer girar el triángulo equilátero de vértices $(0;0)$, $(a;0)$ y $\left(\frac{1}{2}a;\frac{1}{2}\sqrt{3}a\right)$ alrededor del eje x.

24) Hala el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región comprendida entre $y=x^2$ y $y=2x$ alrededor del eje x.

La **presión de un líquido** sobre una superficie vertical sumergida, limitada por una función f(x), el eje de las abscisas y las dos rectas *x=a* y *x=b,* viene dada por la fórmula:

$$\text{Presión del líquido}=W\int_a^b xf(x)dx$$



25) Una cañería circular de 2 [m] de diámetro está medio lleno de agua. Hallar la presión sobre la compuerta que cierra la cañería, sabiendo que el gramo es el peso de 1 [cm^3] de agua.

26) Un tanque cilíndrico, horizontal, de 3 [m] de diámetro, está medio lleno de petróleo cuyo peso es de 800 [kg] por m^3. Calcular la presión sobre un extremo.

ESTADÍSTICA

En días de elecciones se realizan relevamientos para pronosticar sus resultados; en supermercados se consulta a los consumidores para obtener información sobre preferencia en los productos; economistas observan variables en un periodo de tiempo para poder predecir lo que sucederá en el futuro; en procesos de producción se analizan datos convenientemente recogidos y analizados para realizar ajustes.

En todas estas situaciones se utilizan conceptos estadísticos, los cuales desempeñan un importante papel para alcanzar la meta de cada una de estas situaciones prácticas. A lo largo de este capítulo se presentan conceptos básicos de esta ciencia.

SITUACIÓN

El taller AHS el año pasado innovó en la fabricación de cierta pieza de motor. En el presente desea analizar si realmente la pieza respondió a las expectativas, para ello recaba datos sobre: los clientes que compraron las partidas de piezas, la calificación acerca de la mejora en la calidad de la misma, la cantidad de piezas defectuosas por partida y el calor transferido por unidad de tiempo a través de un material aislante.

La estadística se ocupa de la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos con el fin de extraer conclusiones o de hacer predicciones respecto de ciertos fenómenos en escenarios de incertidumbre. Puede ser descriptiva o inferencial. La **estadística descriptiva** utiliza técnicas que sirven para organizar y resumir conjuntos de datos.

En un análisis estadístico simple, lo que se persigue es extraer conclusiones acerca del comportamiento de una cierta **variable estadística.** Su definición debe contener la característica que se desea estudiar en un tiempo y espacio determinado.

EJEMPLOS

Respecto a la situación inicial,

"V_1": Nombre de clientes que compraron una partida de piezas en el taller AHS durante el año pasado.

"V_2": Calificación, acerca de la mejora en la calidad de una pieza, producida en el taller AHS el año pasado.

"V_3":……

"V_4":……

- ✰ *La **unidad experimental** es la portadora de la medida de la variable. En V_1 la unidad experimental es cada partida de piezas, en V_2 cada pieza lo es.*
  *Al conjunto de todos los valores posibles (repetidos o no) de la variable bajo estudio se lo denomina **población estadística,** lo que significa que por cada variable definida habrá una población estadística asociada.*

P_{v1}: Registro de todos los nombres de clientes que compraron una partida de piezas en el taller AHS el año pasado.

P_{v2}: Calificaciones, acerca de la mejora en la calidad de todas las piezas, producidas en el taller AHS el año pasado.

P_{v3}:……

P_{v4}:……

AHS fabricó 50 partidas de 10 piezas cada una, lo que hace que la cantidad de datos definidos por las variables V_2 y V_4 sea N=500 y para las variables V_1 y V_3 sea N =50.

Como los costos y el tiempo serían demasiados para recabar todos los datos, pese a que algunos son más fáciles de determinar que otros (un ejemplo de lo primero sería V_1 y de lo segundo V_3), se puede analizar una muestra de la población.

- ☆ *Una **muestra** es un subconjunto de la población. Cuando la población es muy grande o no es posible relevar todos datos por diferentes causas, para un correcto estudio, se toma una muestra que sea **representativa** de ella.*

En la situación que se está analizando, no sería representativo que las piezas muestreadas sean de una sola partida. ¿Por qué?

……
……

PRESENTACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE DATOS

Las variables bajo estudio se clasifican en **cualitativas** y **cuantitativas.** Las primeras son aquellas que expresan una cualidad o atributo, por ejemplo V_1. Las segundas, en cambio, son variables que se pueden expresar numéricamente, por ejemplo V_3. V_2 en cambio, se puede trabajar de ambas maneras dependiendo cómo se clasifique la pieza (a partir de una escala cualitativa (No satisfactoria, satisfactoria, excelente o a partir de una puntuación del 1 al 10)

En el siguiente link:

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1t4V1U-mIdP6UtiCJST92mOrNqk4sNgZG/edit?usp=sharing&ouid=111805519121812118414&rtpof=true&sd=true

se encuentra la bases de datos del estudio. Donde los valores de V_1 y V_3 son poblacionales y los datos de V_2 y V_4 fueron recabados de una muestra aleatoria de una pieza por partida.

Los resultados así presentados no brindan demasiada información.

Para organizarlos y poder extraer conclusiones se realizan **tablas de distribución de frecuencias** y **gráficos,** dependiendo la naturaleza de los datos (cualitativos o cuantitativos).

- ☆ La **frecuencia absoluta** es el número de veces que se repite un atributo o valor de la variable. Muchas veces es importante además de saber la frecuencia absoluta de dicho valor o categoría, saber el **porcentaje** con que éste ocurre (**frecuencia relativa porcentual**), en particular si se están comparando dos muestras de diferentes tamaños.

Nota: Cuando se presentan tablas de distribución de frecuencias y gráficos siempre se debe colocar el **Título** referido a la variable bajo estudio y la **Fuente** referido a la procedencia de los datos.

- ☆ Los gráficos básicos de distribución de frecuencias para variables cualitativas son el de **sectores** o **barras**, para variables cuantitativas (dependiendo la cantidad de datos repetidos) y si se la trabaja dato a dato el gráfico es de **bastones** y si se la trabaja en intervalos el gráfico es un **histograma**.

Realiza tablas de distribución de frecuencia y gráficos adecuados, explorando los comandos de un software estadístico. Posteriormente realiza un breve informe.

ALGUNAS MEDIDAS ESTADÍSTICAS

Dependiendo el tipo de variable que se está estudiando (cualitativa o cuantitativa) existen medidas estadísticas que aportan mayor información, a lo que se obtiene a partir de la observación de los gráficos y tablas.

Medidas de tendencia central

- ☆ La **moda (Mo)** es la categoría o valor de la variable que se presenta con mayor frecuencia en el lote de datos.
  La **mediana (Me)** es el dato que ocupa la posición central, cuando el lote esta ordenado en forma creciente o decreciente.
  La **media aritmética** es el cociente entre la suma de todos los valores de la variable observados y la cantidad de observaciones. Si se trata de una muestra simbolizamos **media aritmética muestral ($\overline{X}$)** o si se trata de una población simbolizamos **media aritmética poblacional (μ)**.

Nota: En un lote pueden presentarse 1, 2 o más modas. La mediana sólo puede calcularse cuando los datos permiten un ordenamiento. La media aritmética sólo puede calcularse cuando la variable es cuantitativa.

Con el software y la base de datos:

a) Calcula las medidas de tendencia central de la base de datos, si la naturaleza de la variable lo permite.
b) Compara entre las medidas, analiza las diferencias que se presentan entre ellas y escoge la que elegirías para que represente el lote de datos.

Medidas de variabilidad para variables cuantitativas

☆ El **recorrido (Re)** es la diferencia entre el valor máximo y mínimo del lote de datos.

La **desviación estándar** mide la dispersión de los datos en relación a la **media aritmética** a partir de la fórmula: $S=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}}$ donde x_i es cada valor del lote de datos.

Si se trata de una población simbolizamos $\sigma=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{N}}$.

El **coeficiente de variación** es una medida de dispersión que brinda información sobre el porcentaje de variación de los datos respecto a la media.

$$CV=\frac{S}{\overline{x}}\cdot 100$$

Con el software y la base de datos:

a) Calcula las medidas de dispersión de la base de datos, si la naturaleza de la variable lo permite.
b) Compara entre las medidas, analiza las diferencias que se presentan entre ellas y escoge la que elegirías para que represente el lote de datos.

Regla de Bienaymé Chebyshev

A través de esta regla se puede visualizar cómo la desviación estándar es un indicador de la distribución de frecuencias de una variable.

- ☆ El porcentaje de datos que están contenidas dentro de las distancias de k desviaciones estándar alrededor de la media es de al menos $\left(1-\frac{1}{k^2}\right).100\%$, $k \in R^+$.

Determina el porcentaje de piezas de la muestra que tienen un calor transferido por unidad de tiempo a través de un material aislante, comprendido entre dos desviaciones estándar alrededor de la media,

a) Contabilizando.
b) Utilizando la regla de Bienaymé Chebyshev.
c) Compara los resultados obtenidos en a) y b).
d) ¿Qué puedes concluir acerca de la relación entre la desviación estándar y la acumulación de datos alrededor de la media aritmética?

TABLA DE FÓRMULAS

Razones y funciones trigonométricas

Relación pitagórica entre razones trigonométricas de un mismo ángulo

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Valores exactos de las funciones trigonométricas de algunos ángulos

x°	0	30	45	60	90	180	270
x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$
sen(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Funciones trigonométricas de la suma y resta de dos ángulos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Funciones trigonométricas para el doble de un ángulo

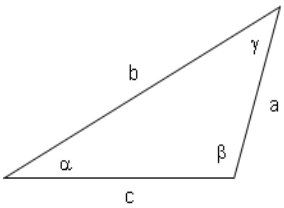
$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Teorema del Seno

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$



Teorema del Coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$$

Algunas reglas de derivación

Reglas de Derivada

y = f(x)	***dy/dx = y´ = f´(x)***
x^n	$n\ x^{n-1}$
$f(x) = k\ g(x) \quad k \in R$	$k\ g'(x)$
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$g'(x) \pm h'(x)$
$f(x) = g(x).\ h(x)$	$g'(x).\ h(x) + g(x).\ h'(x)$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x).\,h(x) - g(x).\,h'(x)}{[h(x)]^2}$
$f(x) = sen\ x$	$cos\ x$
$f(x) = cos\ x$	$-\ sen\ x$
$f(x) = tg\ x$	$sec^2\ x$
$f(x) = a^x$	$a^x\ ln\ a$
$f(x) = log_a x$	$\frac{1}{x.\ln a}$

Algunas reglas de integración

Aclaración: $c \in R$ *y es la constante de integración.*

$\int a dx = ax + c, \quad a \in R$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \in Q \wedge n \neq -1$
$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + c;$
$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c, \quad b > 0 \wedge b \neq 1$
$\int sen(x) dx = -\cos(x) + c$	$\int \cos(x) dx = sen(x) + c$
$\int tg(x) dx = -ln\lvert \cos(x) \rvert + c$	$\int sen^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4} + c$
$\int \ln(x) dx = x.\ln(x) - \mathrm{x} + c$	

RESPUESTAS NUMÉRICAS A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Optimización de una función

2) a) Máximo 1,067; mínimo -9,13 b) Máximo 332/27; mínimo 12

3) a) En t = 1 $[h]$ a 272 $[km/h]$ b) Desde 1 $[h]$ hasta las 2 $[h]$

4) a = $\sqrt{\frac{100}{3}}[´´]$ y h = $\sqrt{\frac{200}{3}}[´´]$ 5) 3 $[m]$x3 $[m]$x1 $[m]$

6) a) 4,123 $[s]$ b)1,02 $[m/s]$ c) De 0 $[s]$ a 1,21 $[s]$ y de 4,12 $[s]$en adelante.

7)10 $[h]$ 8) a) 1 año

9) a) Para una velocidad de 60 $[km/h]$ b) $120.000

con un gasto de $120.

12) b= $2\sqrt{12}[u]$ h = 2$[u]$

Derivación de una función compuesta

2) 540π [cm^3/s] 3) a) A = 17 k ≃0,03 b) dT/dt ≃ 0,51e$^{-0,03t}$

4) 5,39 [h] 5) b) t = π/2ω [s]

6) a) I(t) = $\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ b) 6,62 [μW]

7) Es máxima para R = r, y su valor máximo es $\frac{E^2}{4r}$ [W]

8) 4 $[km]$ 9) 0,24 [ppm/años]

10) 1,6 [cm/min] 11) $\theta = \pi/4$ [rad]

12) 6 [cm] a los 0,115 [s] 13) 3,1416 [m^3/min]

14) Aproximadamente a 2,65 [m] de la lámpara de menor intensidad.

15) L = C

16) a) V(r) = $9{,}109.5.10^{-10}.\left(\frac{1}{r}+\frac{5}{5-r}\right)$ donde r es la distancia a Q_1

b) 1,54 $[m]$

Derivación en forma implícita

4)1 $[\Omega/s]$

5) $6{,}875.10^{-3}$ $[\Omega/s]$

6) -1,44 $[cm^3/s]$

7) 350 $[j/s]$

8) 192,31 $[m/h]$

9) $r' \simeq -1{,}73[ft/s]$

Diferencial de una función

1)a) Δy = 0,3365 *dy*= 0,4

b) Δy = 1,4351 *dy*= 3,2

2) -52,2 $[mA]$

3) dA = 0,192 [cm^2] dV = 0,192 [cm^3]

4) $\left|\frac{dD}{D}\right| < 0{,}015$

5) dt= 0,0015 [s]

8) -40 $[\mu j]$

9) 4,43 $[cm^3]$

10) 0,28 $[m/s]$

Integral Indefinida

4) 2.360 [cm^3]

5) -2,78 $\left[m/s^2\right]$

6) 400 [s]

7) 6,06 $\left[\min\right]$

8) 180 [m^3]

9) 400 [m]

Integral definida

1) $A \approx 6,32\ [u^2]$

2) $A = 2,\widehat{6}\ [u^2]$

3) a = 6

4) a) $A = 0,5\ [u^2]$

b) $A = \pi\ [u^2]$

c) $A = 21,6\ [u^2]$

d) $A = 8,66\ [u^2]$

e) $A = 2\pi\ [u^2]$

f) $A = 0,\widehat{6}\ [u^2]$

6) 16,5

7) 4625 [L]

8) 256 [m^3]

9) Aprox. 463 [h]

10) 180 [J]

11) 0,667 [J]

12) $\bar{i} = 0,\ i_{ef} = I$ siendo *I* la amplitud máxima.

13) $i_{ef} = 6,\widehat{6}$

14) $i_{ef} \approx 0,33$

15) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right)$

16) $\left(\frac{3}{10}a;\frac{3}{4}b\right)$

18) $\mathrm{I}_{xG} = \frac{1}{12}bh^3$

20) 2,13 [u]

21) Aprox. 230 [m]

22) Aprox. 363 [m]

23) $\frac{\pi}{2}a^2\ [u^3]$

24) $\frac{64}{15}\pi\ [u^3]$

25) 666,7 [Kg]

26) 1800 [Kg]