LAS TRIBULACIONES QUE GENERAN LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN NUESTROS ALUMNOS Y EN NOSOTROS, LOS DOCENTES.

Carina Maumary (carimaumary@hotmail.com) María Eugenia Maumary (eugemaumary@gmail.com) Escuela Industrial Superior Anexa a la Facultad de Ingeniería Química

Resumen
El siguiente trabajo aborda las inquietudes que genera el concepto de Número Complejo en nuestros alumnos y en nosotros, los docentes, desde la relación que existe entre redactar nuestros soportes didácticos, cómo se implementan las actividades en el aula, cómo entienden o aprenden los alumnos el concepto desde nuestra propuesta, cómo lo enriquecen los estudiantes con sus inquietudes y el rol docente para mediar entre el "saber sabio", el “saber enseñado” y el aprendizaje del mismo. Esto implica tener en cuenta una mirada epistemológica, didáctica y cognitiva, sabiendo que todo esto ocurre en un lugar y momento dado.
Se expone, en una primera etapa, desde qué paradigma de enseñanza diseñamos nuestro material para trabajar en clase, luego las decisiones pedagógicas que fueron tomadas y las dudas que generó en algunos alumnos la puesta en práctica de dicho material.
También se muestra el material analizado durante la investigación del tema y una encuesta realizada a un grupo de alumnos para recabar información acerca de la comprensión del contenido con el objetivo principal de mejorar nuestras prácticas docentes y en consecuencia, la educación brindada a nuestros alumnos.

¿Por qué tribulaciones en el título?

Mientras escribíamos esta comunicación dudábamos mucho acerca del título hasta que encontramos, buscando material para trabajar transversalmente con Lengua, el libro "Las tribulaciones del estudiante Törless" de Robert Musil; el siguiente texto es extraído de ahí:

- *No será tan terrible como tú dices. Yo nunca dudé de que las matemáticas estaban en lo cierto (en última instancia, los resultados así lo demuestran); pero, claro está, me parece extraño que este fenómeno se oponga al entendimiento; y, después de todo, bien pudiera ser que se opusiera sólo aparentemente.*

- *Pues bien, tú puedes esperar esos diez años y entonces tal vez su entendimiento esté listo, preparado… yo también estuve reflexionando desde la última vez que hablamos de esto, y estoy firmemente convencido de que aquí hay gato encerrado. Por lo demás, antes no hablabas de la misma manera que hoy lo haces.*

- *Oh, no, también estoy preocupado; solo que no quiero exagerar como tú. Lo encuentro extraño, eso es todo. El pensamiento de los números irracionales, los números imaginarios, de líneas paralelas que se cortan en el infinito (es decir, en alguna parte, entonces), me desconcierta. Cuando pienso en estas cosas quedo aturdido, como si recibiera un golpe en la cabeza.*

Lo anterior es solo una parte del dialogo entre dos estudiantes.

Generalmente a los alumnos, antes de comenzar con el tema Números Complejos, les asusta o preocupa de qué trata o para qué sirven esos números con nombre extraño. Saben que varias ecuaciones resueltas con anterioridad no tienen solución en el conjunto de los números reales, y la docente se encarga de remarcar que "No tienen solución en Reales" y les habla de unos números imaginarios, pero que más adelante van a desarrollar el tema. Al trabajar con las operaciones, algunos de los alumnos dicen: "¡es una pavada!"; otros cometen errores porque, creemos, que no asimilan que están trabajando con una estructura numérica nueva; mientras que otros se quedan todavía pensando en su definición y es algo que les inquieta.

Pero comencemos por el principio. ¿Cómo nace la idea del presente trabajo?

Al comenzar a escribir nuestros soportes didácticos para tercer año de la Escuela Industrial Superior, hace ya varios años, implicó revisar nuestras prácticas docentes y ser cuidadosas en que, lo que escribamos no tenga errores conceptuales o genere conceptos erróneos en nuestros alumnos. Es decir, ser cuidadosas con la transposición didáctica y la vigilancia epistemológica[1].

¿Qué voy a enseñar?

Eje Conjuntos Numéricos. Unidad Temática 6
Números complejos. Forma binómica, polar y trigonométrica. Operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Propiedades.
(Cada contenido de esta unidad que lo permite, se trabaja en forma transversal con el Eje Álgebra).

Esta unidad temática pertenece al programa de Matemática III de la Escuela Industrial Superior.

¿Para qué voy a enseñar esto?

Dicho tema es importante, por un lado, para dar cierre a una de las operaciones matemáticas que hasta aquí generaban problemas: calcular la raíz de índice par de números negativos y por ende resolver ecuaciones que hasta el momento no tenían solución en el conjunto de los números reales. Por otro lado, en las escuelas técnicas que tienen la especialidad mecánica eléctrica es un tema necesario en algunas materias específicas como electrotecnia.

¿Cómo lo voy a enseñar?

Estamos convencidas de que la enseñanza de la matemática exige un abordaje transdisciplinario que requiere de mentes creativas, abiertas y capaces de resolver situaciones problemáticas específicas desde muchas perspectivas. Esto indica que el docente debe diseñar estrategias de enseñanza basadas en una concepción cognitiva del aprendizaje, favoreciendo el tratamiento de los contenidos disciplinares “desde una perspectiva de clase reflexiva”[2], en la cual el joven pueda poner en juego sus propias capacidades y posibilidades para participar activamente del proceso y construir el conocimiento.
Para esto tenemos en cuenta las estrategias de enseñanza contextual, (Crawford-2004) las cuales ayudan a los estudiantes a construir, elaborar y usar conocimientos

[1] Chevallar Ives – La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado – Aique - 1998
[2] Litwin.E. (2000) “Las configuraciones didácticas”. Editorial Paidós. Buenos Aires. Pág. 15.

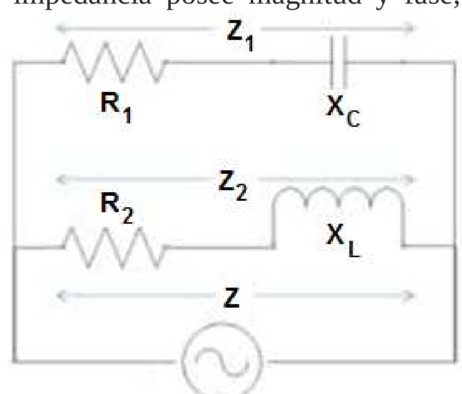
en matemáticas y otras ciencias. Antes de avanzar, nombremos algunas palabras que las identifican:

- ✓ *Relación: Consiste en aprender en el contexto de las experiencias de la vida o conocimiento preexistente.*
- ✓ *Experimentación: Consiste en aprender en el contexto de exploración, descubrimiento e invención. Concretamente es aprender haciendo.*
- ✓ *Aplicación: Consiste en aprender conceptos en el contexto de su puesta en práctica.*
- ✓ *Cooperación: Consiste en aprender en el contexto de compartir e interactuar.*
- ✓ *Transferencia: Consiste en aprender en el contexto de la aplicación del conocimiento en nuevos contextos o en nuevas situaciones (no abordadas en clases).*[3]

Quisimos comenzar el tema desde la *Experimentación, Aplicación y Transferencia* (como se hizo con otros temas de la planificación) teniendo en cuenta la necesidad del concepto (y operaciones con números complejos) en asignaturas de la especialidad mecánica eléctrica de la escuela; pero nos resultó difícil debido a que había conceptos que los estudiantes aún no trabajaban y también para el equipo involucrarse con contenidos de otra materia; esto se lo dejó para ver las aplicaciones de las operaciones. A continuación se muestra la actividad:

APLICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS A LA ELECTRICIDAD (I)

La **impedancia** (Z) es la medida de oposición que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica un voltaje. La impedancia posee magnitud y fase, a diferencia de la resistencia, que sólo tiene magnitud.



La razón entre el voltaje (V) y la corriente (I) se define como Impedancia: $Z = \dfrac{V}{I}$.

La impedancia puede representarse como la suma de una parte real y una parte imaginaria, $Z = R \pm j.X$ donde R es la resistencia y X es la reactancia.

Básicamente hay dos clases o tipos de reactancias:

- Reactancia inductiva o X_L, debida a la existencia de inductores.
- Reactancia capacitiva o X_C, debida a la existencia de capacitores.

La magnitud de la impedancia viene dada por la fórmula: $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$

☑ Ejemplo**:**

Para el circuito en paralelo mostrado en la figura, se sabe que $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $X_C = 4\Omega$, $X_L = 2\Omega$.

---

[3] CRAWFORD, M. (2004). *Enseñanza Contextual. Investigación, Fundamentos y Técnicas para Mejorar la Motivación y el Logro de los Estudiantes en Matemática y Ciencias*. CORD. Disponible en: http://www.cord.org/uploadedfiles/Teaching%20Contextually%20Spanish.pdf

Por lo que:

$$Z_1 = R_1 - X_C\, i = 2 - 4i;$$
$$Z_2 = R_2 + X_L\, i = 6 + 2i.$$

Puesto que los circuitos están en paralelo, tenemos:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

a) Expresa Z en función de las otras variables, Z = ...

b) Obtiene la magnitud de la impedancia.

Nos resulta interesante aún poder comenzar el tema teniendo en cuenta esta actividad; pero ameritaría un importante trabajo de coordinación con asignaturas de otros niveles y quizás modificar los programas de estudio. Nos preguntamos si sería adecuado desarrollar el tema en cuarto año y con más profundidad en la especialidad Mecánica Eléctrica. Si no, merecería mucha investigación por parte de los alumnos, lo que sería ideal para que la enseñanza sea acorde al proceso de producción científica.

Por ahora, al resolver la actividad con los alumnos nos limitamos a hacerles notar que en este caso los números complejos representan mejor la situación dada su representación gráfica por medio de vectores y la posibilidad de expresarlos en forma binómica o polar.

Se muestra a continuación otra actividad del material que trabajamos:

APLICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS A LA ELECTRICIDAD (II)

En Electrotecnia, a las magnitudes vectoriales las representamos mediante números complejos.

Recuerda, la impedancia Z se la representa así: $Z = R \pm j\, X$

Donde j es el equivalente al versor i, que no se utiliza en Electrotecnia para no confundirlo con el símbolo de intensidad de corriente (i).

a) Dada una tensión $V = 220V_{0^\circ}$ y una intensidad de corriente $I = 2\ A_{-33^\circ}$, calcular la impedancia Z.

$$Z = \frac{V}{I} \quad por\ lo\ que \quad Z = \frac{220V_{0^\circ}}{2A_{-33^\circ}} = 110\Omega_{33^\circ}$$

b) de la impedancia obtenida en a) calcular los valores de resistencia R y de reactancia X_L.

Para resolver este problema se pueden utilizar las relaciones trigonométricas o la transformación de forma polar a rectangular que la mayoría de las calculadoras tiene incorporada.

$X_L = Zsen\alpha \qquad R = Z\cos\alpha$

$R = 110\Omega\ \cos 33^\circ = 92{,}25\Omega$

$X_l = 110\Omega sen 33^\circ = 0{,}54\Omega$

Por lo mencionado anteriormente, se decidió seguir trabajándolo desde la Relación con conocimiento preexistente. Esto significa retomar el origen del concepto desde la historia de la matemática y su relación con el álgebra, específicamente con las ecuaciones.

Al llegar a la definición de número complejo, naturalmente surge la vinculación con los reales. Esa fue nuestra primera tribulación:

¿Vamos a considerar a los números reales **incluidos** en los complejos? ¿Cómo se da dicha inclusión?

Es en estos momentos cuando el docente debe ejercer su vigilancia epistemológica, esto es "...recapacitar, tomar distancia, dudar sistemáticamente si el objeto enseñado es el objeto a enseñar que se proponía, cuidar que no haya una sustitución «patológica» de uno por otro, o sea que el objeto transformado no pierda la esencia del saber sabio. El saber enseñado debe guardar una distancia correcta entre el saber sabio y el saber banalizado" (Chevallar, 1998)

Una de nuestras dudas fue, por ejemplo, ¿el número 2 real es el mismo número 2 complejo?

Teniendo en cuenta esto nos dispusimos a revisar diversos materiales, libros de textos de secundaria y otros de nivel superior, comunicaciones e investigaciones, etc.

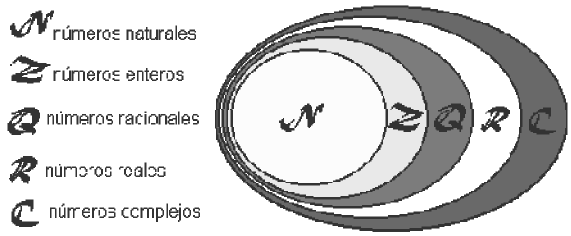
En todos los libros analizados de escuela secundaria, a saber:

- De Guzmán Miguel (1991) – Matemáticas Bachillerato 3 – Anaya
- De Simone (1992) – Matemática 4 – AZ
- Santaló Luis (1995) – Matemática 3 Iniciación a la creatividad – Kapeluz
- Kaczor Pablo (2001) – Matemática 1 – Santillana
- Altman Silvia (2001) – Números y sucesiones – Longseller
- Abdala Carlos (2003) – Carpeta de Matemática Cuadernillo 1 – Aique
- Itzcovich Horacio (2006) – M2 matemática – Tinta Fresca
- Chorny Fernando (2010) – Matemática 4 – Estrada
- Roxana Abálsamo (2015) – Matemática 5 – Puerto de Palos,

se considera la inclusión de conjuntos numéricos. Otros libros analizados fueron los siguientes:

- Rey Pastor (1963) – Análisis Matemático – Kapelusz
- Solber y Lerner (1996) – Álgebra – Prentice Hall Hispanoamericana
- Fernández Elena (2006) – Matemática para el Ingreso – U.N.L.
- Stewart (2007) – Precálculo – Matemáticas para el cálculo – Thomson

Solo en el primero de éstos últimos y en algunas investigaciones encontradas en la web se vincula al conjunto de números reales y al de los números complejos mediante un isomorfismo. Esto nos pareció más adecuado, por lo que en primera instancia decidimos no colocar en nuestro material la representación de inclusión de conjuntos numéricos mediante diagramas de Venn.



Esta determinación se tomó también en los niveles anteriores, debido a que apreciamos que no interferiría en la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos numéricos. Cabe aclarar que no le hablamos a los chicos de isomorfismo, si no que mencionamos que puede establecerse una relación entre un conjunto y otro.

En cuanto a esto, Godino menciona que "*una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de expresión y representación, además del lenguaje natural: variados sistemas de escritura para los números, escrituras algebraicas para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. Duval (1995) se ha interesado particularmente por este uso variado de los sistemas de representación semiótica y se pregunta: "¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, o al contrario no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?" (p. 3)*".

Pero estas decisiones no terminaron de calmar nuestras inquietudes ni la de los alumnos. Cabe aclarar que las mismas fueron quedando relegadas al priorizar otras actividades y también, debido a la movilidad docente, el grupo de investigación fue desarmándose y rearmándose. A la vez la enseñanza del tema no traía inconvenientes, al no hablar de la inclusión los alumnos no preguntaban, ni tampoco les hacía ruido. Pero hay alumnos que al tener motivaciones particulares siguen investigando en sus hogares sobre el tema y dada la fluidez con la cual se presenta la información en la web tienen acceso a materiales escritos y audiovisuales extras a la que se brinda en la clase.

Las turbulencias volvieron a surgir al resolver ecuaciones polinómicas de grado 3, con coeficientes reales. A continuación se muestra la actividad:

Resuelve las siguientes ecuaciones en C[4]:

a) $x^2 - 7x + 13 = 0$ b) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Con la ecuación del ítem a) no surge problema. Tiene grado dos entonces tiene dos raíces, las cuales son complejas: $x_1 = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_2 = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Es coherente que no surja problemas dado que la introducción del tema se hace desde la resolución de ecuaciones como lo hicieron a lo largo de la historia matemáticos como Tartaglia, Ferrari y Cardano.

[4] Cabe aclarar que al llegar a esta actividad los alumnos ya saben factorizar polinomios, que la cantidad de raíces depende del grado del polinomio, conocen la resolvente, etc.

Con la del ítem b), obtienen tres raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = i$ y $x_3 = -i$ y para un alumno el problema surgió al dar la respuesta. Parafraseando su razonamiento:

¿Es $x_1 = -1$ *una solución compleja? Si fuese así, ¿debería tener su conjugada como solución? Con lo cual ¿tendríamos 4 raíces? y ¿esto no contradice el hecho de que tenga tres raíces como indica el grado del polinomio? Por lo tanto* $x_1 = -1$ *no es una solución compleja.*

Consideramos que el problema radica en no haber consolidado la idea de que el complejo conjugado de un número complejo real es sí mismo. Y a esto se le suma la tradición de resolver más ecuaciones cuadráticas que de otro grado, y la idea de que siempre aparecen de a pares las soluciones complejas cuando en el ejemplo aparecen tres soluciones complejas.
Con esto, otra vez, se abrió el debate si el "-1" es real o complejo real. Consideramos que el inconveniente radica en la comprensión del objeto matemático "-1".

De las lecturas realizadas nos pareció importante considerar lo que Godino y D´Amore escriben acerca de los objetos matemáticos: *"Los objetos matemáticos son, por tanto, símbolos de unidades culturales que emergen de los sistemas de usos que caracterizan a la pragmática humana (o, al menos, a grupos homogéneos de individuos), y se modifican continuamente en el tiempo, según las necesidades. De hecho, los objetos matemáticos y su significado dependen no sólo de los problemas que se afrontan en la matemática, sino también de los procesos de su resolución; en suma, dependen de la práctica humana."* (D´amore y Godino. 2007)

Preguntas como las siguientes le hacemos a los alumnos:

- Si el -1 complejo es el -1 real entonces tiene complejo conjugado, ¿en los reales hace falta definir conjugado?
- A los reales los representamos en la recta numérica, ¿qué representación proponen Uds. para los complejos?
- Los reales sabemos que es un conjunto ordenado, ¿los complejos también?, ¿cómo lo ordenarían?

La idea es que investiguen para que puedan comprender el carácter colectivo del desarrollo científico, especialmente en matemática.

¿Cómo lo aprenden nuestros alumnos?

Para analizar la compresión que tienen nuestros alumnos sobre el tema se llevó a cabo una breve encuesta que se muestra a continuación:

1. Selecciona la/s respuestas correctas;

a. (2 + 3i) – (-5 + 7i) =

i) 5i – 2i = 3i   ii) 7 – 4i   iii) Ninguna de las anteriores

b. (2 + 3i).(-5 + 7i) =

i) -31 - i ii) -10 + 21i iii) Ninguna de las anteriores

c. (2 + 3i)/(-5 +7i) =

i) -2/5 + 3i/7 ii) 11/74 - 29i/74 iii) Ninguna de las anteriores

d. El conjugado de 2 – 3i es:

i) 2 + 3i ii) -2 -3i iii) -2 + 3i iv) Ninguna de las anteriores

2. ¿Qué es un número complejo?

3. ¿Para qué sirven los números complejos?

Sobre 24 encuestas se obtuvieron los siguientes resultados:

1a) Respondieron bien: 22

b) Respondieron bien: 18
Errores detectados:
3i.7i = 21i
multiplicar real con real e imaginario con imaginario

c) Respondieron bien: 10
Errores detectados: dividen real con real e imaginario con imaginario

d) Respondieron bien: 22
Errores detectados: confunden con opuesto.

2) Respondieron bien: 7
De los demás, exponemos algunas de las respuestas que nos llaman la atención:

- Es un binomio donde un término esta el número i(-$\sqrt{1}$)
- Es una expresión con el i = $\sqrt{-1}$
- Es la raíz de un número negativo
- Es una operación con número imaginario.
- Es un número imaginario.
- Forman un conjunto numérico como los naturales y reales

3) 6 alumnos hicieron referencia a que sirven para la impedancia, algo eléctrico o para mecánica.
4 alumnos lo relacionaron con la resolución de operaciones que no pueden resolverse en reales.
1 alumno dice que sirve para resolver raíces de números negativos.
5 alumnos mencionan que sirven para realizar operaciones con raíces negativas.
5 no saben
3 dicen que para nada.

Podemos concluir que la mayoría de los alumnos que participaron del sondeo no tuvieron problemas en realizar la suma, la multiplicación y en reconocer el conjugado; pero casi el 60% no realizaron correctamente la división, algunos dividieron la parte real con la parte real y la parte imaginaria con su correspondiente el cual, en nuestra experiencia, es un error frecuente en los estudiantes al evaluar el tema.

También observamos que a pesar de que realizar operaciones correctamente no pueden definir qué es un número complejo, es decir que no asimilaron el concepto del objeto matemático con el cual están operando.

Con respecto a esto, una investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de los números complejos realizada por Tomás Pardo Salcedo y Bernardo Gómez Alfonso tiene como hipótesis la siguiente:
"Es posible que algunas dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas en relación con los complejos, a las que se han enfrentado los matemáticos a lo largo de la historia, guarden paralelismo con las que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en esta materia."

Teniendo en cuenta lo analizado y los resultados de la encuesta nos preguntamos ahora, si el surgimiento de errores en las operaciones, el no poder incorporar la definición del número complejo e interpretarlo como una adición de dos objetos disociados y no pensarlo como un solo objeto matemático es consecuencia de no trabajar en paralelo todas las operaciones con su representación gráfica (las únicas que se ven son las de la suma y la resta). ¿Quizás trabajar la multiplicación y división solo analíticamente, hace que los alumnos lo asemejen más a las operaciones con polinomios? Lo obtenido en el sondeo hace replantearnos dicha encuesta, mejorarla y volverla a realizar.

Estas inquietudes hacen que sigamos investigando sobre el tema para mejorar la enseñanza y aprendizaje del mismo.

Bibliografía

- Godino Juan y Otros (2006) Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Relime vol. 9, N° 1 pp 117 - 150

- Chevallar Ives (1998) La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado –Aique - 1998

- Litwin.E. (2000) “Las configuraciones didácticas”. Editorial Paidós. Buenos Aires. Pág. 15.

- Crawford, M. (2004). Enseñanza Contextual. Investigación, Fundamentos y Técnicas para Mejorar la Motivación y el Logro de los Estudiantes en Matemática y Ciencias. CORD. Disponible en:
http://www.cord.org/uploadedfiles/Teaching%20Contextually%20Spanish.pdf

- Domínguez, A. (1983). "Breve introducción a los números complejos y sus aplicaciones a la electricidad" Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica

(CONALEP), Plantel “el sol” Nezahualcóyotl, Estado de México, México. Disponible en:
http://es.slideshare.net/Alexdfar/aplicaciones-de-los-nmeros-complejos

- Pardo, T. (2004). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. Memoria de investigación. Departamento de Didáctica las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia. Disponible en:
http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2728899.pdf

- Musil R. (2002) Las tribulaciones del estudiante Törless. Seix Barral