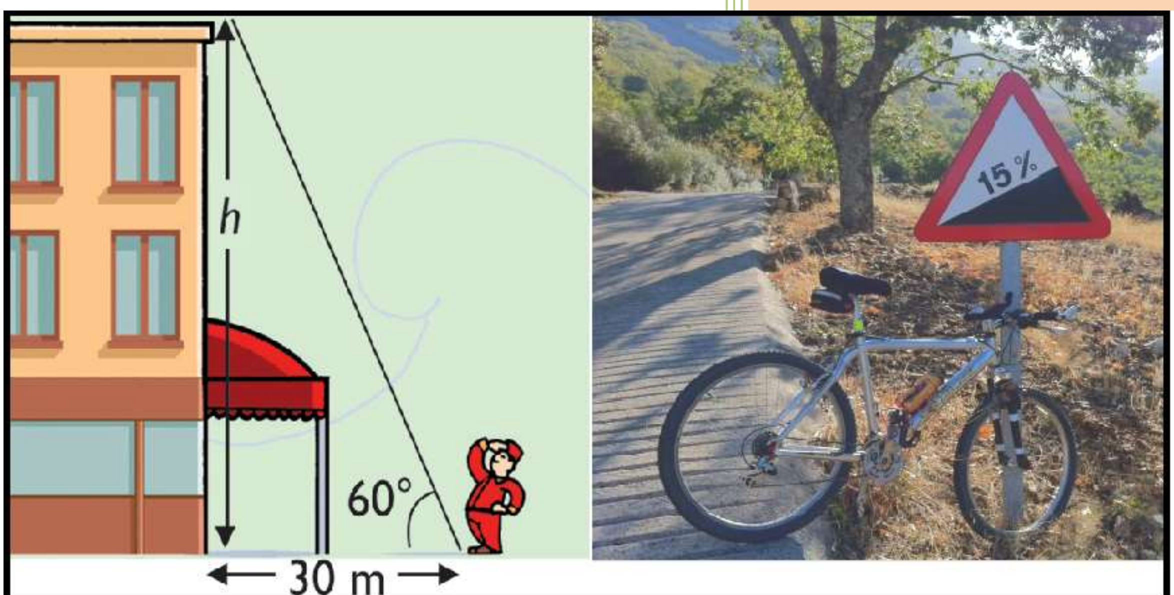
Matemática - 2do año



$$PV^3 - (Pnb + nRT)V^2 + an^2V - an^3b = 0$$

Prof. Maumary, Carina

Prof. Ruiz, María Laura

Maumary Carina
Profesora en Matemática. Título otorgado por FHUC. UNL
Especialista en Docencia Universitaria. Título otorgado por UNL
Prof. Titular en la Escuela Industrial Superior de la ciudad de Santa Fe
Prof. Titular en la E.E.T.P. N° 479 “D. M Pizarro” de la ciudad de Santa Fe.

Ruiz María Laura
Profesora en Matemática.Título otorgado por FHUC. UNL
Especialista en Docencia Universitaria. Título otorgado por UNL.
Prof. Titular en la Escuela Industrial Superior de la ciudad de Santa Fe

Maumary, Carina
Matemática II / Carina Maumary ; María Laura Ruíz ; Rebeca Cardozo. - 1a ed. adaptada. - Santa Fe : Universidad Nacional del Litoral, 2016.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-692-098-8

1. Matemática. 2. Educación Secundaria. 3. Material Auxiliar para la Enseñanza . I. Ruíz, María Laura II. Cardozo, Rebeca III. Título
CDD 371.33

Este libro fue elaborado como soporte didáctico para trabajar en el aula con alumnos de segundo año. Cada unidad del mismo comienza con situaciones problemáticas donde se retoman contenidos y se generan necesidades para abordar nuevos; algunos de los aportes teóricos están pensados para que los alumnos los vayan completando con las deducciones que van obteniendo en la resolución de las situaciones planteadas.
Desde diversas actividades se intentan establecer relaciones con otras asignaturas como ser con Física y Dibujo Técnico; se producen argumentos para validar determinadas afirmaciones y se valora el lenguaje matemático para modelar situaciones de la vida cotidiana.
Se espera que el alumno pueda desarrollar sus capacidades relacionadas con el área, conozca y comprenda los conceptos matemáticos para resignificarlos en la resolución de problemas.

Las Autoras

Capítulo 1: Números Reales

(Primera parte)

No es $\mathbb{N}$ definir a lo $\mathbb{R}$ basándose en lo $\mathbb{Q}$, porque si te olvidas de lo $\mathbb{I}$ no estás mirando el mundo $\mathbb{Z}$.

Autor desconocido

- Los conjuntos numéricos N, Z y Q.
- El conjunto de los Irracionales
- El conjunto de los reales
- Intervalos en R
- Inecuaciones

En la antigüedad sólo se conocían los números naturales y fraccionarios, los primeros se utilizaron desde que el hombre tuvo la necesidad de contar y los segundos, cuando necesitó fragmentar, dividir la unidad en la que estaba trabajando para realizar mediciones o simplemente repartir sus objetos. Sin embargo, había segmentos, como la diagonal de un cuadrado de lado 1, cuya longitud no era ningún número conocido hasta el momento. Los griegos llamaron inconmensurables a estos segmentos. Y así... nacieron los números irracionales.

Revisemos las propiedades de los conjuntos numéricos: Naturales, Enteros y Racionales

Los conjuntos numéricos N, Z y Q

El siguiente cuadro, sintetiza las características esenciales de los conjuntos numéricos que ya conoces.

<table>
<tr><td colspan="2">N N N N N N N N N N N   LOS NATURALES   N N N N N N N N N N N</td></tr>
<tr><td>

☑ Para identificar este conjunto se utiliza la letra N

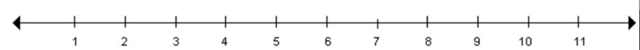
N = $\{1,2,3,4,.........\}$

☑ Es un conjunto ordenado. Esto significa que podemos establecer qué número es mayor o menor que otro. Siempre es mayor, el que se encuentra a la derecha en la recta numérica.

☑ Tiene primer elemento, el 1; pero no último.

☑ Todo número natural tiene un consecutivo. ¿Y, todos tienen un anterior?

</td><td>



☑ A todo número natural le corresponde un punto en la recta. ¿A cualquier punto de la recta le corresponde un natural?

☑ Es un conjunto discreto. Esto significa que entre dos números naturales cualesquiera existe una cantidad finita de números naturales.

🕮 **Repasa** las operaciones y sus propiedades

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z   LOS ENTEROS   Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z</td></tr>
<tr><td>

☑ Para identificar este conjunto se utiliza la letra Z

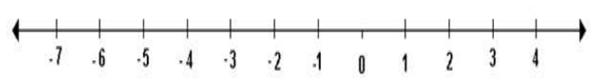
Z = $\{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$

☑ Es un conjunto ordenado. ¿Cómo se establece el orden entre los enteros?

☑ No tiene primero, ni último elemento.

☑ Cada número tiene un antecesor y un sucesor.

</td><td>



☑ A todo número entero le corresponde un punto en la recta. ¿Todo punto de la recta puede identificarse con un entero?

☑ Z es un conjunto discreto.

🕮 **Repasa** las operaciones y sus propiedades.

</td></tr>
</table>

Q Q Q Q Q Q Q Q Q Q Q Q LOS RACIONALES Q Q Q Q Q Q Q Q Q Q Q Q

☑ Los números racionales son aquellos que se pueden expresar como cociente de dos números enteros, es decir como una razón, $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$. Para identificarlos se utiliza la letra Q.

☑ Los números racionales pueden escribirse como expresiones decimales finitas o periódicas.

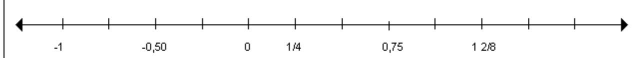
☑ Toda expresión decimal finita o periódica puede expresarse como una fracción.

☑ Tiene infinitos elementos; pero no tiene ni primero ni último.

☑ Es un conjunto denso. Esto significa que entre dos números racionales cualesquiera existen infinitos racionales. Como consecuencia: no puede hablarse de racionales consecutivos.

☑ Es un conjunto ordenado. ¿Cómo comparas dos números racionales?

☑



A todo número racional le corresponde un punto sobre la recta numérica, pero no a todo punto le corresponde un racional.

📖 **Repasa** las operaciones y sus propiedades.

ACTIVIDADES 1.1

Dedícale tiempo a las actividades propuestas; trabaja en tu carpeta y se prolijo!

1) Completa colocando <, > o =, según corresponda.

a) $\frac{2}{3}$ ……. 0,6 b) -2,6 ……. -2,5 c) $0{,}1\hat{6}$ ……. 0,16

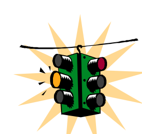
d) 3,5 ……. $3{,}4\hat{9}$ e) $-\frac{11}{9}$ ……. $-1{,}\hat{2}$ f) -0,5 ……. $-0{,}\hat{5}$

2) Resuelve las siguientes operaciones expresando el resultado como fracción irreducible.

a) $\left(0{,}1\hat{6}^{-1} - 2{,}\hat{1}\right):\left(1+\frac{4}{5}\right) =$ b) $0{,}\hat{2} - \left(-1+\frac{1}{3}\right)^{-1} =$

c) $-\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{7}\left(2-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{18}{7}\right)^{0}\right]-1 =$ d) $\sqrt[3]{1-0{,}875}-\left[-\frac{1}{5}\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right)\right]^{-1} =$

e) $(0{,}3)^{4}:(0{,}3)^{5}-\left[1{,}\hat{3}-\left(-1-\frac{1}{2}\right)\right]-0{,}\hat{9} =$



Presta atención al separar los términos.

Rtas: a) $\frac{175}{81}$ b) $\frac{31}{18}$ c) 0 d) $\frac{9}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

3) Indica cuáles de estos razonamientos son correctos y cuáles no lo son. Justifica tus respuestas.

a) $\dfrac{4+15}{3}=\dfrac{4}{3}+5=\dfrac{19}{3}$

b) $\dfrac{35+8}{7}=5+8=13$

c) $\dfrac{4\cdot 15}{3}=\dfrac{4}{3}\cdot 5=\dfrac{20}{3}$

d) $\dfrac{35\cdot 8}{7}=5\cdot 8=40$

4) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) Si sumo dos números racionales, la suma es mayor que cada sumando.
b) Si multiplico un número racional positivo por 3, el producto es mayor o igual que 3.
c) Si divido el número 20 por un número racional positivo, el cociente es menor o igual que 5.
d) Si elevo al cuadrado un número racional, la potencia es mayor o igual que ese número.

5) Gasté 1/5 de lo que llevaba en la panadería. De lo que me quedaba aparté $8 para viajar y con el resto compré 4 helados de $10 cada uno. ¿Cuánto llevaba? Rta: $60

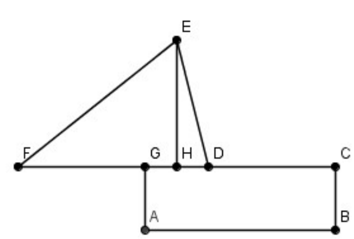
6) Un frutero vende su provisión de naranjas de la siguiente forma: la mitad a $7,20 la docena; la quinta parte de lo que queda a $9 la docena, y el resto a $6 la docena, recibiendo en total $503,70. ¿Cuántas docenas de naranjas vendió? Rta: 73 docenas

7) Entre los alumnos que fueron a revisión médica esta mañana, el 40% ya tenía detectada alguna dificultad visual.
Entre los que tenían dificultad, el 70% usaba anteojos y el 30% restante, lentes de contacto.
Si esta mañana fueron a revisión médica 21 alumnos con anteojos, ¿Cuántos alumnos fueron en total? Rta: 75 alumnos

8) Un comerciante anuncia el 20% de descuento sobre el precio presentado, pero antes cambia los precios marcados en las etiquetas y los aumenta un 20%. ¿Hizo algún descuento? Si es así, ¿de cuánto?

9) Se quieren pintar todas las caras de un cubo. La suma de las longitudes de todas sus aristas es de $\frac{36}{5}$ [m]. Si se necesita un litro de pintura por cada $\frac{6}{5}$ [m^2], ¿cuántos litros de pintura deben comprarse? Rta: 1,8 [l]

10) ABCG es un rectángulo de 72 [cm] de perímetro. $\overline{HE}$ es la altura del triángulo DEF.



a) Sabiendo que $\overline{AB}=3\cdot\overline{BC}$, plantea y resuelve una ecuación para saber cuánto miden los lados del rectángulo.
Rta: 9 [cm] y 27 [cm]

b) Teniendo en cuenta ahora que $\overline{FD} = \overline{AB}$ y $\overline{HE} = 2 \cdot \overline{BC}$, calcula el área de la figura de vértices ABCDEFG. Rta: 486 [cm^2]

c) En el mismo gráfico, dibuja la circunferencia circunscripta al triángulo FHE. Explica cómo la construiste. ¿Qué nombre recibe el centro de la circunferencia que dibujaste?

11) Ordena de menor a mayor 0; 1, y las siguientes potencias de 10: 10^2; 10^{-3}; 10^6; 10^{-1}; 10^4.

12) Completa con las potencias sucesivas de 10, entre qué están ubicados los siguientes números.

a) $10^{\cdots} < 4{,}5.10^{-2} < 10^{\cdots}$	c) $10^{\cdots} < 2.10^{-1} < 10^{\cdots}$	e) $10^{\cdots} < 450 < 10^{\cdots}$
b) $10^{\cdots} < 2{,}3.10^{2} < 10^{\cdots}$	d) $10^{\cdots} < 1{,}2 < 10^{\cdots}$	f) $10^{\cdots} < 0{,}23 < 10^{\cdots}$

13) Escribe los siguientes números en notación científica, resuelve las operaciones entre ellos y expresa el resultado en notación científica:

$$0{,}0028 : 1400 \cdot 0{,}000025 =$$

14) Observa las siguientes expresiones decimales:

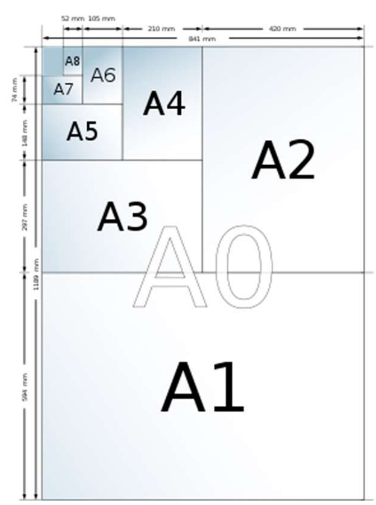
$a_1 = 4{,}1234567891011121314...$ $\quad$ $a_2 = 0{,}1010010001000010000010000000...$

$a_3 = -25{,}30887788877788887777888887777...$

Descubre cuál es la ley que siguen las cifras de estos números y agrega alguna más. ¿Son números racionales?

El conjunto de los Irracionales

FORMATO DE PAPEL - DIN 476



La norma DIN 476 del Instituto Alemán de Normalización (Deutsches Institut für Normung en alemán), editada en 1922, trata de los formatos de papel y ha sido adoptada por la mayoría de los organismos nacionales de normalización europeos. Su contenido es equivalente al de la norma internacional ISO 216.

El formato de papel de dibujo de la serie-A se basa en los siguientes principios:

•Los distintos tamaños de papel tienen que tener la misma ***proporción***[1] entre su lado mayor y menor.

•Dos tamaños de papel sucesivos tienen que ser uno el doble de superficie que el otro, de modo que cortando un formato se obtienen dos iguales del formato siguiente.

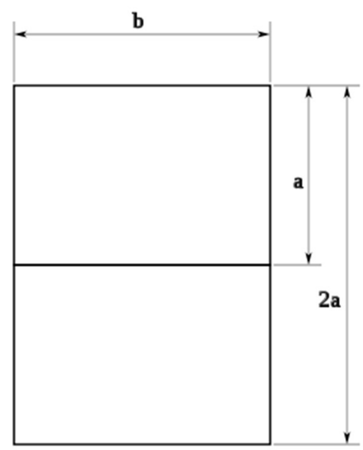
•El A_0 tiene una superficie de un metro cuadrado.

Verifica el primer principio completando la siguiente tabla, redondeando a los milésimos:

Hoja	**A (ancho en cm)**	**L (largo en cm)**	$\frac{L}{A}$
A4	21	29,7	
A5	14,85	21	
A6	10,5	14,85	
A7	7,425	10,5	
A8	5,25	7,425	

Partiendo de un formato de lados a y b, el formato superior tendrá 2a por b, para que la proporción entre sus lados sea la misma tendrá que cumplirse que:

$$\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$$



Esto es:

$$b^2 = 2a^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 2$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$$

$$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$$

El resultado del cociente b/a, ¿es un número entero? ¿Por qué?, ¿es un número racional? ¿Por qué?

Si la proporción entre el lado mayor y el lado menor es raíz de dos, cortando un formato en dos iguales esta proporción se conserva.

[1] El concepto de ***proporción*** se desarrolla en el capítulo 3.

La irracionalidad de la raíz cuadrada de dos

Si elegimos cualquier fracción irreducible, verás que SIEMPRE es equivalente a un número entero, o a un número decimal exacto, o un decimal periódico puro, o un decimal periódico mixto.

Vamos ahora a demostrar que el número $\sqrt{2}$ no es racional, o sea que no puede expresarse como una fracción irreducible.

Demostración:

El método que vamos a utilizar para la demostración es el de la *reducción al absurdo*. Este método consiste en suponer que se cumple una hipótesis, hacer operaciones verdaderas con ella y si se llega a un absurdo es que lo que habíamos supuesto, al inicio, era falso.

La demostración comienza suponiendo que raíz de 2 es racional y acabará en algo contradictorio. Si es racional debe ser igual a una fracción que suponemos irreducible, así:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{con} \quad q \neq 0$$

En esta fracción, p y q no tienen factores comunes y por tanto son primos entre sí. Elevamos al cuadrado y operando queda:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

Por tanto p^2 debe ser múltiplo de 2, lo que implica que p también es un múltiplo de 2. Es decir, $p = 2k$ para un cierto k.

Sustituimos este valor de p en la expresión anterior y simplificamos:

$$2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Esa expresión nos asegura que q^2 es múltiplo de 2, y por tanto también lo es q. Y aquí está el absurdo: habíamos supuesto que p y q no tenían factores comunes y hemos llegado a que los dos son múltiplos de 2, es decir, que tienen al 2 como factor común. Esa es la contradicción que buscábamos.

Conclusión: $\sqrt{2}$ **no es racional**.

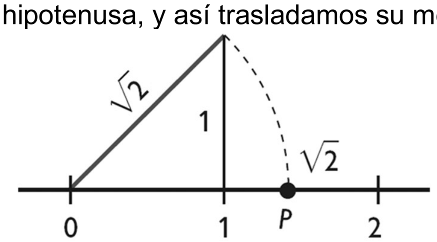
Como vimos la raíz cuadrada de dos y los números a_1, a_2 y a_3 del ítem 14 de las ACTIVIDADES 1.1, no podemos considerarlos racionales dado que no podemos expresarlos como una fracción. A estos números los llamaremos irracionales.

I I I I I I I I I I **IRRACIONALES** I I I I I I I I I I	
☑ Un número es irracional cuando no puede expresarse como una fracción. ☑ Tienen infinitas cifras decimales no periódicas. ☑ Algunos ejemplos de ellos son: π = 3,141592654... $\sqrt{2}$ = 1,4142135... *e* = 2,718281828... ☑ Para identificar el conjunto de números irracionales se utiliza la letra I .	☑ Es un conjunto denso. Esto significa que entre dos números irracionales cualesquiera existen infinitos irracionales. Como consecuencia: no puede hablarse de irracionales consecutivos. ☑ Tiene infinitos elementos; no tiene ni primero ni último elemento. ☑ Es un conjunto ordenado.

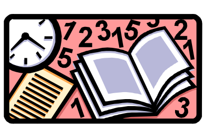
<u>Una representación particular de un número irracional en la recta numérica</u>

Para ubicar $\sqrt{2}$ en la recta numérica, podemos construir un triángulo rectángulo isósceles con catetos de igual longitud que la unidad. Aplicando Pitágoras, la longitud de la hipotenusa del triángulo es $\sqrt{2}$.

Con un compás, y con centro en cero, marcamos un arco de circunferencia de radio igual a la hipotenusa, y así trasladamos su medida a un punto de la recta.



De igual manera pueden representarse otros números irracionales como ser $\sqrt{3}$; $1+\sqrt{5}$, pero éste procedimiento no permite representar todos los números irracionales. Sí podemos asegurar que cada número irracional ocupa un punto de la recta numérica. Esos puntos son “lugares libres” que no están ocupados por racionales. Con esta incorporación la recta numérica queda completa.



ACTIVIDADES 1.2

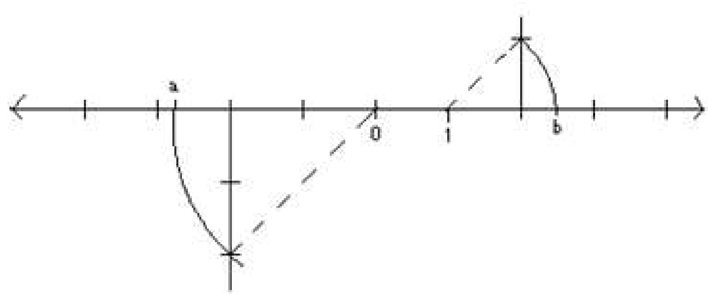
1) Se pueden construir números irracionales escribiendo dígitos que sigan alguna regla no periódica. Descubre qué regla siguen los dígitos de los siguientes números irracionales y agrega algunos más siguiendo la regularidad.

a) 1,1121231234123..... b) 2,454554555.....

c) 0,3331331133111331111..... d) 1,23571113....

2) Tanto a = 0,01011011101111..... como b = 0,98988988898888.... son números irracionales, ¿cuánto vale la suma a + b, sabiendo que se mantiene la ley de formación para cada uno de ellos?

3) Dada la siguiente representación en la recta numérica, indica que número corresponde al punto a y que número corresponde al punto b.



4) Representa utilizando los elementos de geometría, con la mayor exactitud posible, los siguientes números en la recta numérica.

$$\sqrt{3}\,,\quad -\frac{3}{2}\,,\quad \sqrt{10}\,,\quad -\sqrt{17}\,,\quad 0{,}\widehat{3}\,,\quad 2\frac{1}{4}\,,\quad 3+\sqrt{2}\,,\quad \sqrt{11}\,,\quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

5) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) Si a es un número irracional y b racional, entonces (a + b) es racional.

b) Si a es un número irracional y b racional, entonces (a . b) es irracional.

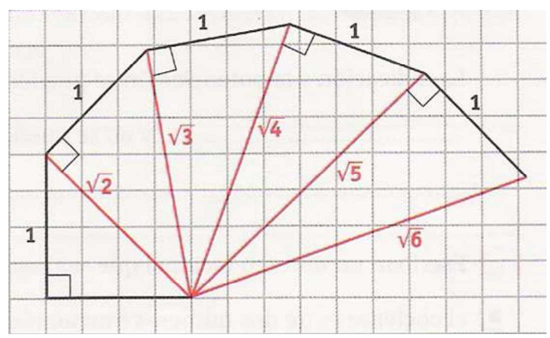
c) Si a y b son números irracionales, entonces (a + b) es racional.

d) Si a y b son números irracionales, entonces (a . b) es irracional.

6) Observa la siguiente sucesión de triángulos rectángulos llamada *Espiral de Arquímedes*.

a) Construye tres triángulos más en la sucesión.

b) ¿En qué pasos del procedimiento la hipotenusa tiene como longitud un número natural?



7) La S*ucesión de Fibonacci* es aquella sucesión de números en la que cada término es igual a la suma de los dos términos precedentes: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, y así sucesivamente.

Esta sucesión fue descubierta por el matemático italiano Leonardo Fibonacci. Los números de Fibonacci tienen interesantes propiedades y se utilizan mucho en matemática. Las estructuras naturales, como el crecimiento de hojas en espiral en algunos árboles, presentan con frecuencia la forma de la sucesión de Fibonacci.

a) Calcula siete términos más de la sucesión de Fibonacci.

b) Utiliza los quince primeros términos de la sucesión y escribe (usando calculadora) los ocho primeros dígitos de la expresión decimal del cociente entre cada término y el inmediato anterior, es decir, de $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\ldots$

c) Observa que los valores de $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \cdots$ se van acercando cada vez más al valor del "número de oro" Φ. Cuánto más se avanza por la sucesión de Fibonacci, los cocientes se acercan más al número de oro.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\ldots$$

Busca y mira en internet, videos explicativos donde aparezca el número de oro y/o sus aplicaciones. Te sugerimos: Pato Donald en el mágico mundo de las matemáticas

☑ ***RECUERDA***

Aproximación por truncamiento: Directamente se eliminan las cifras siguientes a la última que se quiere considerar.

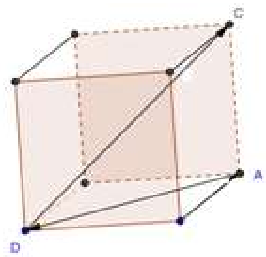
Aproximación por redondeo: Si la cifra que se encuentra a la derecha de la posición elegida para aproximar:

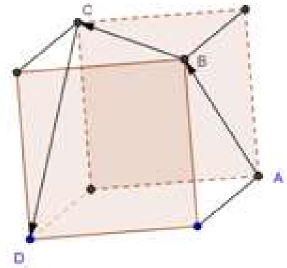
- **es mayor que 5** se suma uno a la cifra anterior, y se eliminan todas las cifras siguientes;
- **es menor que 5** queda igual la cifra anterior, eliminándose las siguientes.
- **es igual a 5** debemos observar si la cifra anterior es par o impar, si es par ésta se mantiene igual y si es impar se le suma uno, y en ambos casos se eliminan las cifras siguientes.

8) Aproxima estos números a los milésimos por truncamiento y a los centésimos por redondeo.

Nº a aproximar	Por truncamiento a los milésimos	Por redondeo a los centésimos
$\sqrt{2}+\sqrt{3} \cong$		
$\pi \cong$		
$\frac{3}{17} \cong$		
$\pi+\sqrt{5} \cong$		
$\frac{1}{22} \cong$		
0,4157 $\cong$		

9) Calcula el recorrido que realiza la hormiga, para cada caso. Considera que ambos cubos tienen aristas de 1 unidad de longitud.





El conjunto de los Reales

R R R R R R R LOS REALES R R R R R R R R	
☑ El conjunto formado por todos los números racionales y todos los números irracionales se llama conjunto de números reales y lo identificamos con la letra R. ☑ Es un conjunto con infinitos elementos. ☑No tiene ni primero ni último elemento. ☑Es un conjunto ordenado. ☑Es un conjunto denso.	☑ **R completa la recta numérica**. Esto significa que a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica y que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real. Por eso decimos que el conjunto de los números reales es **continuo.**

Intervalos en R

 Resuelve las siguientes situaciones:

a) Rebeca tiene 8 años menos que Carina. Si las edades de ambas suman menos de 70, ¿Cuántos años como máximo podría tener Rebeca?

b) Un corredor de comercio recibe un salario conformado de la siguiente manera: Sueldo fijo: $600 más 17% de comisión por las ventas realizadas. ¿A cuánto deben ascender sus ventas para que su ingreso sea superior a $1500?

c) En un bar antes de entrar al colegio 10 alumnos desayunan café con leche y medialunas. Uno de ellos pagó por todos con un billete de $100 y le dieron vuelto. En otra mesa, 4 personas consumieron lo mismo y quisieron pagar con $20 el total y no les alcanzó. Obtiene entre qué valores se encuentra el precio del desayuno.

Con las inecuaciones podemos indicar un conjunto de números que cumplen con determinadas condiciones. Veamos otra forma de expresarlo, cuando trabajamos en el conjunto de **números reales.**

En la situación (a), si x representa la edad de Rebeca se podría plantear la siguiente inecuación:

$$x + (x + 8) < 70$$

Resolviendo nos queda que:

$$x < 31$$

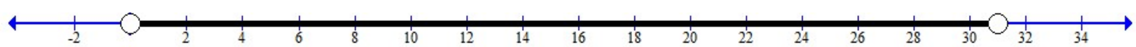
Si consideramos la edad como una variable continua, la edad de Rebeca puede ser cualquier número real mayor que 0 y menor que 31.

Simbólicamente: $0 < x < 31$

Al conjunto formado por todos los números reales comprendidos entre 0 y 31 lo llamamos:

Intervalo abierto (0 ; 31)

Su representación en la recta numérica es:



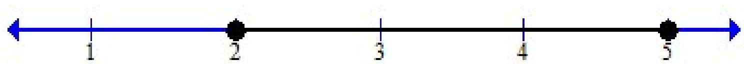
Los números 0 y 31 son los extremos del intervalo, pero en este caso no pertenecen a él. Por eso, es un intervalo **abierto**, y lo simbolizamos con **paréntesis**.

Si los extremos de un intervalo pertenecen a éste, lo llamamos **intervalo cerrado** y lo simbolizamos con **corchetes.**

Por ejemplo: Al conjunto formado por todos los números reales x comprendidos entre 2 y 5 inclusive **2**$\leq$ **x** $\leq$**5** lo llamamos:

Intervalo cerrado [2 ; 5]

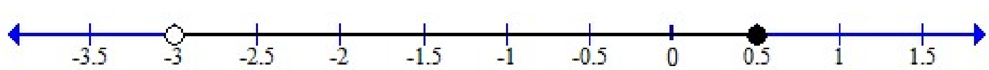
Su representación en la recta numérica es:

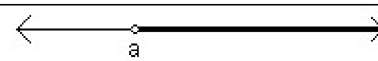
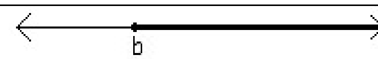


Si uno de los extremos de un intervalo pertenece a éste y el otro no, lo llamamos **intervalo semiabierto o semicerrado**.

Por ejemplo: Al conjunto formado por todos los números reales x que cumplen **-3 < x** $\leq$**0,5** lo llamamos: **Intervalo semiabierto (-3 ; 0,5]**

Su representación en la recta numérica es:



Formas de expresar un intervalo Siendo a y b números reales (a < b)			
Intervalo	Coloquialmente	Por comprensión	En la recta numérica
[a; b]	x pertenece a los números reales; x es menor o igual que b y mayor o igual que a.	$\{x/x \in R \wedge a \le x \le b\}$	
[a; b)	x pertenece a los números reales; x es menor que b y mayor o igual que a.	$\{x/x \in R \wedge a \le x < b\}$	
(a; b]	x pertenece a los números reales; x es menor o igual que b y mayor que a.	$\{x/x \in R \wedge a < x \le b\}$	
(a; b)	x pertenece a los números reales; x es menor que b y mayor que a.	$\{x/x \in R \wedge a < x < b\}$	
(a; ∞)	x pertenece a los números reales; x es mayor que a.	$\{x/x \in R \wedge a < x\}$	
(- ∞;b)	x pertenece a los números reales; x es menor que b	$\{x/x \in R \wedge x < b\}$	
[b; ∞)	x pertenece a los números reales; x es mayor o igual que b.	$\{x/x \in R \wedge x \ge b\}$	
(- ∞;a]	x pertenece a los números reales; x es menor o igual que a.	$\{x/x \in R \wedge x \le a\}$	
(- ∞;∞)	x pertenece a los números reales	$\{x/x \in R\}$	

ACTIVIDADES 1.3

1) Representa los siguientes conjuntos de números reales en la recta numérica e indica el intervalo o la inecuación que corresponda en cada caso.

a) $-1 < x \le 3$

c) $-3 \le x < 2$

e) $-4 < x < -\sqrt{2}$

b) $\left[0;\sqrt{3}\right]$

d) $[-5;0)$

f) $(-2;1)$

2) Una mañana Nicolás escuchó por la radio que, en ese momento, la temperatura era de 4 [ºC] y que durante el día no variaría más de 5 [ºC]. Expresa con un intervalo el conjunto de valores que habría podido tomar la temperatura durante ese día en caso de que el pronóstico se hubiera cumplido.

3) Escribe cada uno de los siguientes intervalos por comprensión y represéntalo en la recta numérica.

a) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$ c) $(-\infty;\infty)$ e) $(-\infty;0]$ g) $(-\sqrt{2};5]$

b) $(2;\infty)$ d) $\left[-\frac{1}{2};\infty\right)$ f) $(0,\widehat{3};4)$ h) $\left[1,\widehat{9};3\frac{1}{4}\right]$

4) A un campamento concurren 48 alumnos: 26 saben cocinar, 16 saben armar carpas y 12 no saben ni cocinar ni armar carpas.

a) ¿Cuántos alumnos realizan las dos actividades?

b) ¿Cuántos alumnos saben cocinar y no saben armar carpas?

c) ¿Cuántos alumnos saben armar carpas y no saben cocinar?

5) En un club, el 50% de los socios juega al fútbol, el 40% juega al tenis y el 10% juega al fútbol y al tenis. ¿Qué porcentaje de los socios no juega ni fútbol ni tenis?

6) Resuelve y representa las siguientes operaciones entre intervalos reales.

a) $(-\infty;5)\cup(-10;0] =$

b) $(-2;0]\cup(0;5] =$

c) $(-\infty;1]\cap(7;\infty) =$

d) $(-5;3]\cap(-1;8) =$

e) $(-\infty;2]\cup(2;\infty) =$

f) $[-5;\infty)\cap(-\infty;4) =$

$\cup$: Unión entre conjuntos
$\cap$: Intersección entre conjuntos

7) Dados los siguientes conjuntos, exprésalos como intervalos si es posible y represéntalos en la recta numérica.

a) $\{a\in N\wedge 0<a\le 6\}$

b) $\{b\in Z\wedge -3\le b<4\}$

c) $\left\{c\in R\wedge c<-\frac{1}{3}\right\}$

d) $\{d\in R\wedge d\ge -1\}$

e) $\{e\in N\wedge 5<e<6\}$

f) $\{z\in R\wedge -5<z\le 0\}$

g) $\{m\in Z\wedge \sqrt{2}<m<\sqrt{3}\}$

h) $\{w\in R\wedge |w|\le 3\}$

i) $\{u\in R\wedge |u|>1\}$

j) $\{t\in R\}$

8) Para cada una de las siguientes inecuaciones:

I) Encuentra el conjunto de números reales que la verifica.

II) Expresa coloquialmente el conjunto solución.

III) Expresa la solución como intervalo real.

IV) Representa la solución en la recta numérica.

V) Indica tres números que la verifiquen (uno entero, uno decimal periódico y uno irracional).

VI) Indica un número real que no la verifique.

a) $3.\left(0,8x-\frac{1}{2}\right)\le\frac{3}{2}.\left(0,\widehat{6}+x\right)$ c) $2b-\frac{1}{2}>3.\left(b+0,\widehat{3}\right)$ e) $\frac{2}{3}.(9-w)+1<1,\widehat{3}w-5$

b) $-8.\left(r-\frac{1}{2}\right)+r<4-2r$ d) $2.(d+1)+1<1,2+d$ f) $\frac{a-5}{3}+1,3\ge1-a$

Rtas III: a) $\left(-\infty;\frac{25}{9}\right]$ b) $(0;\infty)$ c) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ d) $\left(-\infty;-\frac{9}{5}\right)$ e) $(6;\infty)$ f) $\left[\frac{41}{40};\infty\right)$

9) Escribe como intervalo el conjunto de números reales que verifica la siguiente inecuación:

a) $\frac{2+0,5^{-2}\mathrm{x}}{2}\ \le\ 1,2\mathrm{x}-0,\widehat{6}$ b) $-4(w+0,05)\ge\left(0,\widehat{3}\right)^{-1}w+\frac{1}{25}$

c) $\frac{5b-10}{5}<8^{36}:\left(8^{7}\right)^{5}$ d) $2+\left(\frac{3a+1}{4}\right)\le5^{-1}+0,2a$

e) –3 (x - $0,\widehat{1}$) > x : 2 - 3^{-1} f) $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{5}\ge6$

g) $2\left(x+2,\widehat{9}\right)-0,5(20+4x)<0$ h) $\frac{8x+6}{4}<1,5\left(\frac{4}{3}x-1\right)$

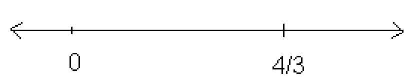
Rtas: a) $\left(-\infty;-\frac{25}{12}\right]$ b) $\left(-\infty;-\frac{6}{175}\right]$ c) $(-\infty;10)$ d) $\left(-\infty;-\frac{41}{11}\right]$ e) $\left(-\infty;\frac{4}{21}\right)$

f) $\left(-\infty;-\frac{98}{5}\right]$ g) $(-\infty;\infty)$ h) no tiene solución

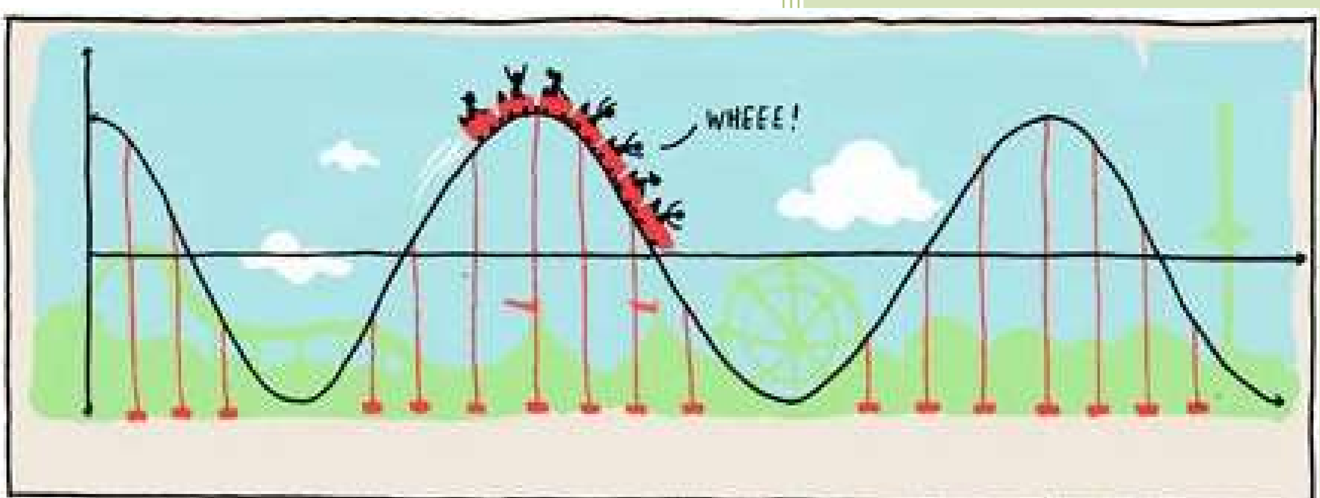
10) Justifica si cada uno de los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) El número $-\sqrt{2}+3$ es mayor que 1.
b) El siguiente del número 3,5 es el número 3,6.
c) El conjunto de números enteros es denso.
d) El conjunto de números racionales completa la recta numérica.
e) A = {x/x $\in$ Z $\wedge$ -3 < x $\le$ -2} es un conjunto vacío.

11) En la siguiente recta numérica, ubica justificando el procedimiento, los puntos que corresponden a los siguientes números: $\sqrt{5}$ y 1+ $\sqrt{2}$.



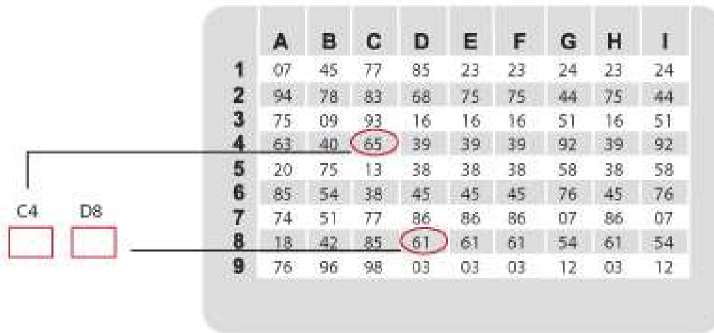
Capítulo 2: Funciones



- Sistemas de Referencia
- Interpretación de gráficos
- Funciones: directa e inversamente proporcional, lineal.

Sistemas de Referencia

La Tarjeta de Coordenadas es un método sencillo y efectivo que brinda más seguridad a la hora de operar por Internet; la misma está compuesta de números en forma de grilla, con 9 columnas que van desde la letra "A" hasta la letra "I" y 9 filas de la "1" a la "9". Además, cada tarjeta posee un número de serie que la identifica y la hace única. Este es un sistema de seguridad innovador para prevenir los dolores de cabeza que causan los robos informáticos. Es sólo uno de los elementos necesarios para la autenticación de las operaciones que se realicen a través de la Banca Internet.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	07	45	77	85	23	23	24	23	24
2	94	78	83	68	75	75	44	75	44
3	75	09	93	16	16	16	51	16	51
4	63	40	65	39	39	39	92	39	92
5	20	75	13	38	38	38	58	38	58
6	85	54	38	45	45	45	76	45	76
7	74	51	77	86	86	86	07	86	07
8	18	42	85	61	61	61	54	61	54
9	76	96	98	03	03	03	12	03	12

Si para autentificar una transacción se solicita las coordenadas B1 y H7, ¿qué números deben escribir?

La situación anterior es un ejemplo de un sistema de referencia.

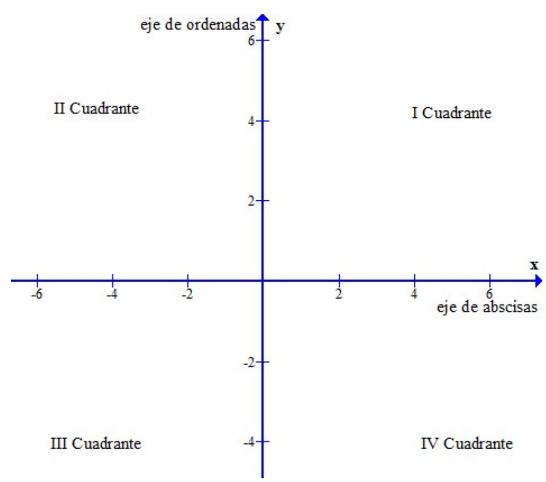
> *Un Sistema de Referencia es un conjunto de convenciones usadas por un observador para poder ubicar objetos en el plano o en el espacio tridimensional.*

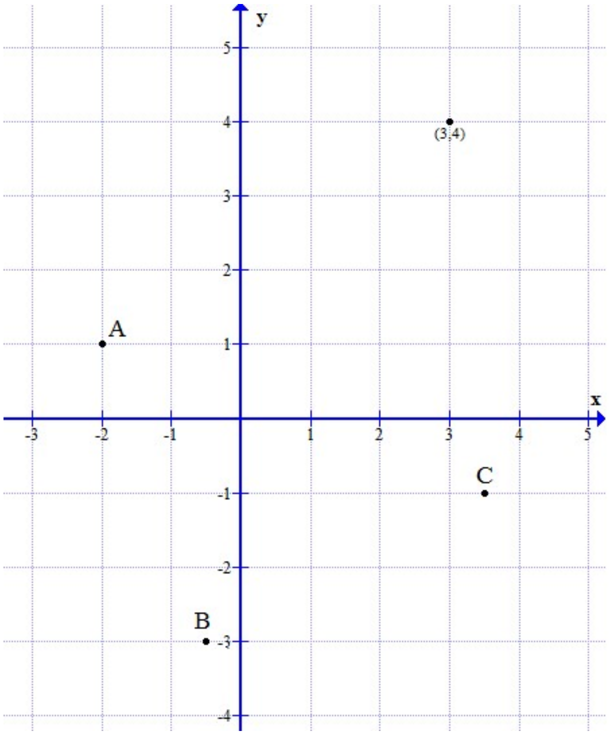
¿Qué otros sistemas de referencias conoces?

Sistema de Coordenadas Cartesianas.

En el Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonales, en el plano, se fijan dos ejes perpendiculares que dividen al plano en cuatro cuadrantes.

- El eje horizontal se denomina **eje x** o **eje de abscisas** y el eje vertical se denomina **eje y** o **eje de ordenadas.**
- El punto de intersección de los ejes se llama **origen de coordenadas.**
- Cada eje puede tener su propia escala, dependiendo de las situaciones planteadas.





Una vez fijado el sistema de referencia, cada punto del plano (cualquiera sea) tiene asignado un **par ordenado** de números que son sus coordenadas: el primero es su **abscisa** (es, en valor absoluto, la **distancia del punto al eje y**) y el segundo es su **ordenada** (es, en valor absoluto, la **distancia del punto al eje x**).

<u>Ejemplo</u>:

El punto que pertenece al I cuadrante está a 3 unidades del eje de ordenadas y a 4 del eje de las abscisas, esto se denota: (3 ; 4).

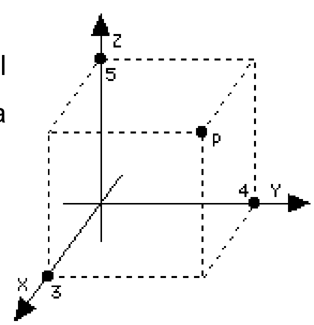
Escribe el par ordenado que se corresponde con los puntos A, B y C.

El mundo que nos rodea es tridimensional y a veces es necesario designar los puntos en dicho espacio tridimensional. El sistema cartesiano en el plano (x ; y) puede extenderse hacia tres dimensiones añadiendo una tercera coordenada **z**. Con el mismo criterio se fijan tres ejes: eje x; eje y; eje z; que se cortan perpendicularmente dos a dos, en un punto, que es el origen de coordenadas.

Si (x ; y) es un punto en un plano, entonces el punto (x ; y ; z) es un punto en el espacio tridimensional.

En el espacio, un punto se determina mediante: su distancia al plano yz (primer coordenada), su distancia al plano xz (segunda coordenada) y su distancia al plano xy (tercer coordenada).

Observa cómo se indica el punto P en este sistema P (3 ; 4 ; 5)

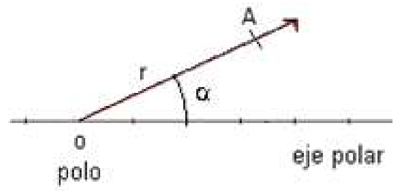


Sistema de Coordenadas Polares

Además de las coordenadas cartesianas, existe otra forma de determinar la posición de un punto en un plano: es el **sistema de coordenadas polares**.

En este sistema se fijan un punto llamado **polo** y una recta llamada **eje polar**.

Para ubicar un punto A en este sistema de referencia se determina:

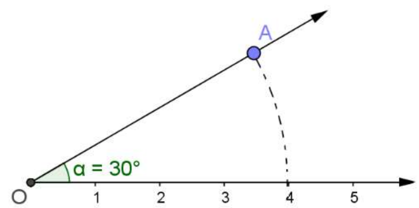


- la distancia entre el punto A y el polo O**,** que está indicada en el gráfico con **r**.
- y el ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj (antihorario), que forma el eje polar y el segmento $\overline{AO}$, este ángulo está indicado en el gráfico con la letra griega **α.**

Entonces al punto **A** lo podemos ubicar en este sistema con dos coordenadas: A (r ; α)

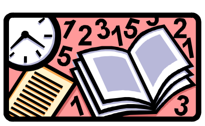
<u>Ejemplo:</u> Ubicamos el punto **A** en un sistema de coordenadas polares.

Observa cómo se indica la posición del punto **A** en este sistema de coordenadas polares.



Uso frecuente de coordenadas polares:

Las pantallas de radar muestran la presencia y el movimiento de objetos fuera del alcance de la vista, lo que resulta especialmente útil en la navegación. El equipo electrónico registra el comportamiento de las ondas de radio proyectadas por el barco. Las ondas que no chocan con ningún objeto se dispersan, mientras que las reflejadas denotan la forma y posición de los objetos en el campo de barrido.



ACTIVIDADES 2.1

1) Ubica en un mismo sistema de coordenadas cartesianas ortogonales los puntos: (-3 ; 1), (2 ; 3), (0 ; 7), (5/2 ; 0), (-4 ; -8/3) y (4 ; -7/2).

2) Ubica los puntos (2; 5; 8) y (5; 4; -3) en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional.

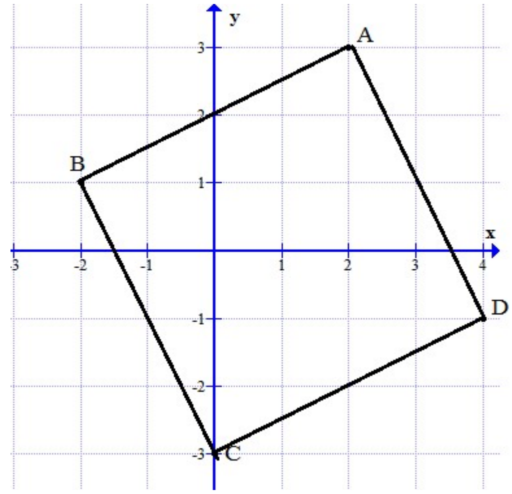
3) Ubica los puntos (3; 45º) y (5; 120º) en un sistema de coordenadas polares.

4) a) Indica las coordenadas cartesianas de los vértices del cuadrilátero ABCD.

b) Halla la longitud de cada lado. (Redondea los resultados a centésimos)

c) Clasifica el cuadrilátero dado.

d) Dibuja un cuadrilátero simétrico a ABCD con respecto al eje de las abscisas.



5) Dados los puntos $P_1 = (x_1 ; y_1)$ y $P_2 = (x_2 ; y_2)$ deduce la fórmula que permite calcular la distancia entre dos puntos en el plano.

6) Obtiene la distancia entre los siguientes puntos:

a) (-3 ; -1) y (4 ; 2)   b) (1/2 ; 7/4) y (8/3 ; 15/2)   c) (103 ; 420) y (105 ; 428).

7) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) El punto P (5,2 ; -2) pertenece al segundo cuadrante.

b) En el eje de abscisas se debe utilizar la misma escala que en el eje de ordenadas.

c) Si dos puntos tienen la misma ordenada entonces pertenecen al mismo cuadrante.

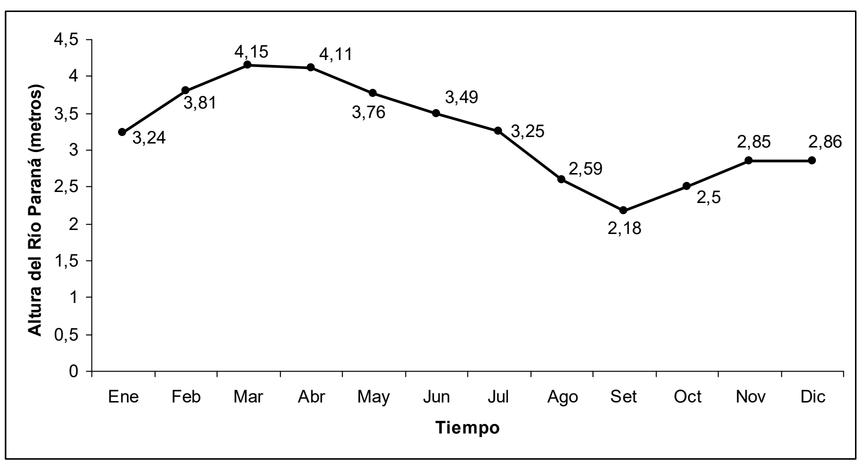
d) Si la abscisa de un punto es 0, entonces el punto pertenece al eje x.

e) En un sistema de coordenadas cartesianas el punto (3 ; -2) coincide con el punto (-2 ; 3).

f) La distancia entre los puntos (-1 ; -3) y (-2 ; 2) es aproximadamente 5,1.

Interpretación de gráficos

El gráfico muestra un estudio realizado sobre la altura o profundidad promedio del río Paraná, con datos registrados desde el año 1900 hasta el 2009 en el hidrómetro del puerto local.



Fuente: Diario El Litoral

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué variables se relacionan?

b) ¿En qué etapa del año la altura del río crece?

c) ¿Cuál es la altura promedio mínima registrada?

d) En mayo del 2009 se decía que la navegación en la zona podría verse afectada dado que la profundidad del río era 1,79 metros. ¿Cuál es la profundidad promedio registrada en esa época, según el estudio realizado?, ¿Cuántos metros por debajo estaba el río?

e) En invierno, ¿la altura del río está en ascenso o descenso?

En la situación anterior se relacionan las variables tiempo (expresado en meses) y altura del río (en metros). Entre estas dos variables hay una relación de dependencia: la altura depende del tiempo en que se haga el registro. Al tiempo lo llamamos **variable independiente**; mientras que a la altura la llamamos **variable dependiente**.

A la variable independiente se la representa en el eje horizontal, mientras que a la variable dependiente en el vertical.

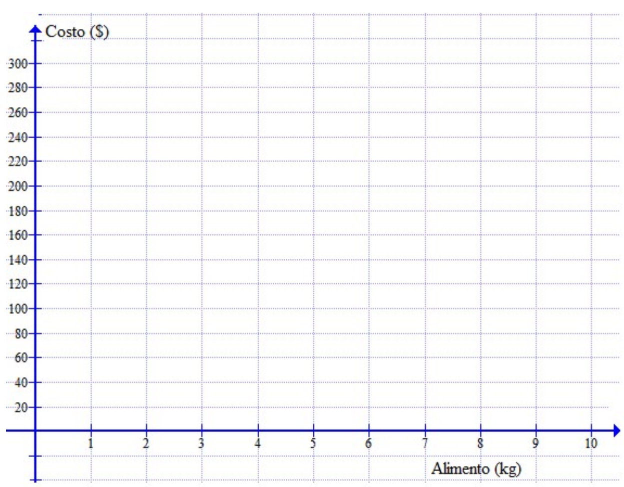
En los gráficos, generalmente, es más fácil analizar el comportamiento de las variables.

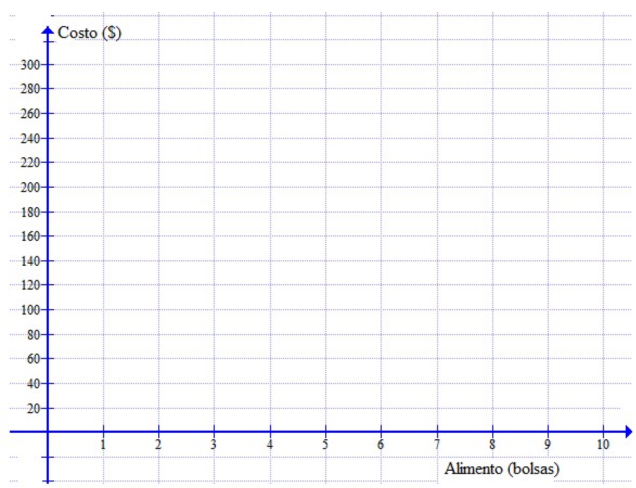
Eugenia cuando compra el alimento para su gato, tiene dos opciones: comprarlo suelto a $20 el kilogramo o envasado en bolsas de 1[kg] a $30 cada una.

a) ¿Eugenia podrá gastar $60 en cada opción?, ¿Y $100? ¿Por qué?

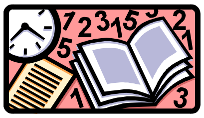
b) Si se considera como variable independiente a la cantidad de alimento, ¿qué valores puede tomar dicha variable en cada opción? ¿Qué costos son posibles en cada opción?

c) Representa cada caso en los siguientes sistemas de coordenadas cartesianas.

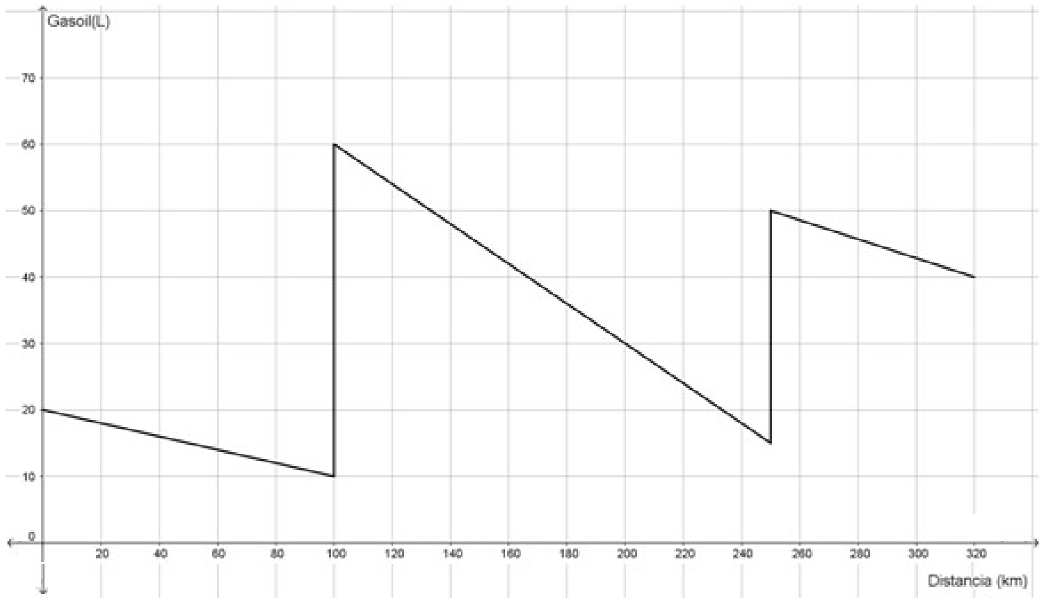




ACTIVIDADES 2.2



1) El siguiente gráfico representa la cantidad de gasoil que hay en el tanque de un coche a lo largo de un viaje de 320 [km].



a) ¿Cuáles son las variables?

b) ¿Cuántos litros tenía el depósito a la salida? ¿Y a la llegada?

c) ¿En qué kilómetro se encontraba cuando tenía 30 litros?

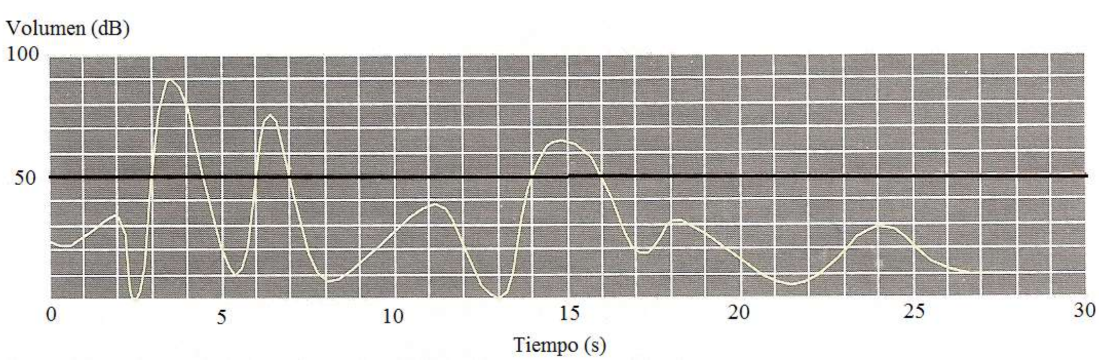
d) ¿Qué sucedió en el kilómetro 100? ¿Y a los 250 [km]?

e) ¿A qué distancia cargó mayor cantidad de gasoil?

f) ¿Cuántos litros consumió durante el viaje?

g) ¿Cuál fue el consumo medio (litros por cada 100 [km]) en este viaje?

2) El siguiente gráfico muestra la relación entre el tiempo, en segundos, y el volumen, en decibeles, de una guitarra en una grabación determinada. El oído humano percibe sonidos a volúmenes mayores de 0 [dB]. En dicha grabación por encima de los 50 [dB] suena distorsionado.

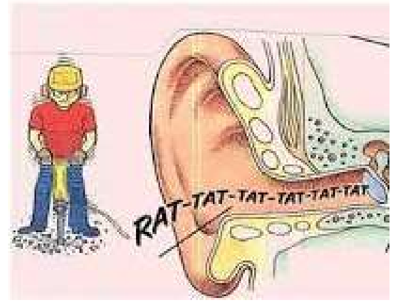


a) ¿Cuáles fueron los momentos en que la guitarra se escuchó distorsionada?

b) ¿De cuántos decibeles fue el mayor volumen? ¿En qué momento se alcanzó?

c) ¿En qué instantes el sonido de la guitarra no fue audible?

3) La existencia de un nivel de ruido seguro depende esencialmente de dos cosas: del nivel (volumen) del ruido; y durante cuánto tiempo se está expuesto al ruido. El nivel de ruido que permiten las normas sobre ruido de la mayoría de los países es, por lo general, de 85-90 [dB] durante una jornada laboral de ocho horas. Se puede tolerar la exposición a niveles superiores de ruido durante períodos inferiores a ocho horas de exposición como muestra la siguiente tabla.



Generalmente a los trabajadores se les debe facilitar protección para los oídos y deben rotar, saliendo de las zonas de ruido. Aunque se debería hacer lo posible para disminuir el ruido utilizando controles mecánicos.

Tiempo de exposición [h]	Nivel de ruido [dB]
8	90
6	92
4	95
3	97
2	100
1,5	102
1	105
1/2	110
1/4 o menos	115

a) Representa gráficamente los datos de la tabla considerando como variable independiente el Tiempo.

b) ¿Durante cuánto tiempo puede estar expuesto un trabajador a niveles de ruido superiores a 95 [dB]?

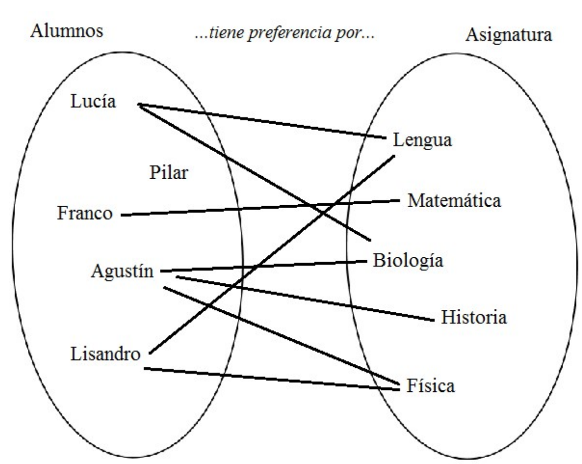
c) ¿Resulta un gráfico de trazo continuo o de puntos aislados? ¿Por qué?

d) ¿Qué otra información puedes extraer del gráfico?

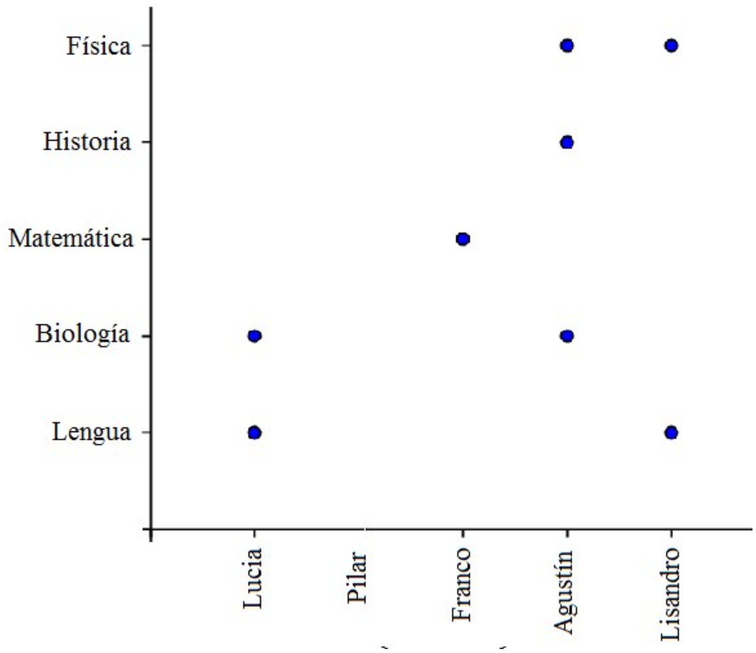
Información extraída de: http://actrav.itcilo.org/osh_es/m%F3dulos/noise/noiseat.htm

Funciones

A un grupo de estudiantes se les preguntó por la preferencia a ciertas asignaturas y contestaron lo siguiente: Lucía prefiere Lengua y Biología, Pilar no tiene preferencias, Franco prefiere Matemática, Agustín prefiere Historia, Biología y Física, y Lisandro prefiere Lengua y Física. A la relación "...tiene preferencia por..." la podemos representar como se muestra:



Otra forma de representarla sería la siguiente:



Considerando a cada alumno como elemento de un conjunto (A) y a las asignaturas como elementos de otro conjunto (B):

a) ¿Todos los elementos del conjunto Alumnos está relacionado con algún elemento del conjunto Asignatura?

b) Con respecto a los elementos del conjunto A que tienen relación con alguno del B, ¿es única?

Hemos analizado casos, en donde, dos variables se relacionan de modo que una depende de la otra. Por ejemplo, en el gráfico de la situación inicial, relacionamos el tiempo con la altura del río, y observamos que para cada mes del año le corresponde una única altura.

En todos los casos vimos que podemos analizar el conjunto de valores que puede tomar cada variable y ver también si a cada valor de la variable independiente le corresponde uno, varios o ningún valor de la variable dependiente.
Es importante cuando se establece una relación entre dos conjuntos identificar, cuáles son dichos conjuntos y si se cumple con una u otra característica de las destacadas últimamente.

Una relación definida de un conjunto A en otro conjunto B es función si, y sólo si, a cada elemento del conjunto A le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto B.
Conjunto A: son los valores de la variable independiente.
Conjunto B: son los posibles valores de la variable dependiente.

Establece relaciones entre dos conjuntos, algunas que sean funcionales y otras que no lo sean.

Para estudiar la relación funcional f entre dos conjuntos A y B, es necesario definirlos.

El conjunto A es el dominio de la función, y lo anotaremos Dom y el conjunto B es su codominio. El conjunto de elementos del codominio que están relacionados con algún elemento del dominio es el conjunto imagen y lo anotaremos C.I.

Para designar una función, se suelen utilizar letras como f, g, h, etc,
Simbólicamente:

$f: A \to B$ para indicar una función f definida de A a B

Para determinar si una relación es función, además de analizar la relación establecida es importante examinar entre qué conjuntos se la define. Es decir, siempre debemos expresar cuál es el dominio, codominio y la relación que se establece.

Determina el dominio, codominio y conjunto imagen de las relaciones que sean funciones, trabajadas en el tema Interpretación de gráficos.

Analiza si las siguientes relaciones son o no funciones:

a) Considerando los conjuntos A = {1,2,3,4}, B = {1,2,4,6,7,8,9} y la relación "es la mitad de".
b) Considerando los conjuntos A = {1,2,3}, B = {1,2,4,7,8,9} y la relación "es divisor de".
c) Considerando los conjuntos A = {11,20,35}, B = {2,7,8,9} y la relación "es múltiplo de".

Observación: De ahora en adelante nos ocuparemos del estudio de funciones definidas en conjuntos numéricos, es decir donde las variables que intervienen en la relación son numéricas. Generalmente, sino se expresa lo contrario, se considerarán funciones definidas de $R \to R$ o subconjuntos de ellos. Cabe aclarar que debemos prestar atención a la definición del Dominio y Codominio cuando estamos estudiando modelos matemáticos asociados a situaciones de la vida real.

Funciones definidas por ecuaciones

Muchas veces una función cuyo Dominio y Codominio son conjuntos numéricos puede definirse a través de una ecuación o ley de formación que relaciona sus variables.

Por ejemplo el perímetro "p" de un cuadrado en función de la longitud de su lado "x":

Dom = R^+ Cod = R^+ Relación: p(x) = 4.x

Si llamamos p a la función, podríamos escribirla simbólicamente así: $p : \Re^+ \to \Re^+ / p(x) = 4.x$

Para realizar el gráfico en el plano cartesiano registramos en una **tabla** algunos pares de valores de la función, para luego representarlos en los ejes cartesianos, teniendo presente siempre que la variable independiente se representa sobre el eje de abscisas y la variable dependiente sobre el eje de ordenadas.

Veamos otros ejemplos:

Ejemplo 1

Función   f: A cada número real le corresponde su cuadrado.

¿Por qué es función?

Expresión simbólica: $f: R \rightarrow R \; / \; y = x^2$

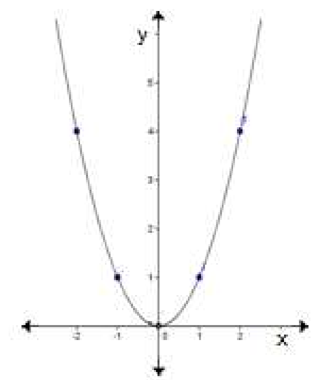
Variable independiente: x = “un número real”

Variable Dependiente: y = “el cuadrado del número x”

Dom: $(-\infty; \infty)$ C.I: $[0; \infty)$

Tabla de valores: Gráfico cartesiano:

x	$y = x^2$
-2	$(-2)^2=4$
-1	$(-1)^2=1$
0	$0^2=0$
1	$1^2=1$
2	$2^2=4$



Ejemplo 2

Función   g: A cada número entero le corresponde su módulo,

¿Por qué es función?

Expresión simbólica: $g: Z \rightarrow R \, / \, g(z) = |z|$

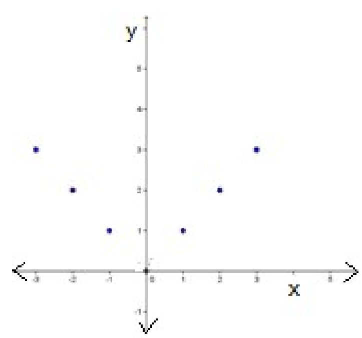
Variable independiente: z = “un número entero”

Variable Dependiente: g = “el módulo del número entero z”

Dom: Z   C.I: N_0

Tabla de valores: Gráfico cartesiano:

z	$g(z) = \|z\|$
-2	$\|-2\| = 2$
-1	$\|-1\| = 1$
0	$\|0\| = 0$
1	$\|1\| = 1$



Un último ejemplo para analizar:

“La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo depende del número de lados del polígono”

Definimos la función que determina esta relación de la siguiente manera:

S: A$\rightarrow$B / y = S(n) = 180º(n - 2) donde A = $\{n / n \in N \wedge n \geq 3\}$ y B = $\{y / y \in N \wedge y \geq 180\}$

y: es la variable dependiente   n: es la variable independiente

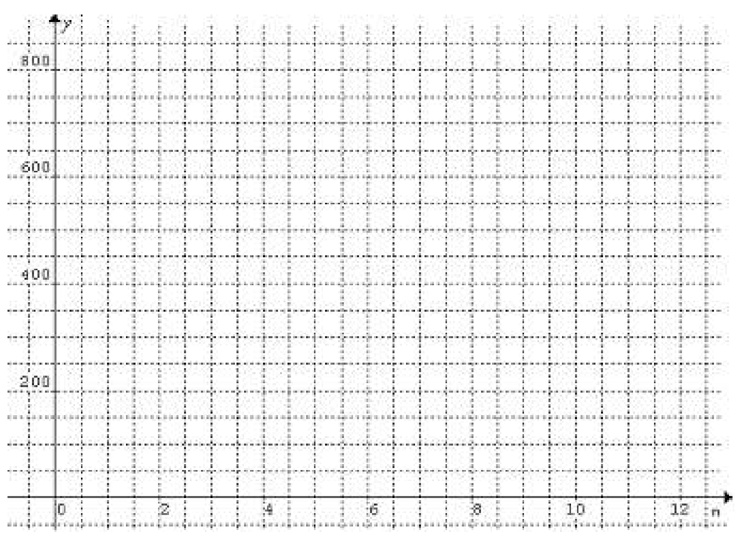
S: es el nombre que se le da a la función

S(n) se lee: "S de n" y está indicando que según la relación S, a el elemento n le corresponde el elemento y.

Si n = 4 $\Rightarrow$ y = S(4) = 180º(4 - 2) = 360º, decimos que **a n = 4 le corresponde y = 360**, o lo que es lo mismo, la **imagen de 4 es 360.**

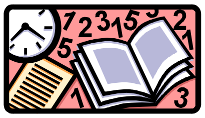
n (nº de lados del polígono)	S (n)= 180.(n-2) (suma de las amplitudes de los ángulos interiores del polígono medido en grados)
3	S(3) = 180º
4	S(4) = 360º
5	S(5) = 540º
6	S(6) = 720º
……	…………..

Completa el gráfico con los datos de la tabla anterior



De la tabla y la gráfica podemos extraer algunas conclusiones:

- La imagen de 5 es 540º.
- El punto (3; 180º) pertenece a la función.
- La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un hexágono convexo es 720º.
- El gráfico de la función es un conjunto de puntos aislados.
- Dom = $\{n / n \in N \wedge n \geq 3\}$ y   CI = $\{y / y = 180.(n-2) \wedge n \in N \wedge n \geq 3\}$



ACTIVIDADES 2.3

1) El tiempo que tarda un automóvil (a velocidad constante y sin detenerse) en llegar a Rosario (240 [km]) depende de la velocidad que lleva.

Supongamos que el automóvil lleva una velocidad no menor a 20 [km/h] y no mayor a 120 [km/h]

a) Completa la tabla, que muestra algunos valores, y grafica la relación entre la velocidad y el tiempo en un sistema de ejes cartesianos.

Velocidad (en km/h)	Tiempo (en horas)
20	
30	
40	
60	
80	
120	

b) ¿Resulta un gráfico con trazo continuo o con puntos aislados? Justifica tu respuesta.

c) ¿Qué conclusiones puedes extraer al observar el gráfico?

2) Indica el dominio y una fórmula que defina cada una de las siguientes funciones si se sabe que todas tienen como codominio el conjunto de números reales.

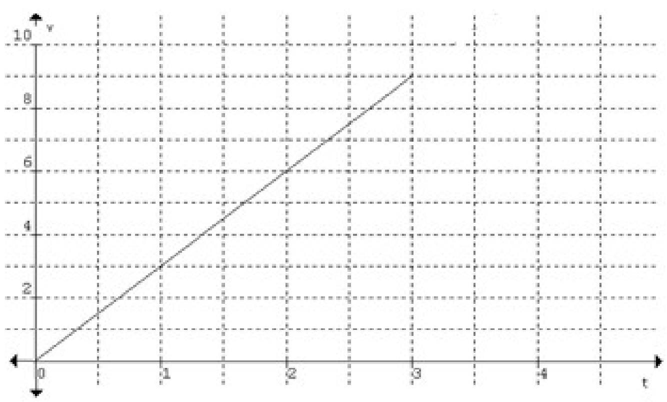
Registra en una tabla de valores algunos pares de elementos correspondientes y representa gráficamente. Establece el conjunto imagen.

a) A cada número natural le corresponde su triple.

b) A cada número real le corresponde el cuadrado de su mitad.

c) A cada número real le corresponde como imagen la diferencia entre 4 y el doble del número dado.

3) Un tanque de agua se llena con una bomba en tres horas. El gráfico describe cómo lo hace.



a) Indica qué valores toman t (tiempo en horas medido en el eje x) y v (volumen en m^3 medido en el eje y).

b) ¿Qué capacidad tiene el tanque?

c) ¿Cuántos metros cúbicos por hora se llenan con la bomba?

d) Expresa la fórmula que define la función v(t) =………...

e) Completa de modo que resulte verdadero:

v(1,5) = ………. v (……..) = 9

v(2) = ……….. v(………) = 5

4) Un vendedor de aires acondicionados obtiene una comisión de $240 por cada aparato vendido y un sueldo fijo por mes de $4000.

a) Escribe una ecuación que permita encontrar el salario total por mes, del vendedor, de acuerdo a la cantidad de aires acondicionados vendidos.

b) Si en el mes de enero de 2013 el vendedor obtuvo un sueldo total de $6160, ¿cuántos aparatos de aire acondicionados vendió dicho mes?

5) Representa gráficamente la siguiente función y expresa su conjunto imagen.

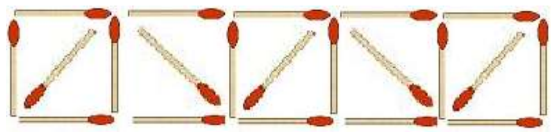
$$t:[-4;3] \rightarrow R \,/\, t(x) = y = 2 - x$$

6) Indica para cada uno de los siguientes enunciados si es verdadero o falso. Justifica tu respuesta.

a) Si $g: R \rightarrow R$ / g(w) = $2w^3 + 6w$, entonces g(-1) = -8.

b) El punto (-1; 3) pertenece a la gráfica de función $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$

7) Con fósforos armamos el siguiente esquema:



a) Completa la siguiente tabla que relaciona el número de cuadrados (c) con la cantidad de fósforos (f).

c	1	2	3	4	5	13	27
f	5						

b) Obtiene la ecuación que relaciona la cantidad de fósforos en función de la cantidad de cuadrados.

Función de proporcionalidad directa – Función de proporcionalidad inversa

I) La relación entre la base y la altura de los rectángulos que tienen 12 [cm²] de área.

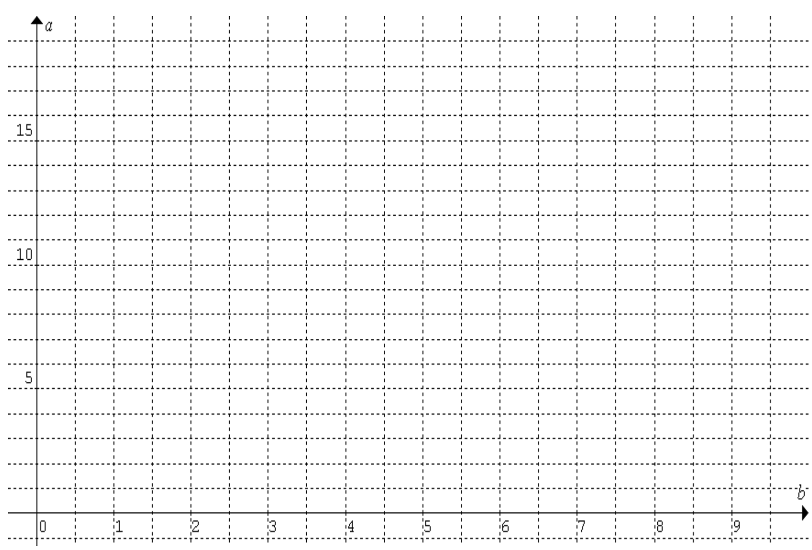
Si se considera la altura (a) en función de la base (b), se puede definir la siguiente función:

$$a: ...... \rightarrow .... / \ a(b) = ... ,$$

Completa la siguiente tabla de valores y realiza la gráfica correspondiente.

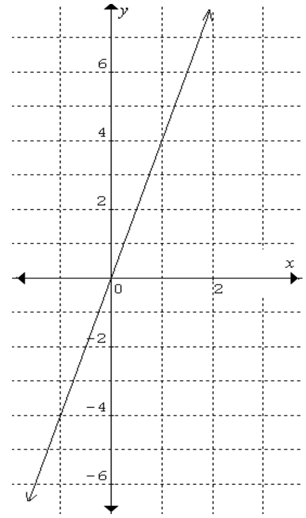
Vble Ind. Base (en cm)	Vble Dep. Altura (en cm)
2/3	
1	
2	
3	
4	
10	

Su gráfica es una rama de hipérbola.



II) La relación entre un número real y su cuádruple.

Si llamamos f a la función, podríamos escribirla simbólicamente así: $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = y = 4x$, su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas y en su tabla observamos algunas relaciones.

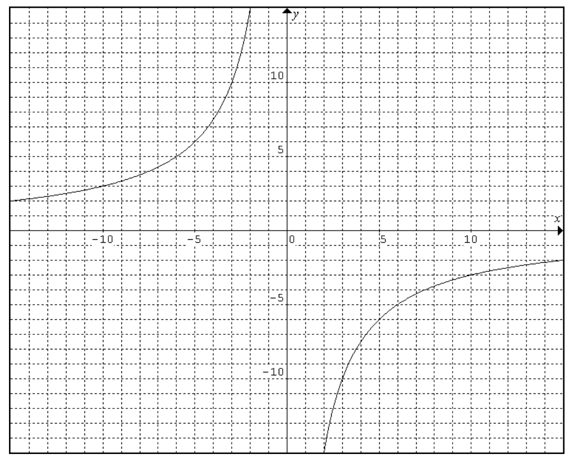


x	y = 4x
-2	-8
-1	-4
0	0
1	4
2	8
3	12

III) La relación entre dos números reales cuyo producto es -30.

Si llamamos f a la función, podríamos escribirla simbólicamente así:

$f: R - \{0\} \rightarrow R \,/\, f(x) = y = -30 : x$



x	-15	-10	-5	2	5	6
y	2	3	6	-15	-6	-5

La gráfica es una hipérbola.

En el ejemplo II) obtuvimos gráficamente una recta que pasa por el origen de coordenadas o puntos de la misma (en caso de ser un segmento o puntos aislados). Si x_i e y_i son valores correspondientes podemos observar que: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = ... = a$ (nº real constante) $y = ax$	En los ejemplos I) y III) obtuvimos gráficamente una hipérbola o puntos de la misma (en caso de que sean puntos aislados o tramos de hipérbola). Si x_i e y_i son valores correspondientes podemos observar que: $x_1.y_1 = x_2.y_2 = x_3.y_3 = ... = a$ (nº real constante) $y = \frac{a}{x}$ con $x \neq 0$
Funciones cuya ecuación es: $y = ax$, con $a \in R$, se llaman funciones de proporcionalidad directa y su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas o puntos de la misma.	Funciones cuya ecuación es: $y = \frac{a}{x}$ con $a \in R$ y $x \neq 0$ se llaman funciones de proporcionalidad inversa y su gráfica es una hipérbola o puntos de una hipérbola.

a) Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función

$f:\Re-\{0\}\rightarrow\Re/\,f(x)=y=10/x$

b) Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función

$f\!:\!R\!\rightarrow\!R/\ f(x)=y\ =0{,}5\cdot x$

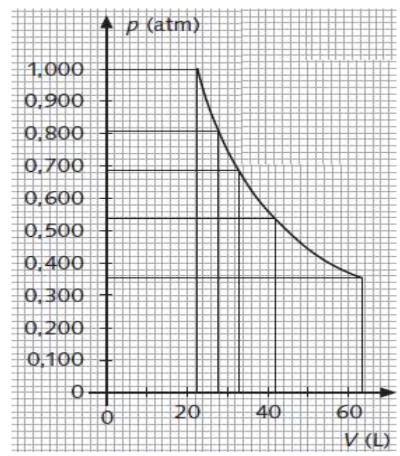
Utiliza un graficador de funciones (sugerencia: geogebra, graph, graphmatica) y grafica las funciones anteriores para verificar tus representaciones gráficas.

Matemática en contexto

R. Boyle estudió el efecto de la presión sobre los volúmenes de los gases.

En la siguiente tabla se muestran resultados experimentales de cómo varía el volumen de 4 [g] de helio cuando se someten a diferentes presiones a una temperatura constante de 0º [C].

p [atm]	v [L]
1,000	22,4
0,809	27,7
0,685	32,7
0,539	41,6
0,355	63,1



a) Observa cómo varían las magnitudes y su representación gráfica.

b) ¿Qué ocurre con el producto de los valores que toman las variables, al redondearlo a los décimos?

Boyle llegó a la conclusión de que el volumen de una masa dada de cualquier gas a temperatura constante varía de forma inversamente proporcional a la presión a la que se somete.

Es decir, el producto de la presión y el volumen de los gases se mantiene constante.

$$p.v=k \qquad k:\text{constante}$$

$$p=\frac{k}{v}$$

Investiga cómo se relacionan las variables involucradas en la Ley de Ohm.

ACTIVIDADES 2.4

1) Las siguientes tablas muestran valores pertenecientes a funciones. Indica cuál de ellas corresponden a funciones directamente proporcionales. En las que lo sean, halla la constante de proporción y escribe la ecuación correspondiente.

a)

x	y
2	3
4	6
6	8
8	12

b)

x	y
10	60
5	30
20	120
15	90

c)

x	y
1	2
2	3
3	4
4	5

d)

x	y
6	10
12	20
18	20
24	40

2) Representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $f: Z \rightarrow Z \,/\, f(x) = 5.x$

b) $f: \Re \rightarrow \Re \,/\, f(x) = \dfrac{x}{6}$

3) Las siguientes tablas muestran valores pertenecientes a funciones. Indica cuál de ellas corresponden a funciones inversamente proporcionales. En las que lo sean, halla la constante de proporción y escribe la fórmula correspondiente.

a)

x	y
2	18
6	6
4	9
3	6

b)

x	y
20	16
40	8
60	6
80	4

c)

x	y
2	1250
10	250
5	500
25	100

d)

x	y
10	7
20	5
30	4
40	3

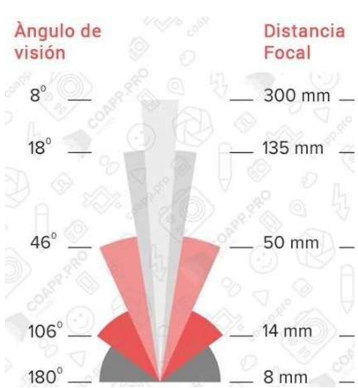
4) Representa gráficamente la siguiente función: $f: Z - \{0\} \rightarrow Q \,/\, f(x) = \dfrac{4}{x}$

5) a) La siguiente tabla se asocia a una función directamente proporcional. Complétala con los números que correspondan:

x	y
12	6,3
4	
	12,6
3	
7	
	2,625

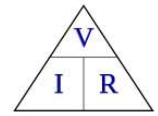
b) La siguiente tabla se asocia a una función inversamente proporcional. Complétala con los números que correspondan:

x	y
15	
45	40
	200
1,5	
10	
	90



6) Determina si las magnitudes: ángulo de visión y distancia focal, son directa, inversamente proporcional o ninguna de las dos anteriores.

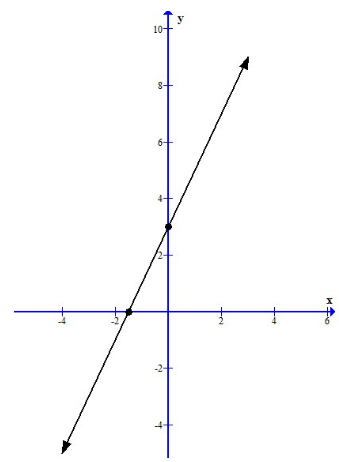
7) Completa los siguientes enunciados de modo que resulten verdaderos.
En un circuito eléctrico, según la ley de Ohm:
a) La diferencia de potencial, V, es ………….. proporcional a la resistencia, R.
b) La intensidad, I, es ………………….. proporcional a la resistencia, R.



Ordenada al origen y ceros de una función

La **ordenada al origen** es el valor de la función cuando la variable independiente es 0 (cero). Gráficamente, es la ordenada del punto donde la gráfica de la función corta al eje de ordenadas.

Los **ceros o raíces** de una función son los valores de la variable independiente para los cuales la función es 0 (cero). Gráficamente, son las abscisas de los puntos donde la gráfica corta al eje de abscisas.



Ejemplos:

1) Sea $f: R \rightarrow R / \ f(x) = y \ = 2x + 3$

Ordenada al origen:

y = f(0) = 2.0+3 = 3,

Por lo tanto, la ordenada al origen de f(x) es y = 3.

Ceros o raíces:

0 = f(x)

0 = 2x+3

-3 = 2x

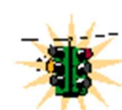
$-\frac{3}{2}$ = x

Intersección con el eje y: (0 ; 3)

Ordenada al origen: y = 3

Intersección con el eje x: (-3/2 ; 0)

Raíz: x = -3/2



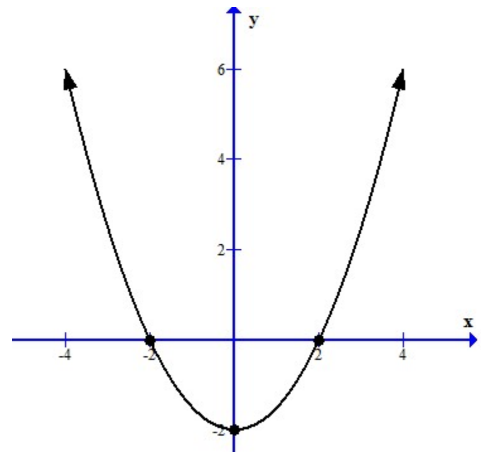
¿Cómo reconocemos en la tabla de valores la ordenada al origen y los ceros de la función?

x	y = f(x) = 2x+3
0	3 (ordenada al origen)
-3/2 (cero de la función)	0

Para la **ordenada al origen** buscamos un punto del gráfico que esté en el eje y, es decir donde **x = 0**, entonces esa columna de la tabla nos lo estará indicando.

Para los **ceros o raíces** buscamos los puntos del gráfico que estén sobre el eje x, es decir donde **y = 0**, entonces las columnas donde y sea 0 nos dirán los valores de x buscados.

2) Sea $g: R \to R / \ g(x) = y \ = \frac{1}{2}x^2 - 2$



Ordenada al origen:

y =g(0) = $\frac{1}{2}\,0^2 - 2 = -2$

Entonces, la ordenada al origen de g(x) es y = - 2

Ceros o raíces: 0 = g(x)

$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2$

$2 = \frac{1}{2}x^2$

$4 = x^2$

$\sqrt{4} = |x|$

Luego, los ceros o raíces de g(x) son x = -2 y   x = 2.

En la tabla:

x	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$
-2(cero de la función)	0
0	-2(ordenada al origen)
2(cero de la función)	0

ACTIVIDAD 2.5

Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. En (a) y (b) grafica aún en el caso de no ser necesario para dar la respuesta.

a) Las funciones $f: R \to R / \ f(x) = y \ = \frac{x+2}{2}$ y $g: R \to R / \ g(x) = y \ = x + 1$, tienen la misma ordenada al origen.

b) La gráfica de la función $f: R \to R / \ f(x) = y \ = 2x^2 + 1$, no tiene ceros o raíces.

c) La función $h: Z \to R / \ h(x) = y \ = 2x + 3$, no tiene ceros o raíces.

d) $x = \frac{5}{2}$ es un cero o raíz de la función $h: N \to R / \ h(x) = y \ = 2x - 5$

Incrementos

El símbolo Δ (delta) es una letra griega que se utiliza para indicar "cambio" o "incremento", por ejemplo si t es tiempo entonces Δt representa la variación del tiempo que también llamaremos "incremento de t". Si v es la velocidad, Δv representa la variación de la velocidad, que llamaremos "incremento de v". En general, Δx significará cambio de la variable x o incremento de x, y también, Δy significará cambio de la variable y o incremento de y.

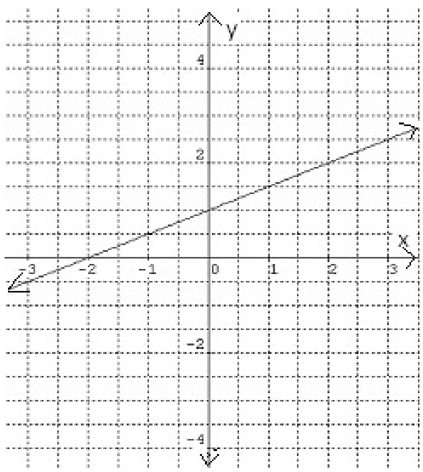
En las actividades anteriores dos de las funciones trabajadas fueron:

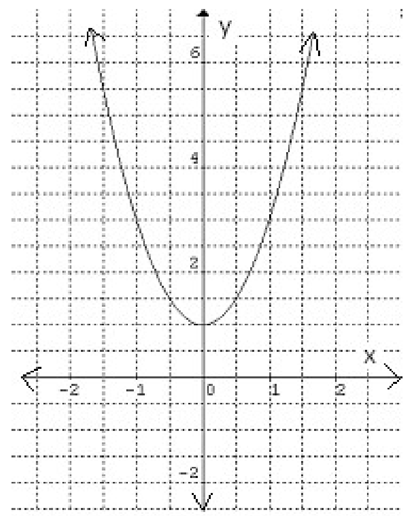
$f:R \to R/\ f(x) = y\ = \dfrac{x+2}{2}$, cuya fórmula podríamos escribir también como $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ y la función $f:R \to R/\ f(x) = y\ = 2x^2 + 1$

Sus gráficas y tablas con algunos pares de valores correspondientes son respectivamente las siguientes:

x	y= $\frac{1}{2}$ x + 1
-3	-1/2
-2	0
-1	1/2
0	1
1	3/2

x	y= $2x^2$ + 1
-2	9
-1	3
0	1
1	3
2	9



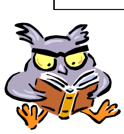


Observamos que en el primer caso que cada vez que x se incrementa en 1 unidad, el incremento de y es constante e igual a 1/2, es decir: **El incremento de la variable y se mantiene constante ante el incremento de una unidad de la variable x**, no sucede así en el segundo caso.

Si construimos una tabla que muestre la relación entre los incrementos observamos que hay una relación de proporcionalidad directa entre ellos, es decir la razón entre los mismos es constante $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = 1/2, esto es **el cociente de los incrementos es constante.**

Δx	Δy
1	1/2
2	1
3	3/2
4	2

Este valor es precisamente el que aparece en la ecuación de la función como coeficiente de x.



Podemos observar entonces que:

*La fórmula de la función es de la forma y = a x + b con a = 1/2 y b = 1

*La gráfica de la función son puntos alineados, en este caso es de trazo continuo y es una recta.

*La relación entre los incrementos en la variable independiente (Δx) y los incrementos en la variable dependiente (Δy) es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} = \frac{3/2}{3} = \frac{2}{4} = ... = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ **es constante**, por lo que podemos asegurar que los incrementos son directamente proporcionales.

Matemática en contexto

Un móvil que parte desde Santa Fe hacia la ciudad de San Cristóbal (a 180 [km] de Santa Fe aproximadamente) mantiene una velocidad constante de 100 [km/h].

a) Completa la siguiente tabla, donde t representa el tiempo (en minutos) y x la posición del móvil (en kilómetros):

t	20	40	60	80	100
x					

b) ¿Cuánto demora en llegar a San Cristóbal?
c) Realiza un gráfico posición - tiempo que represente la situación. Explica tu sistema de referencia.
d) Escribe una ecuación que modelice la situación, si se considera al tiempo la variable independiente.

Supone que otro móvil sale de la ciudad de Laguna Paiva (a 40 [km] de Santa Fe) con la misma velocidad hacia San Cristóbal a la misma hora que el anterior:
e) Realiza un gráfico posición - tiempo que represente la situación en el mismo sistema de coordenadas cartesianas usado en (c).
f) ¿Cuánto demora en llegar a San Cristóbal?
g) Escribe una ecuación que modelice esta nueva situación.
h) Indica dominio y codominio para que las ecuaciones anteriores se correspondan con funciones.
i) Ambas, ¿son funciones directamente proporcionales? ¿Por qué?
j) ¿Qué sucede con los cocientes $\Delta x/\Delta t$ en ambos casos? Relaciona con las ecuaciones y gráficos anteriores.

Realiza la representación, en un sistema de coordenadas cartesianas, de la posición de un objeto con respecto al tiempo si el mismo lleva velocidad constante v y parte de una posición inicial x_0. Escribe la ecuación correspondiente.

Función lineal

Estamos estudiando un tipo particular de funciones a la que se denomina **función lineal**.

Una función lineal es aquella que se puede definir a través de una ecuación del tipo: $f(x) = y = ax + b$ donde a y b son números reales cualesquiera. Si la función está definida en el conjunto de los números reales, es decir $f : R \to R$, su gráfica es una recta y la ecuación $y = ax + b$ se llama ecuación explícita de la recta.

 ¿Cómo sería la gráfica de una función lineal cuando el dominio no es el conjunto de los números reales?

Es importante tener presente, en una función lineal, que:

*Como su representación gráfica es una recta (o puntos de la misma), con sólo dos puntos que pertenezcan a la función se la podrá representar, conviene tomar un tercero para verificar la gráfica.

*Su ordenada al origen será b, ya que $y = f(0) = a\,.0 + b = b$, en el ejemplo $b = 1$

* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a,$ en el ejemplo $a = 1/2$ y se llama pendiente de la recta.

<u>Teorema</u>

<u>Enunciado:</u>

Dada la función lineal definida por la fórmula: $f(x) = y = ax + b$, el cociente entre, los incrementos de la variable dependiente y su correspondiente incremento de la variable independiente, es igual al parámetro "a".

<u>Hipótesis:</u>

x_1; x_2 dos números reales distintos cualesquiera y sea $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ las imágenes de dichos números correspondientes a la función $f(x)$

$(x_1 ; y_1)$ y $(x_2 ; y_2)$ son puntos pertenecientes a la función.

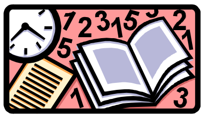
<u>Tesis:</u>

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a$$

<u>Demostración:</u>

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$



ACTIVIDADES 2.6

1) Sabiendo que en una función con dominio real, al aumentar 3 unidades la variable independiente, la variable dependiente aumenta 1 unidad:

a) Representa un gráfico de infinitos puntos y una tabla con algunos pares de valores que pertenecen a la función.

b) Responde las siguientes preguntas:

i) ¿Cómo resultan esos puntos?

ii) ¿Cuántas gráficas puedes realizar?

c) Compara tu gráfica con la de tus compañeros ¿cómo resultan entre sí?

d) Si además, la gráfica debe intersecar al eje de ordenadas en el punto (0 ; -2), ¿Cuál sería el gráfico ahora? ¿Puedes obtener la fórmula de cada correspondencia?

2) Genera una tabla de valores que corresponda a una función lineal, verifica con la representación gráfica y obtiene la fórmula.

3) A medida que nos acercamos al centro de la Tierra la temperatura aumenta, por lo tanto, las aguas termales tienen mayor temperatura si provienen de fuentes más profundas. Si cada 30 metros de profundidad aproximadamente, la temperatura asciende 1 [ºC].

a) Completa la siguiente tabla, basándote en la información que en una determinada época del año la temperatura del agua en la superficie (en un lugar específico) es de 15 [ºC]:

X (metros de profundidad)	Y(temperatura del agua)
0	15º
30	……
60	……
1500	……
……	80

b) Deduce la ecuación que relaciona las variables.

4) Representa gráficamente la función $g: R \to R$ cuya gráfica pasa por el punto (0 ; 2), la razón de incrementos es constante y Δy = -3 cuando Δx = 0,5. Escribe la ecuación de la función.

5) Representa gráficamente la función lineal definida de R en R cuya gráfica pasa por el punto (2 ; -1), la razón de incrementos es constante y Δy = 5 cuando Δx = 2. Escribe simbólicamente la función.

6) a) Completa la siguiente tabla correspondiente a una función $f: R \to R$ sabiendo que:

I) Los pares (4 ; 7) y (7 ; 9) pertenecen a la gráfica de f.

II) A incrementos iguales de la variable independiente “x” corresponden incrementos iguales de la variable dependiente “y”.

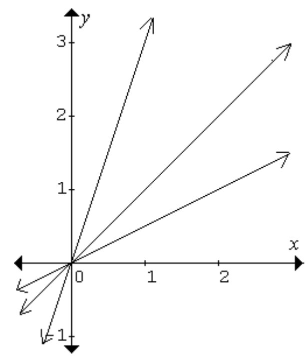
x	0	1	2	4	7		
y				7	9	10	12

b) Representa gráficamente la función y obtiene su fórmula.

Pendiente y ordenada al origen

Observemos los gráficos de las siguientes funciones lineales, $f: R \rightarrow R \ / \ y = f(x) = a.x + b$ y veamos de qué modo influyen los parámetros $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en la representación gráfica.

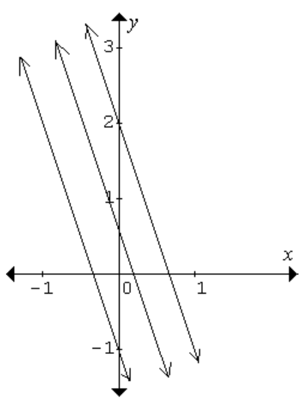
$f_1(x) = x$ $\qquad$ $f_2(x) = ½ x$ $\qquad$ $f_3(x) = 3x$



Conclusiones:

*Cuando $\boldsymbol{b}$ = 0, las rectas pasan por el origen de coordenadas.

*El parámetro $\boldsymbol{a}$ nos indica la variación que se produce en el eje y (eje de las ordenadas) para cierta variación en el eje x (eje de las abscisas). Gráficamente mide la inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas, por ello a éste parámetro se lo llama **pendiente.**



Recuerda que: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a$

$f_1(x) = -3x + 2$ $\qquad$ $f_2(x) = -3x + 0{,}6$ $\qquad$ $f_3(x) = -3x - 1$

*Por ser el parámetro $\boldsymbol{a}$ igual en las tres funciones lineales, las tres rectas tienen igual inclinación con respecto al eje de abscisas y por ello podemos afirmar que son paralelas.

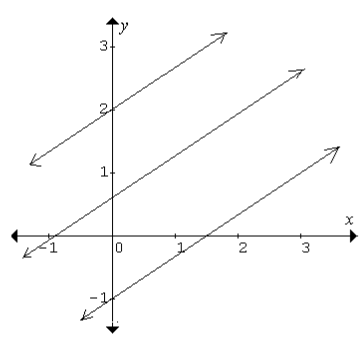
***Dos o más rectas**, que representen funciones lineales **son paralelas**, cuando tienen la misma pendiente.*

*Por ser $\boldsymbol{a}$ < 0, a medida que aumenta x disminuye y, por ello diremos que las funciones lineales son decrecientes en su dominio.

$f_1(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$

$f_2(x) = \dfrac{2}{3}x + 0{,}6$

$f_3(x) = \dfrac{2}{3}x - 1$

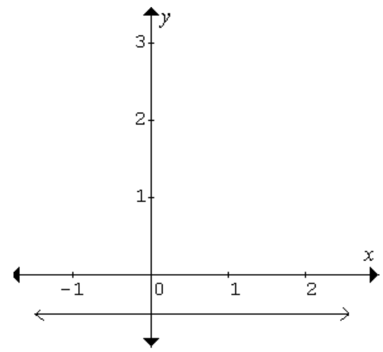


*Por ser a > 0, a medida que aumenta x, aumenta y, por ello diremos que las funciones lineales son crecientes en su dominio.

* Las rectas son paralelas.

Un caso particular: Cuando el parámetro a es igual a cero, la función $f: R \rightarrow R$ / y = f(x) = b, con $b \in R$ cuyo gráfico es una recta paralela al eje x, se llama **función constante.** Para cualquier valor de x, la imagen de la función es b, por ello CI = $\{b\}$

Ejemplo: g: $R \rightarrow R$ / y = g(x) = -1/2, su gráfica es:



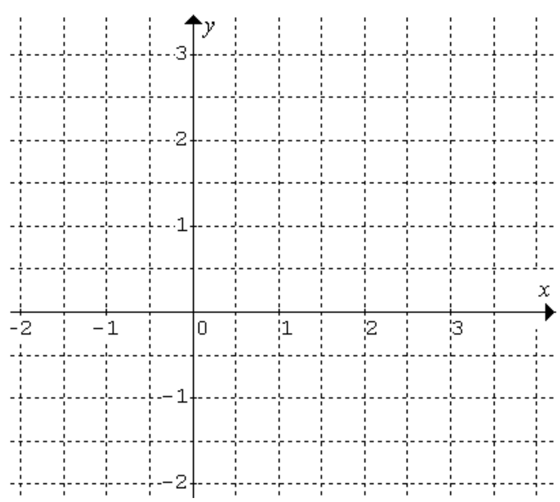
Representación de una función lineal usando su pendiente y su ordenada al origen

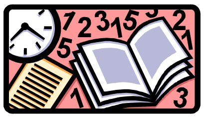
Si conocemos la fórmula $y = a\ x + b$, ¿cómo podemos representar gráficamente una función lineal con sólo determinar su pendiente y ordenada al origen?

Para contestar a esta pregunta, analizamos la siguiente función lineal:

$$f: R \rightarrow R \ / \ y = f(x) = \frac{2}{3}x - 1$$

a) Determina sus parámetros: ordenada al origen y pendiente.
b) ¿Cuál es la mínima cantidad de puntos que necesitas para graficarla? Justifica.
c) La ordenada al origen nos permite ubicar el primer punto en el sistema de ejes cartesianos, este es (… , …). Ubícalo en el siguiente sistema de ejes.
d) Ten en cuenta también, el significado y el valor de la pendiente ($\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$). Ahora ubica el segundo punto necesario para dibujar la recta.





ACTIVIDADES 2.7

1) Miguel está haciendo la tarea de matemática. Su profesora le pidió que representara gráficamente la función cuya fórmula es $2x + 3y = 5$; con dominio en el conjunto de números reales.

a) ¿Podrá Miguel obtener una recta en su representación gráfica?

b) Si es así ¿cuál es su pendiente?

c) Como Miguel participa mucho en clase, además le dijo a la profesora que es una función creciente. ¿Qué te parece que le dijo la profe, lo felicitó o le pidió que vuelva a estudiar un poco más?

2) Indica cuáles de las siguientes ecuaciones definen funciones lineales en R, justifica:

I) $y = -3x^{-1}$ II) $-2 + 1,5x = 4y$ III) $3x.x + y = 2$ IV) $2x + y = 0$

a) Representa gráficamente la que corresponda a una función lineal.

b) Indica la pendiente, la ordenada al origen y el cero de la función.

3) Dada la función f: $\Re \rightarrow \Re$ / $f(x) = \dfrac{2-x}{3}$

a) ¿Se puede afirmar que es una función lineal? Justifica.

b) ¿Es creciente o decreciente? ¿Por qué?

c) Representa gráficamente.

d) Halla $f(-2)$

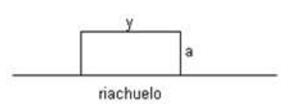
e) Halla analíticamente su cero o raíz.

4) Investiga si entre las siguientes, hay ecuaciones que correspondan a rectas paralelas. Justifica tu respuesta.

a) $y = -3x + 8$ b) $3x + 2y = -6$ c) $6x + 2y = 8$

d) $y = -3(x + 1) + x + 2$ e) $2x + y = 5$

5) Varios amigos deciden ir a un camping y llevan una cuerda para delimitar su territorio. Se colocan junto a un riachuelo por lo que el sector rectangular que forman con los 50 [m] de cuerda sólo tiene tres lados. Observa la figura de análisis donde **a** es el ancho e **y** es el largo del sector.



a) Si deciden formar un sector de 15 [m] de ancho, ¿cuál será su longitud?

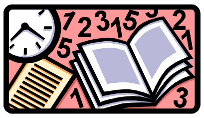
b) ¿Cómo cambia la longitud cuando varía el ancho?

c) Realiza una tabla con algunos valores que indiquen como varía la longitud cuando varía el ancho.

d) Representa en ejes cartesianos los pares de puntos obtenidos en el inciso anterior. Responde: ¿Es una gráfica de puntos aislados?. ¿Por qué?

e) Define la función asociada a la representación del ítem (d).

f) Dicha función, ¿es función lineal? ¿Por qué?



ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1) Una empresa de venta de computadoras ofrece a sus vendedores dos opciones de contrato salarial:

<u>Opción A:</u> Un sueldo fijo de \$ 3500 mensuales.

<u>Opción B:</u> Un sueldo fijo de \$2000 mensuales, más una comisión de \$ 250 por cada computadora vendida.

a) Encuentra la fórmula que permite obtener el sueldo mensual del vendedor, en función de la cantidad de computadoras vendidas, para cada opción.

b) Si vende 8 computadoras en un mes, ¿qué opción le conviene a los vendedores?

c) Un vendedor ha cobrado este mes \$ 4750. ¿Cuántas computadoras ha vendido?

d) Representa gráficamente las dos situaciones en un mismo sistema de ejes coordenados.

e) ¿A partir de qué número de computadoras vendidas, le interesa a un vendedor la segunda opción?

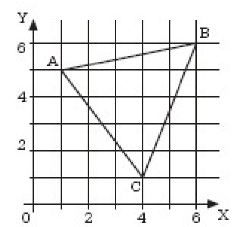
2) Señala cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta definida por cada función:

I) $f: R \to R$ / f(x) = y = -2x +3

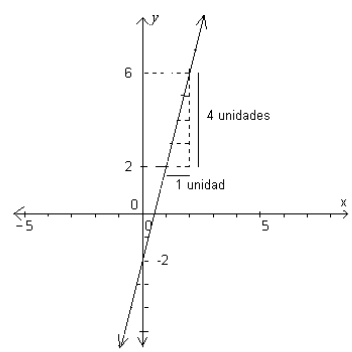
a) (0 ; 0) b) (-3 ; 9) c) (0 ; 3) d) (0,5 ; -1) e) (3/4 ; 3/2)

II) $f: R \to R$ / f(x) = y = -3

a) (0 ; -3) b) (-3 ; 0) c) (-3 ; -3)



3) Halla la pendiente de las funciones lineales asociadas a las rectas que contienen a los lados del triángulo ABC.



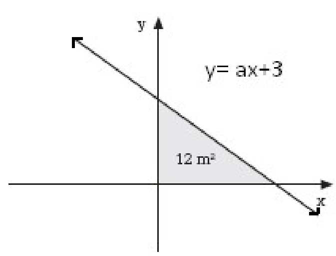
4) ¿Cuál es la fórmula de la función lineal graficada en el siguiente sistema de coordenadas?

<u>Ecuación Punto - Pendiente de la función lineal</u>

$y - y_1 = a(x - x_1)$ a: pendiente $(x_1 ; y_1)$ coordenadas de un punto de la función

Esta forma de expresar la función puede transformarse a la forma explícita.

5) Calcula el valor de la pendiente de la recta y=ax+3, si el área del triángulo sombreado en la figura, es 12 [m^2].



6) La Ley de Hooke (más conocida como Ley del Resorte) establece la relación que existe entre la fuerza "F" aplicada a un resorte y el estiramiento "e "producido en éste. La siguiente tabla de valores responde a dicha Ley para un resorte determinado:

F [dyn]	10	15	20	45	50
e [cm]	2	3	4	9	10

I) Responde:
a) ¿Las magnitudes son directamente proporcionales?, ¿Por qué?
b) ¿La relación entre dichas magnitudes se corresponde con un modelo lineal?, ¿Por qué?
II) Escribe la ecuación que relaciona la fuerza aplicada y el estiramiento, considerando como variable independiente a este último.

7) La siguiente tabla muestra algunos valores de la relación entre la cantidad de litros de agua de un tanque que ha sufrido una fisura y el tiempo:

tiempo (días)	1	3	7	8	10
cant. de agua (litros)	280	240	160	140	100

a) Obtiene la ecuación que modelice la relación planteada.
b) Indica dominio y codominio para que la ecuación anterior se corresponda con una función donde la variable independiente sea el tiempo.
c) Responde:
i) ¿La función definida en b) es inversamente proporcional? ¿Por qué?
ii) ¿La función definida en b) es lineal? ¿Por qué?
iii) ¿Cuál es la pérdida (litros por día) originada por la fisura?
iv) ¿Cuántos litros tenía el tanque antes de originarse la fisura?
v) ¿Cuántos días pasan hasta que se vacíe el tanque?
d) Representa la función en un sistema de coordenadas cartesianas e indica el conjunto imagen.

8) Un ciclista sale a pasear describiendo una trayectoria en línea recta. Algunas de las medidas que se tomaron durante 2 [h] a cerca de su posición en diferentes instantes de tiempo se muestran en la siguiente tabla:

Posición: x [km]	3	7	19	35
Tiempo. t [min]	20	30	60	100

I) Responde:
a) ¿El ciclista realiza un M.R.U.? ¿Por qué?
b) ¿Cuál es su velocidad?
c) ¿Cuál es su posición transcurridos 12 [min]?
d) ¿Las magnitudes Posición y Tiempo son directamente proporcionales? ¿Por qué?
e) ¿Cuál es el dominio, codominio y la ley formación para que esta relación x(t) sea función?
f) ¿Es x(t) una función lineal? ¿Por qué?
II) Representa gráficamente y halla el Conjunto Imagen.

9) Un gasista, cuando le piden un servicio a domicilio, cobra un valor fijo y un adicional según el tiempo que demore el trabajo. A un cliente le cobró por una hora de trabajo $170 y a otro por tres horas $210.
a) Indica el costo fijo y el costo adicional que cobra el técnico.
b) Define la función que representa el cobro en función del tiempo. Representa gráficamente.
c) Responde: ¿Cuántas horas trabajó en un arreglo que cobró $270?

10) Dada la función f: $\Re \rightarrow \Re$ tal que f(x)= $\dfrac{-3x+4}{4}$

a) ¿Es función lineal? ¿Por qué? Si lo es, escribe la pendiente y la ordenada al origen.
b) Halla la intersección con los ejes coordenados. Realiza la gráfica con estos datos.
c) Halla: $f(0) + 3 \cdot f(-4) =$
d) Calcula con la fórmula el valor que toma x cuando $f(x) = -2$
e) Escribe la ecuación de una recta paralela a la recta dada. Justifica tu respuesta.

11) Calcula el perímetro y el área del triángulo que queda determinado por el origen de coordenadas y las intersecciones con los ejes de la siguiente recta x = -3y + 6. Grafica la situación.

12) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) La función $f: R \rightarrow R$ / f(x) = $-2x - \frac{1}{2}$, es creciente.

b) La ecuación de la recta que pasa por los puntos (3 ; -2) y (0 ; -1) es y = 2x –6.

c) La recta R: 3x-y=2 y la recta S: -9x+3y-6=0 son paralelas.

d) $g: R \rightarrow R$ / g(x)= x^2 -1, es una función lineal.

e) La función $h: R - \{0\} \rightarrow R / h(x) = \frac{9}{x}$ representa una función lineal.

f) La única raíz real de la función T(w) = 0, cuyo dominio es el conjunto de números reales , es w = 0.

13) Representa en coordenadas cartesianas las siguientes funciones lineales definidas de R en R, identificando previamente la pendiente y la ordenada al origen

a) $\frac{4x+y}{2} = -1$ b) $3.(x+y) - 2 = 2x$ c) $y = -x$ d) $y + 1 = x + 4$

Luego indica las que sean funciones crecientes y las que sean funciones decrecientes. Justifica.

14) Determina los ceros o raíces de las siguientes funciones y = f(x), cuyo dominio es el conjunto de números reales.

a) y = 2   b) y = (x +2)/2   c) y = 0   d) y = -2x/4   e) y = x

15) Investiga si el punto (-1 ; 3) pertenece a la recta de ecuación 2x + y = 1. Propone dos modos de justificarlo.

16) A cada trabajador contratado se le dará al mediodía dos sándwiches de milanesa y tres refrescos.

a) Completa la siguiente tabla que muestra la cantidad de sándwiches que deberán estar preparados en función de la cantidad de hombres; considerando que cada hombre consume lo mismo. Obs: en la tabla solo aparecen algunos valores.

b) ¿Qué tipo de variación proporcional es? Justifica.

c) Indica la constante de proporción, la fórmula que representa a la función S(x), su dominio, codominio y conjunto imagen.

Cantidad de hombres (x)	Cantidad de Sándwiches S(x)
3	
	8
	24
18	
24	

17) La tabla muestra algunos valores de la distancia recorrida por un ciclista en función del tiempo empleado. Se sabe que el mismo dispone sólo de una hora para esta actividad.

a) Complétala, considerando que el ciclista mantiene la misma velocidad en el recorrido.

b) ¿Qué tipo de variación proporcional muestra esta tabla? Justifica.

c) Indica la constante de proporción, la fórmula que representa a la función D(t), su dominio y conjunto imagen.

Tiempo (t)	Distancia Recorrida D(t)
10min	2km
15min	3km
25min	5km
30min	
	9km

18) Una pelota de fútbol (Adidas Jabulani), en el año 2010, costaba $560. Once amigos debatieron sobre su compra.

a) Completa la siguiente tabla, considerando que cada uno aportaría lo mismo.

Cantidad de amigos (x)	Aporte A(x)
2	
4	
	80
8	
	56

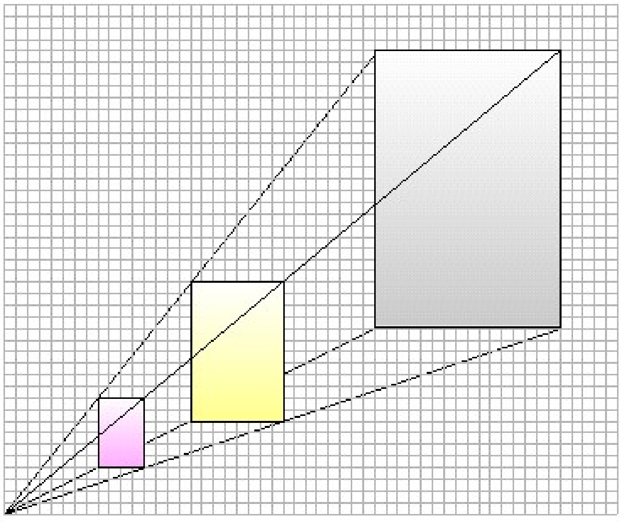
b) ¿Qué tipo de variación proporcional muestra la tabla? Justifica.

c) Indica la constante de proporción, la fórmula que representa a la función A(x), su dominio, codominio y conjunto imagen.

Capítulo 3: Razones y Proporciones

- Razones y Proporciones
- Teorema de Thales
- Triángulos Semejantes
- Razones Trigonométricas
- Resolución de triángulos rectángulos

Razones y Proporciones



Observa el dibujo y completa la tabla donde se muestra la relación de la altura, de cada rectángulo, con su base.

Altura	Base	Altura/Base

Responde: ¿Cómo resultan los cocientes?

Se sabe que 1 [L] de pintura cubre, de manera uniforme, 3 [m^2] de cierta superficie.

a) Completa la siguiente tabla que relaciona la superficie a pintar y la cantidad de pintura empleada.

Superficie pintada [m^2]	1		2	4
Pintura empleada [L]		0,5		

b) Obtiene los cocientes entre $\dfrac{\text{Superficie pintada}}{\text{Pintura empleada}}$.

En las actividades anteriores se calcularon cocientes entre cantidades de magnitudes.

> *Se llama **razón** entre dos medidas, a y b, al cociente indicado entre ambos, siendo b distinto de 0.*
>
> Simbólicamente: $\dfrac{a}{b} = r \qquad a, b \in R \wedge b \neq 0$
>
> *el número "a" se llama antecedente y el número "b" se llama consecuente.*

De las razones anteriores:

$$\frac{0,9\,[cm]}{0,6\,[cm]} = 1,5 \;\wedge\; \frac{2,1[cm]}{1,4[cm]} = 1,5 \;\Rightarrow\; \frac{0,9\,[cm]}{0,6\,[cm]} = \frac{2,1[cm]}{1,4[cm]}$$

$$\frac{1[m^2]}{0,\hat{3}[L]} = 3\left[\frac{m^2}{L}\right] \;\wedge\; \frac{1,5[m^2]}{0,5\,[L]} = 3\left[\frac{m^2}{L}\right] \;\Rightarrow\; \frac{1[m^2]}{0,\hat{3}[L]} = \frac{1,5[m^2]}{0,5\,[L]}$$

> *Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.*
>
> Simbólicamente: $\dfrac{a}{b} = r \;\wedge\; \dfrac{c}{d} = r \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \qquad a, b, c, d \in R \wedge b, d \neq 0$
>
> a y d son los **extremos**; b y c son los **medios**. Se lee: "a es a b como c es a d"

¿Cuál es la proporción entre el largo y el ancho de las hojas del formato D.I.N.?

Propiedad Fundamental de las Proporciones

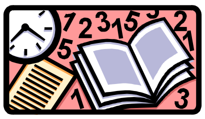
En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Ejemplos:

a) $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Rightarrow 3.8=4.6\Rightarrow 24=24$

b) $-\frac{1}{5}=-\frac{3}{15}\Rightarrow -1.15=5.(-3)\Rightarrow -15=-15$



ACTIVIDADES 3.1

1) Calcula el valor de x en cada una de las siguientes proporciones.

a) $\frac{5}{x}=\frac{12}{6}$ Rta.: $x=\frac{5}{2}$

b) $\frac{x}{\frac{1}{36}}=\frac{4}{x}$ Rta.: $x=\pm\frac{1}{3}$

c) $\frac{-\frac{5}{4}}{5}=\frac{x}{0,2}$ Rta.: $x=-0,05$

d) $\frac{x}{\frac{1}{3}}=\frac{0,27}{x}$ Rta.: $x=\pm 0,3$

e) $\frac{x+1}{2x}=\frac{3}{4}$ Rta.: $x=2$

f) $\frac{x+3}{x-2}=\frac{5}{3}$ Rta.: $x=9,5$

g) $\frac{2}{2x-0,\overline{3}}=\frac{3}{0,25x-2}$ Rta.: $x=-\frac{6}{11}$

h) $\frac{\sqrt{25}}{x}=\frac{\frac{2}{3}-1}{6}$ Rta.: $x=-90$

i) $\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{12}{10}}{x}$ Rta.: $x=\frac{1}{2}$

j) $\frac{x}{2+0,1}=\frac{0,2^2}{0,008}$ Rta.: $x=10,5$

k) $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{11}{15}-\frac{2}{5}\right)}}{x}=\frac{-\frac{1}{6}}{(0,5)^2\cdot\frac{1}{3}}$ Rta.: $x=-\frac{1}{6}$

l) $\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{0,3}=\frac{x}{2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)}$ Rta.: $x=\frac{50}{3}$

2) Frente a un negocio se ve un cartel con la siguiente inscripción: “compre hoy todos los productos al 80% de su valor real”.

a) ¿Cuáles son las variables que intervienen en esta relación?

b) Completa la siguiente tabla:

Precio en $(P)	Precio con descuento en $ (Pd)	Razón (Pd/P)
12		
	2,5	
	7	
13		
	5	

c) Extrae alguna conclusión teniendo en cuenta la razón entre el precio con descuento y el precio original y otra considerando la relación entre la razón y el porcentaje.

d) Escribe una fórmula que nos permita calcular el precio con descuento, en función del precio original.

El rectángulo áureo

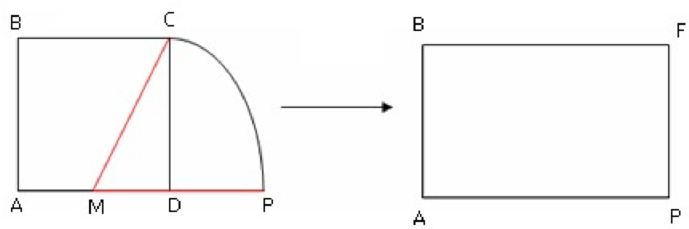
En el rectángulo áureo, se cumple que la razón entre el lado mayor y el lado menor, definen un número irracional llamado número de oro o áureo (phi, en el alfabeto griego).

Construcción del rectángulo áureo.

a) Construye un cuadrado ABCD, determina el segmento $\overline{MC}$ tal que M sea el punto medio del lado $\overline{AD}$.

b) Con centro en M, traza un arco de circunferencia de radio $\overline{MC}$ que corte a la recta que contiene al lado $\overline{AD}$ en el punto P.

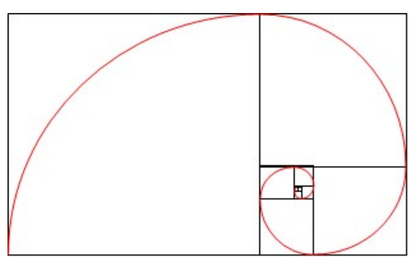
c) El rectángulo de lados $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$ es áureo.



De esta manera se obtiene un rectángulo áureo.

Realiza la verificación: la razón entre el lado mayor y el lado menor es el número de oro aproximadamente.

Encajando sucesivos rectángulos áureos se puede trazar la espiral áurea.



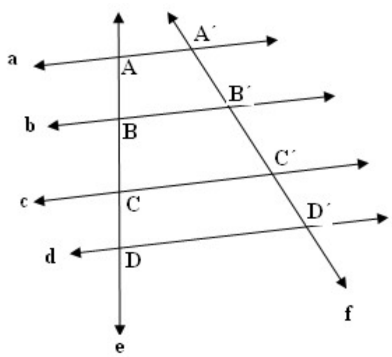
Busca y mira videos sobre: LA DIVINA PROPORCIÓN.

Utiliza el programa Geogebra para realizar un rectángulo dorado dinámico (o sea, que se pueda achicar o agrandar y siga siendo un rectángulo dorado).

Teorema de Thales

Ayuda a Pedro a dividir el pan en siete porciones iguales.

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, la razón de las longitudes entre dos segmentos determinados en una de ellas, es igual a la razón de las longitudes entre los segmentos correspondientes determinados en la otra.



Por ejemplo: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$;

a//b//c//d, e y f transversales.

Aplicando las propiedades de las proporciones, se pueden establecer distintas proporciones, también válidas.

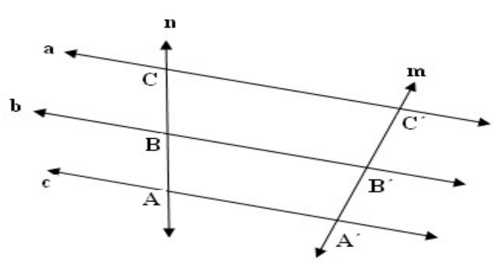
Por ejemplo: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$; $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{C'D'}}$

Calcula la medida del segmento $\overline{AB}$, siendo a//b//c

$\overline{BC} = 15\ [\text{cm}]$

$\overline{B'C'} = 30\ [\text{cm}]$

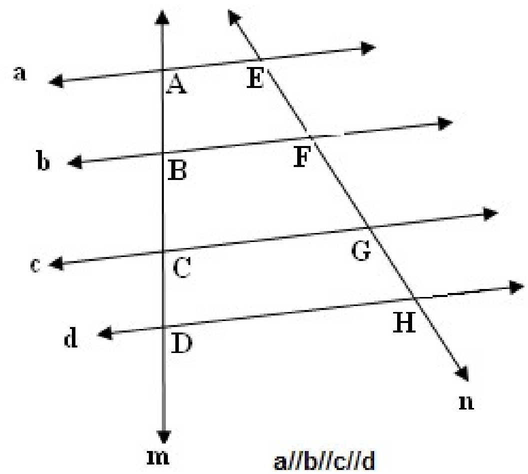
$\overline{A'B'} = 8\ [\text{cm}]$



Completa con el segmento que corresponda, según los datos del gráfico.

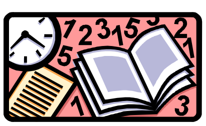
1) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ 2) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ 3) $\dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{EG}}{\ldots\ldots\ldots}$

4) $\dfrac{\overline{FG}}{\overline{FH}} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ 5) $\dfrac{\overline{AC}}{\ldots\ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\overline{EF}}$ 6) $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$



Thales de Mileto

A fines del siglo VII a.C (640 a C), Mileto era la ciudad más próspera en las costas del mar Egeo, en lo que hoy es Turquía. Y fue allí, en medio de esta efervescencia económica e intelectual, donde nació Thales.
La vida y la obra de Thales nos son prácticamente desconocidas. Lo que ha llegado hasta nosotros se reduce a algunas anécdotas relatadas por Platón, Aristóteles o Heródoto y a algunas citas que estos autores le atribuyen. Según Platón, una vez cayó en un pozo por caminar contemplando las estrellas, lo que lo convertiría en el proverbial "genio distraído"; y según Aristóteles, en cierta ocasión aprovechó sus conocimientos del cielo —en particular, del clima— para hacer dinero, demostrando así que el saber y la razón podrían también servir para ese fin; si los sabios se lo propusieran.
Thales era un hombre esencialmente práctico: comerciante, hábil en ingeniería, astrónomo, geómetra, estadista.



ACTIVIDADES 3.2

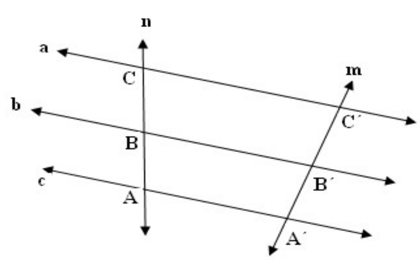
1) Considerando que a//b//c, marca con una cruz los grupos de segmentos que verifican los datos de figura.

a) $\overline{AB} = 2$; $\overline{BC} = 7$; $\overline{A'B'} = 9$; $\overline{B'C'} = 2$ ☐

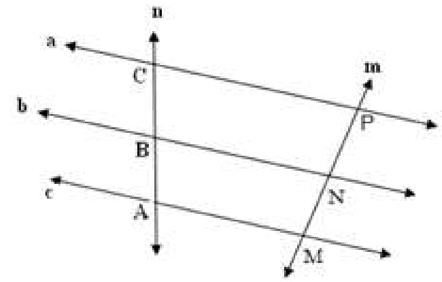
b) $\overline{AB} = 17$; $\overline{BC} = 13{,}6$; $\overline{A'B'} = 11$; $\overline{B'C'} = 8{,}8$ ☐

c) $\overline{AB} = 6{,}2$; $\overline{BC} = 5{,}2$; $\overline{A'B'} = 8{,}4$; $\overline{B'C'} = 4{,}9$ ☐

d) $\overline{AB} = 24$; $\overline{BC} = 18$; $\overline{A'B'} = 36$; $\overline{B'C'} = 27$ ☐



2) Calcula el valor de x sabiendo que a//b//c.



a) $\overline{AB} = 12[cm]$; $\overline{BC} = 16[cm]$; $\overline{MN} = 3[cm]$; $\overline{NP} = x$

Rta.: x = 4 [cm]

b) $\overline{AB} = 6[cm]$; $\overline{BC} = 8[cm]$; $\overline{MN} = x$; $\overline{NP} = 9[cm]$

Rta.: x = 6,75 [cm]

c) $\overline{AB} = x$; $\overline{AC} = 108[cm]$; $\overline{MN} = 17[cm]$; $\overline{NP} = 37[cm]$

Rta.: x = 34 [cm]

d) $\overline{AC} = 27[cm]$; $\overline{AB} = x$; $\overline{MN} = 5[cm]$; $\overline{NP} = 4[cm]$

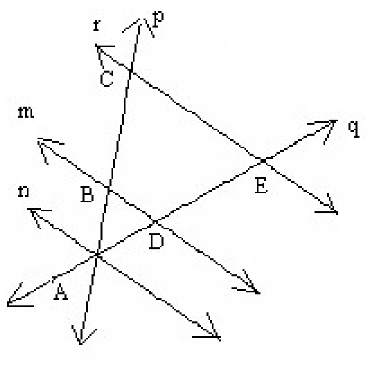
Rta.: x = 15 [cm]

e) $\overline{AB} = 2[cm]$; $\overline{BC} = 6[cm]$; $\overline{MN} = x$; $\overline{MP} = 12[cm]$

Rta.: x = 3 [cm]

3) Halla el valor de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en cada una de las siguientes figuras.

a)



$\overline{BC} = (x-6)$

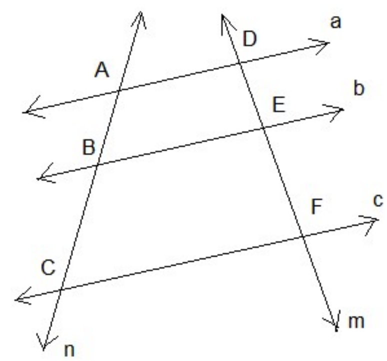
$\overline{DE} = 1,7$

$\overline{AB} = x$

$\overline{AD} = 1,9$

n//m//r

b)



$\overline{AB} = (4x-1)$

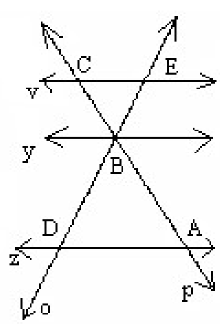
$\overline{BC} = (6x+1)$

$\overline{DE} = 2$

$\overline{EF} = 4$

//b//c

c)



v//y//z

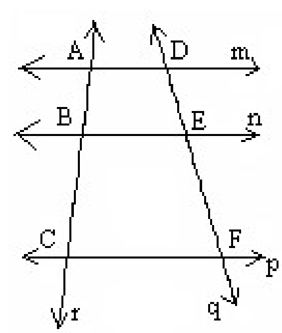
$\overline{BC} = 2x+3$

$\overline{BD} = 2,6$

$\overline{EB} = 2,8$

$\overline{AB} = 3x-1$

d)



m//n//p

$\overline{AB} = x$

$\overline{BC} = 3x-21$

$\overline{DE} = 8$

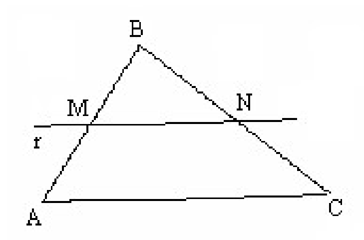
$\overline{EF} = 10$

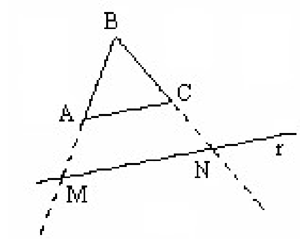
Rtas: a) $\overline{AB}=57$, $\overline{BC}=51$ b) $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=10$ c) $\overline{AB}=8,9375$, $\overline{BC}=9,625$ d) $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=15$

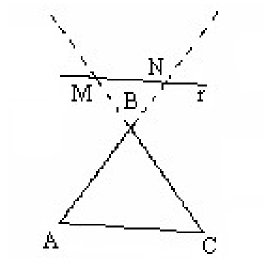
Corolario del Teorema de Thales

Toda recta paralela al lado de un triángulo, que corte a los otros dos lados o sus prolongaciones, determina sobre éstos, segmentos proporcionales.

En los tres casos, siendo $\vec{r}\,//\,\overline{AC}$

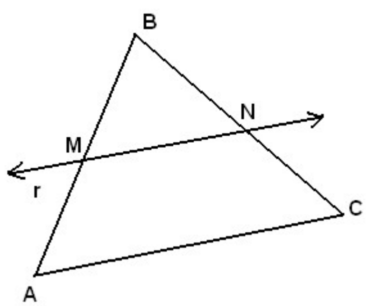






Se cumple que:

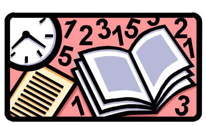
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{BN}} \qquad \frac{\overline{NB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{CB}}$$



Como dice el enunciado se mantiene la proporción en el tercer lado.

Tomando como referencia el primer triángulo, demuestra que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{MN}}$$



ACTIVIDADES 3.3

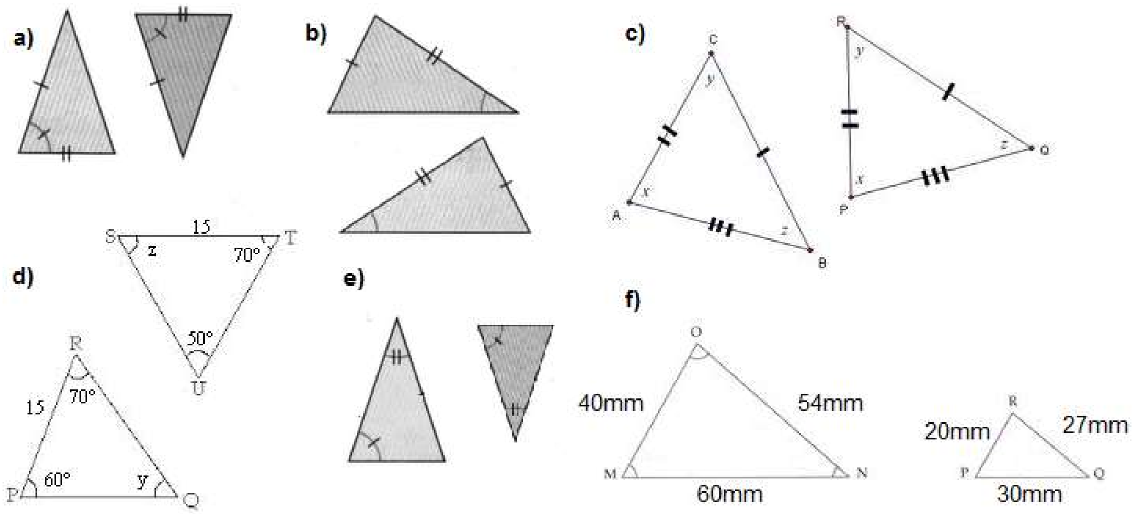
1) Plantea y resuelve cada uno de los siguientes problemas:

a) Un alumno está parado junto a un mástil izando la bandera. Si la sombra que proyecta el mástil es de 1,2 [m] y la del alumno 0,50 [m]. ¿Cuál es la altura del mástil si el alumno mide 1,60 [m]? Rta: 3,84 [m]

b) Una sierra tiene una altura de 400 [m] sobre el nivel del mar y su ladera, desde el pie hasta la cumbre, 560 [m]. ¿A qué altura, sobre el nivel de mar, se encuentra un escalador que ya recorrió en subida 350 [m] por la ladera? Rta: 250 [m]

c) Desde la orilla de un arroyo, con una moneda de 2,5 [cm] de diámetro colocada a 5 [cm] de mis ojos, tapo exactamente mi visión de un poste de 1,70 [m] de altura situado en la ribera de enfrente. ¿Cuánto mide el ancho del arroyo? Rta: 340 [cm]

2) a) Determina los pares de triángulos congruentes. Justifica tu elección.



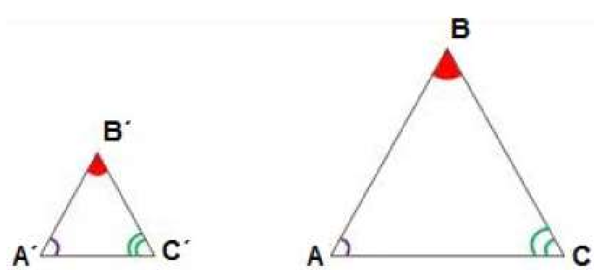
b) Aquellos que no lo son, ¿Qué características tienen?

Triángulos Semejantes

Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales y sus ángulos interiores respectivamente iguales.

Si los triángulos $A\overset{\Delta}{B}C$ y $A`\overset{\Delta}{B`}C`$ son semejantes, entonces sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos interiores, respectivamente iguales.

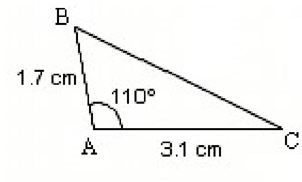
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A`B`}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A`C`}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B`C`}} \qquad \text{y} \qquad \hat{A} = \hat{A`}\ ;\ \hat{B} = \hat{B`}\ ;\ \hat{C} = \hat{C`}$$

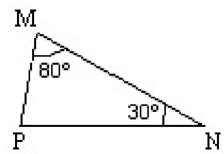


Estos triángulos son semejantes y se simboliza:

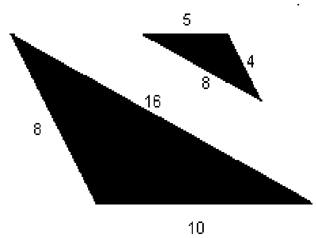
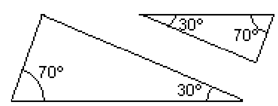
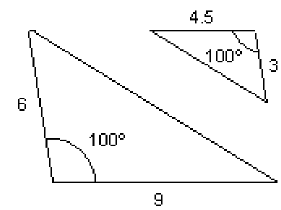
$$A\overset{\Delta}{B}C \approx A`\overset{\Delta}{B`}C`$$

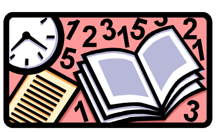
Construye un triángulo semejante a cada uno de los dibujados





En cada caso, ¿Son los únicos que se pueden construir? ¿Por qué?

Los **CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS** establecen que dos triángulos son semejantes si:		
 Sus tres lados correspondientes son proporcionales (LLL)	 Tienen dos ángulos iguales (AA)	 Tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual (LAL)



ACTIVIDADES 3.4

1) Construye dos triángulos semejantes de manera que la razón entre sus lados sea 2.

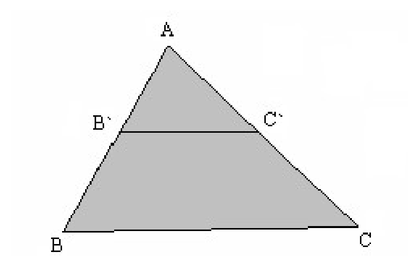
a) ¿Cómo son sus ángulos?
b) ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
c) ¿Cuál es la razón entre sus áreas?
d) Realiza los ítems anteriores, ahora con una razón igual a 3. Extrae conclusiones.

2) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) Cualquier par de triángulos equiláteros son semejantes.
b) Si dos triángulos tienen un ángulo interior igual a 120º, entonces son semejantes.
c) Si los lados de dos triángulos son respectivamente paralelos, entonces son semejantes.

3) Demuestra que los triángulos de la figura, $A\overset{\Delta}{B}C$ y $A\overset{\Delta}{B`}C`$ son semejantes.

Dato: $\overline{BC} // \overline{B`C`}$



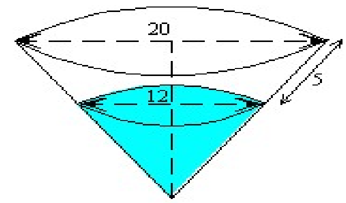
4) Demuestra que si dos triángulos rectángulos coinciden en un ángulo agudo, entonces son semejantes.

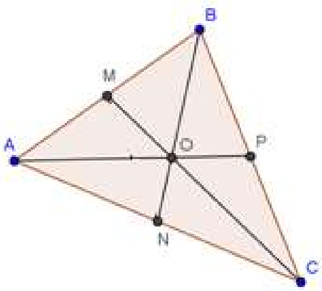
5) Demuestra cada uno de los enunciados:

a) Si dos triángulos isósceles tienen el mismo ángulo desigual, entonces son semejantes.

b) Dos triángulos rectángulos isósceles siempre son semejantes.

6) Sobre un depósito cónico que contiene líquido se toman los siguientes datos. Halla la profundidad del depósito.

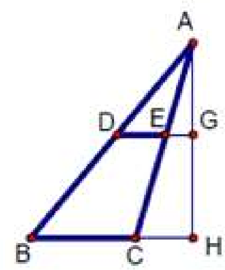




7) En el triángulo ABC traza la base media MP y demuestra que la distancia de O al vértice A es 2/3 de la mediana AP.

8) Sea ABC un triángulo de base $\overline{BC} = 4\left[cm\right]$ y de altura $\overline{AH} = 6\left[cm\right]$, $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ y $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AH}$. Calcula el área del triángulo ADE.

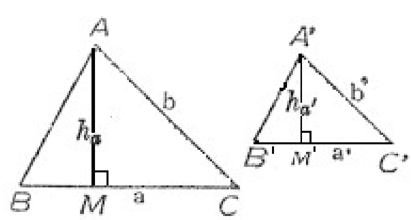
Sugerencia: establece proporcionalidad de alturas.



Para tener en cuenta…

Las alturas correspondientes de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes.

De esta forma, si $A\overset{\Delta}{B}C \approx A`\overset{\Delta}{B}'C`$ podemos plantear la siguiente proporción: $\frac{h_a}{h_{a`}} = \frac{a}{a`}$

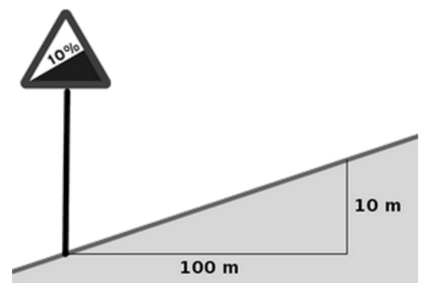


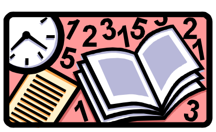
Matemática en contexto: Cálculo de pendiente de un camino

En el reglamento general de circulación puedes encontrar señales como la que se muestra y si viajaste por un camino de montaña quizás habrás visto indicaciones parecidas a las siguientes:

Ellas nos indican una subida (o, en su caso, bajada) con cierta pendiente. La cifra indica la pendiente en porcentaje.

Pero, ¿qué significa ese porcentaje? Es una forma de expresar la relación entre el desnivel que debemos superar y la distancia que recorremos horizontalmente.
Así, una pendiente del 10% significa que superamos 10 metros de desnivel por cada 100 metros de avance en horizontal.





ACTIVIDADES 3.5

a) El puerto de montaña es una ruta o paso para cruzar un sistema montañoso. En Argentina encontramos el Abra del Acay, ubicado en Salta y se lo considera el paso carretero más alto del mundo sobre una ruta nacional. El mismo cuenta con una pendiente media del 4,5%. ¿Cuál es el desnivel que salvamos si recorremos por este puerto 17 [km]? Rta.: 764 [m] Aprox.

b) Uno de los puertos más duros a los que se enfrentan los ciclistas es El Angliru, en España. El mismo comienza en La Vega (Riosa), a 305 [m] sobre el nivel del mar y tiene una longitud de 12,5 [km]. Si lo recorremos completo hemos salvado un desnivel de 1,3[km]. ¿Cuál es la pendiente de este puerto? Rta.: 10,5% Aprox.

c) El Mirador del Potrero es un mirador natural ubicado en las Sierras de San Luis. El camino de ascensión desde la Ruta Provincial 3, ha sido utilizado como final de etapa en el Tour de San Luis. Andando por esa vertiente de la sierra, el recorrido es de 4,8 [km] hasta el punto más alto. Si tenemos en cuenta que al final del camino nos hemos desplazado 4789,5 [m] horizontalmente, ¿cuál es la pendiente media de este camino? Rta.: 6,6% Aprox

d) Otro puerto mítico en el ciclismo es El Galibier, situado en los Alpes Franceses. A lo largo de los últimos cien años se han escrito allí algunas de las páginas más gloriosas del ciclismo. Por una de sus vertientes la ascensión comienza en Le Monêtier-Les-Bains, que está a 1470 [m] sobre el nivel del mar, y se alcanzan los 2645 [m] del Galibier después de recorrer 22,5 [km]. ¿Cuál es su pendiente media? Rta: 5,2% Aprox.

Trigonometría

La Trigonometría, ¿Para qué sirve?

Trigonometría es la rama de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. La palabra trigonometría se deriva del griego: trigon, que significa triángulo, y metra, que significa medida.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa (figura 1). Se usaba un aparato llamado teodolito (figura 2), que permitía medir ángulos. El primer teodolito fue construido en 1787, pero eran pesados y la lectura de sus limbos (círculos metálicos) era complicada y fatigosa.

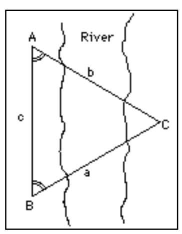


figura 1

figura 2

Un teodolito moderno es un pequeño telescopio, que se usa en geodesia o agrimensura, montado en la plataforma de un trípode de forma tal que sus ángulos de dirección y de inclinación se pueden leer fácilmente en escalas graduadas.

Los teodolitos electrónicos actualmente permiten realizar trabajos de medición más seguros, fáciles y con menos error que un instrumento óptico convencional.

Con el teodolito se pueden obtener las amplitudes de los ángulos cenitales y naridales.

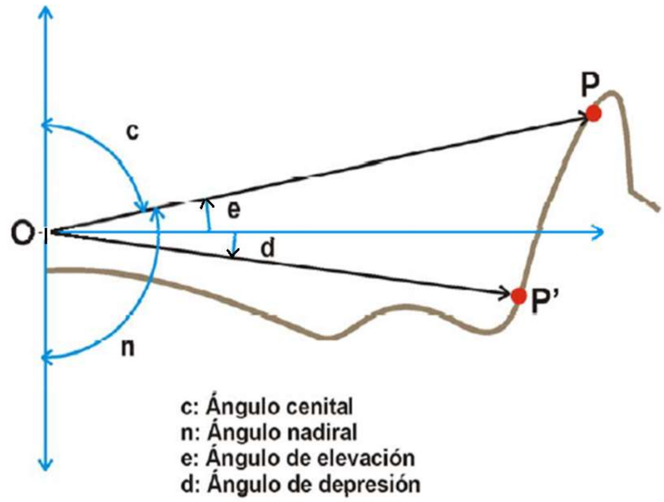
ÁNGULOS VERTICALES

Un ángulo vertical está contenido dentro de un plano vertical, este plano es perpendicular a un plano horizontal, y sirve para definir la inclinación de una línea sobre el terreno.

Existen algunas clases de ángulos verticales:

Ángulo de pendiente: Cuando se toma como línea de referencia la línea horizontal, el cual puede ser de elevación o de depresión.

Ángulo cenital: Cuando se toma como línea de referencia el extremo superior de la línea vertical. El cenit es perpendicular a la superficie de la tierra.



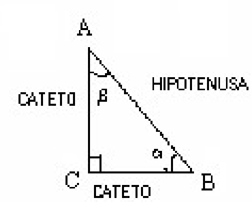
Ángulo nadiral: Cuando se escoge como línea de referencia el extremo inferior de la línea vertical. El nadir es el punto opuesto al cenit.

Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la física, química y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.

Actualmente, la trigonometría, es parte de la matemática y se emplea en muchos campos del conocimiento, tanto teóricos como prácticos, e interviene en toda clase de investigaciones geométricas y algebraicas en las cuales aparecen las llamadas funciones trigonométricas, de gran aplicación además en la electricidad, termodinámica, investigación atómica, sistemas de navegación por satélites, astronomía, etc.

Razones Trigonométricas

Recordemos que en todo triángulo rectángulo se cumple que:



$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$ y que $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90º$

Además, las propiedades generales de los triángulos.

Realiza las siguientes actividades:

a) Construye triángulos rectángulos, de diferentes tamaños con un ángulo agudo de 30º.

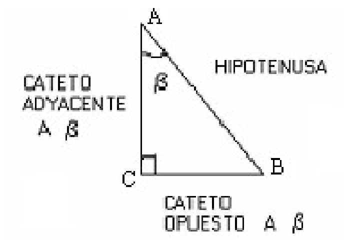
b) Mide sus lados.

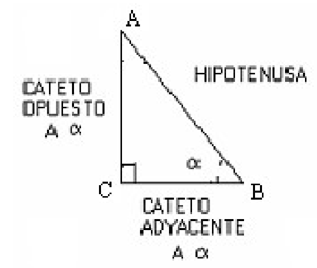
c) Realiza el cociente entre el cateto opuesto, al ángulo dado, y la hipotenusa de todos los triángulos construidos. ¿Cómo resultan dichos cocientes? ¿Por qué?

d) Realiza el cociente entre el cateto adyacente, al ángulo dado, y la hipotenusa de todos los triángulos construidos. ¿Cómo resultan dichos cocientes? ¿Por qué?
e) Registra los resultados obtenidos.

Razones trigonométricas

Se llaman razones trigonométricas a aquellas que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos agudos del mismo.
Para cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, uno de los catetos se denomina adyacente y el otro, opuesto.





Las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

Se llama **seno**, **coseno** y **tangente** de α, siendo α uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, a las siguientes razones:

$$sen\alpha = \frac{cat\ \ opuesto\ \ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{cat\ \ adyacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$tg\ \ \alpha = \frac{cat\ \ opuesto\ \ a\ \ \alpha}{cat\ \ adyacente\ \ a\ \ \alpha}$$

❖ Si lo que se conoce es el **ángulo**, para calcular las razones trigonométricas se utiliza la calculadora científica y dichos valores se obtienen de la siguiente manera:

- $sen\ 30^{o} = 0{,}5$
- $\cos\ 40^{o}25'5'' \cong 0{,}76$
- $tg\ 60^{o}\ 48'' \cong 1{,}73$

❖ Si lo que se conoce es la **razón trigonométrica** y se quiere conocer el valor del ángulo:

- $sen\ \ x = 0{,}48 \quad \Rightarrow \quad x = arcsen(0{,}48) = 28^{o}\ 41'\ 7''$
- $\cos\ x = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = \arccos(0{,}5) = 60^{o}$
- $tg\ \ x = 1{,}85 \quad \Rightarrow \quad x = arctg(1{,}85) = 61^{o}36'\ 25''$

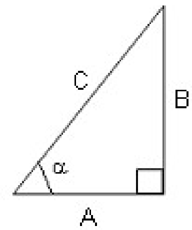
Escribe como cociente, entre A, B o C. según corresponda.

a) $sen\ \alpha$

b) $\cos\ \alpha$

c) $tg\ \alpha$

d) $\dfrac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}$



ACTIVIDADES 3.6

1) En cada caso realiza una figura de análisis de un triángulo rectángulo, escaleno $B\overset{\Delta}{A}C$, recto en *A,* y marca en él los datos que se dan a continuación. Para cada triángulo calcula la medida de los lados y ángulos restantes. Redondea las respuestas a los centésimos.

a) $A\hat{B}C = 35^{\circ}$ $\overline{BC} = 8\left[cm\right]$

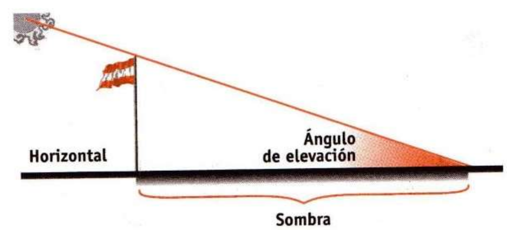
b) $A\hat{C}B = 56^{\circ}$ $\overline{AB} = 6,2\left[cm\right]$

c) $\overline{AB} = 7\left[cm\right]$ $\overline{AC} = 2\left[cm\right]$

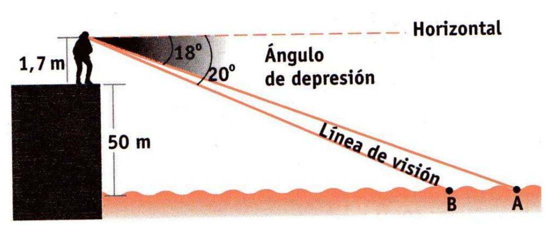
2) Un mástil tiene 15 [m] de alto.

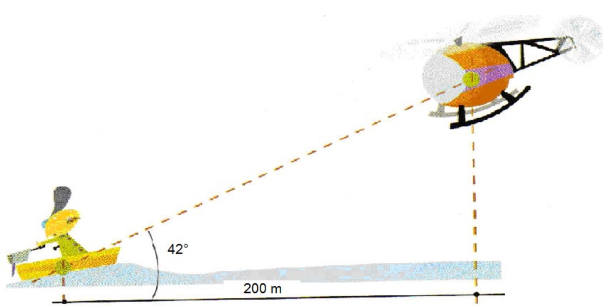
a) ¿Cuánto mide la sombra que proyecta cuando el ángulo de elevación del sol es de 57º? Rta: aprox. 9,74 [m]

b) ¿Qué distancia hay desde el extremo del mástil hasta el de su sombra? Rta: aprox. 17,88 [m]

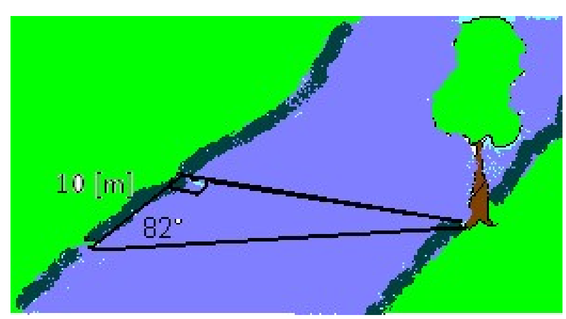


3) Una persona de pie sobre un acantilado de 50 [m] de altura observa dos boyas con ángulos de depresión de 18º y 20º respectivamente, como muestra el esquema. Calcula la distancia entre las boyas. Rta: aprox. 17 [m]





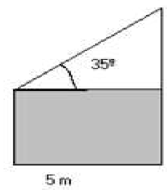
4) ¿A qué altura está el helicóptero?
Rta: 180 [m]



5) Para medir el ancho de un río, un agrimensor coloca una marca exactamente frente a un árbol que está en la otra orilla. Luego camina 10 [m] en forma paralela al río y mide qué ángulo se ha desviado de la posición inicial

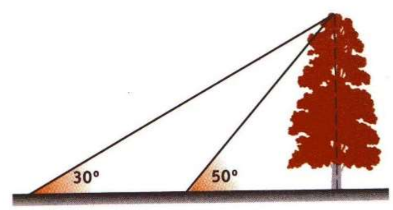
(en este caso 82º). ¿Cuánto mide el ancho del río? Rta: aprox. 71,15 [m]

6) Un camionero va a usar la rampa para subir una caja muy pesada hasta el depósito de su camión (75 [cm] sobre el suelo). La rampa está inclinada 32º con respecto al suelo. ¿Qué longitud tiene la rampa? Rta: aprox. 141,53 [cm]



7) La inclinación del techo de una casa debe ser de 35º; la distancia entre las paredes exteriores es de 5 [m]. ¿Qué diferencia de altura debe haber entre las paredes para que la inclinación del techo sea la deseada? Rta: 3,5 [m]

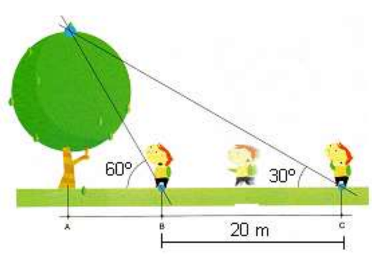
8) Desde lo alto de un árbol se tensan dos cables y se atan al piso, como se ve en la figura. El más alejado queda a 40 [m] de la base del árbol. Calcula:

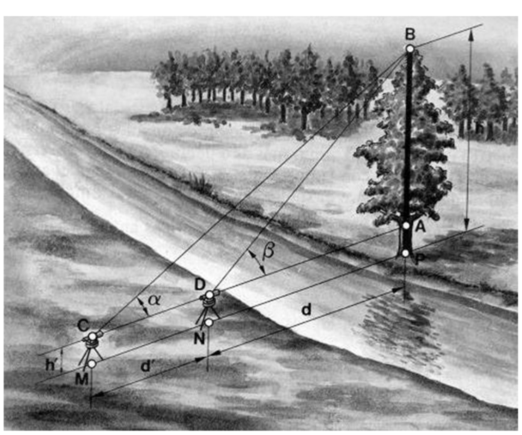


a) La altura del árbol. Rta: aprox. 23,09 [m]
b) La longitud de ambos cables. Rta: aprox. 30,14[m] y 46,19[m]
c) La distancia, a nivel del piso, entre ambos cables. Rta: aprox. 20,63 [m]

9) Existen camiones que poseen un sistema volcador que cuenta con un brazo movible que une la caja volcadora con el chasis. Mientras se realiza la operación de volcado, el brazo se extiende hasta alcanzar los 4 [m] de longitud, y su extremo superior se encuentra a una altura aproximada de 3,75 [m] con respecto al chasis. ¿Cuál es la amplitud aproximada del ángulo que forma el brazo con el chasis mientras se realiza el volcado? Rta: 69º 38’ 9’’

10) Determina la altura de un árbol, si el ángulo de elevación con que se observa su parte superior cambia de 30º a 60º cuando el observador avanza 20 [m] hacia la base del árbol. Rta: 17,4 [m]





11) Con objeto de determinar la altura de un árbol situado en un lugar inaccesible, se dispone un teodolito en un punto accesible y desde el mismo se lanza una visual al punto más alto del árbol, obteniéndose un ángulo cenital de 67º 13'. A continuación, se adelanta el teodolito una distancia de 10 [m] en dirección al árbol y se

vuelve a lanzar otra visual al mismo punto, obteniéndose, en este caso, un ángulo cenital de 58º 41'.

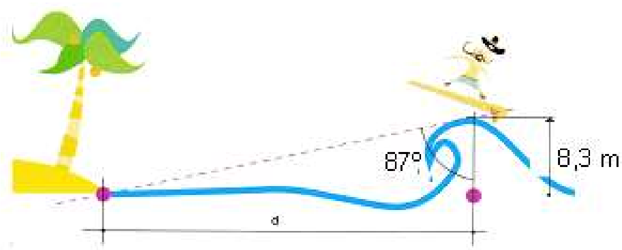
Calcula:

a) Las amplitudes de α y β .

b) La altura del árbol, considerando que el teodolito está a 1,5 [m] del suelo. Rta: 14,95 [m]

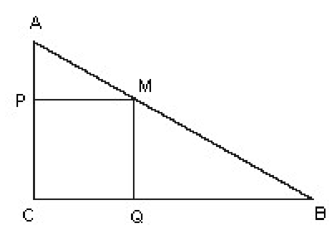
12) Una persona maneja su automóvil a lo largo de un camino sin curvas cuya inclinación es de 25º con respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra con respecto al punto de partida después de recorrer 700 [m]? Rta: aprox. 295,8 [m]

13) En 1936, en la playa de Waikiki, Tom Blake realizó la cabalgata más larga sobre una ola usando una tabla. Calcula la distancia **d.** Rta: aprox.158,4 [m]



14) María y Luis miran, con un teodolito, el extremo superior de un monumento, con un ángulo de elevación de 15º. Si el teodolito está situado a 1,40 [m] del suelo, y el monumento mide 64 [m] de altura, ¿a qué distancia están los chicos del pie del monumento? Rta: aprox. 233,6 [m]

15) En la siguiente figura ABC es un triángulo rectángulo en C. El cuadrilátero PMQC es un cuadrado.



$\overline{AC} = 7,5\ [cm]$

$\overline{AP}$ mide la mitad de lo que mide $\overline{\mathrm{MQ}}$

a) ¿Qué criterio de semejanza permite afirmar que los triángulos AMP y MQB son semejantes? Justifica tu respuesta.

b) ¿Podemos afirmar que los triángulos APM Y CAB son semejantes? ¿Por qué?

c) Calcula analíticamente la medida de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{\mathrm{MQ}}$ y $\overline{\mathrm{QB}}$.

d) Halla analíticamente la amplitud del ángulo $Q\hat{B}M$.

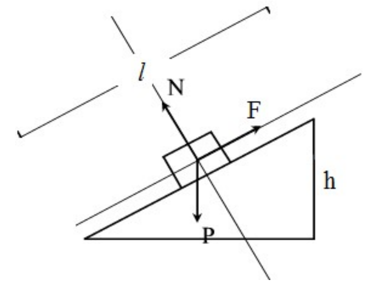
Matemática en contexto: Plano Inclinado

Mediante un plano inclinado de 3,5[m] de longitud y 1,4[m] de altura, se sube un cuerpo de 200[kg]. ¿Cuál será la intensidad de la fuerza que lo equilibra, sin considerar rozamiento?

Para resolver la situación se recomienda realizar un esquema y ubicar los datos:

En este caso P = 200[kg], h = 1,4[m] , *l* = 3,5[m] y hay que calcular la magnitud de F.

Para calcular la magnitud de la fuerza F que equilibra el plano, descomponemos las fuerzas y hacemos la sumatoria sobre cada eje. Es recomendable girar el sistema de ejes de tal forma que uno de ellos quede paralelo al plano.



Descomponemos el peso en x e y:

- Sobre el eje Y sabemos que no hay desplazamiento, por lo tanto:

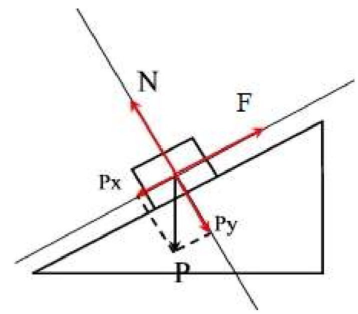
$N - P_y = 0$

$N = P_y$

- Sobre el eje X, si queremos equilibrar el sistema:

$F - P_x = 0$

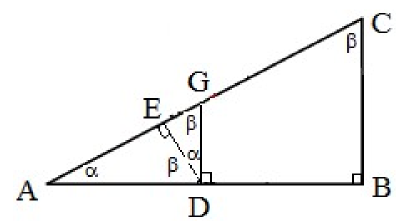
$F = P_x$



Para resolver la situación tenemos que hallar la magnitud de P_x.

La figura anterior puede vincularse con la siguiente, en donde:

BC = h = 1,4[m]   AC = *l* = 3,5[m]   GD = P = 200[kg]



- ¿Qué representa el segmento EG? ¿Y el ED?

Observa que los ángulos:

BAC = EDG   ADE = EGD = ACB

- Justifica las igualdades anteriores

- ¿Cómo son los triángulos ABC, AED y EGD? ¿Por qué?

- ¿Qué relación puedes establecer entre los lados de esos triángulos?

- Teniendo en cuenta los triángulos ABC y EGD, completa: $\frac{h}{l} = \frac{}{}$

Entonces podemos deducir que:

F = Px = ...

Estas fuerzas tienen igual magnitud pero sentidos diferentes.

¡A resolver el problema inicial!

Sistemas de Medición de ángulos

Para medir la amplitud de los ángulos se pueden usar diferentes sistemas de medición. Estuvimos trabajando con uno de ellos, el sexagesimal que es el más usual en la vida cotidiana.

Para medir la amplitud de un ángulo, utilizamos habitualmente como unidad de medida el grado sexagesimal que simbolizamos 1º.

Un grado sexagesimal es la amplitud de un ángulo cuya medida es igual a la noventava parte de un ángulo recto. Simbólicamente:

$$1º = \frac{1R}{90} \Rightarrow 1R = 90º$$

También puede expresarse:

$$1º = \frac{2R}{180} \Rightarrow 2R = 180º; \qquad 1º = \frac{1\,\text{Giro}}{360} \Rightarrow 1\,\text{Giro} = 360º; \qquad 1º = \frac{R}{90} = \frac{2R}{180} = \frac{1\,\text{Giro}}{360}$$

De este modo, los submúltiplos:

Un minuto sexagesimal es la amplitud de un ángulo igual a la sesentava parte de un ángulo de un grado sexagesimal

$$1' = \frac{1º}{60} \Rightarrow 1º = 60'$$

Un segundo sexagesimal es la amplitud de un ángulo igual a la sesentava parte de un ángulo de un minuto sexagesimal

$$1'' = \frac{1'}{60} \Rightarrow 1' = 60''$$

También podemos definir 1° sexagesimal teniendo en cuenta la correspondencia que puede establecerse entre ángulos centrales de una circunferencia y las longitudes de arcos de circunferencias que abarcan o subtienden de la misma.

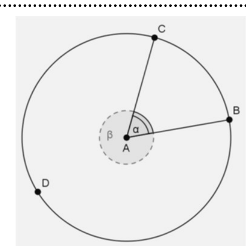
Sea *L* la longitud de una circunferencia de radio *r*.

$$L = 2\pi \cdot r \leftrightarrow 360°$$

$$\frac{L}{2} = \pi \cdot r \leftrightarrow 180°$$

$$\frac{L}{4} = \frac{\pi \cdot r}{2} \leftrightarrow 90°$$

Entonces: $\ldots\ldots\ldots\ldots \leftrightarrow 1°$



El **ángulo central** tiene su vértice en el centro de la circunferencia.El ángulo central α es convexo y el ángulo central β es cóncavo**.**

Se denomina **arco de circunferencia** a la parte de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma.

En el gráfico anterior:

El arco BC, correspondiente al ángulo central α, no contiene al punto D.

El arco CB, correspondiente al ángulo central β, si contiene al punto D.

ACTIVIDADES 3.7

1. ¿Qué amplitud, en grados, minutos y segundos sexagesimales tiene un ángulo que es la octava parte de un ángulo de 157º?

2. Obtiene en grados sexagesimales la amplitud de un ángulo que es el triple de un ángulo de 98º25’ de amplitud.

3. Dada una circunferencia de radio 5 [cm]:

a) Obtiene la longitud de arco correspondiente a un ángulo de:

a) 30° b) 60° c) 90° d) 150° e) 75°

b) Responde: ¿Existe una proporción entre la amplitud del ángulo y la longitud de arco que abarca?

4. Sabiendo que la longitud de arco es 10 [cm] y el radio mide 40 [cm] obtiene, si es posible, la amplitud del ángulo central correspondiente a dicho arco.

5. Si el radio de una circunferencia mide 7 [cm] y la longitud de arco que abarca es 28 [cm], encuentra, si es posible, la amplitud del ángulo central correspondiente a dicho arco.

6. La longitud de arco de una circunferencia es 12 [cm], calcula, si es posible, la amplitud del ángulo central correspondiente a dicho arco.

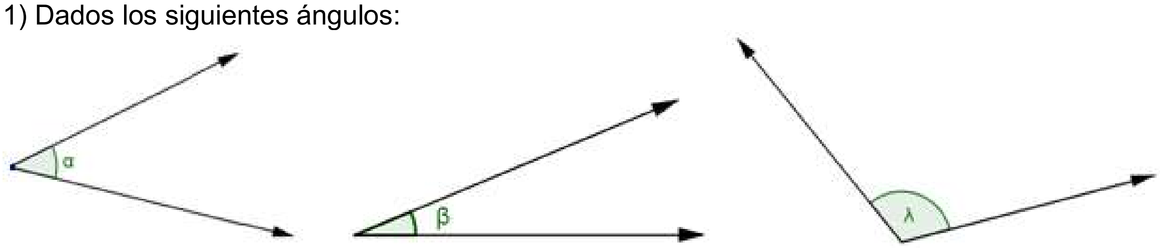
A continuación veremos una unidad angular que no cuenta con dichas arbitrariedades.

Sistema Circular o Radianal

Para ciertos fines teóricos, así como para el trabajo en otras áreas como física, mecánica, astronomía, es ventajoso utilizar una unidad distinta para medir ángulos. Numerosas e importantes fórmulas, adquieren una forma más sencilla con este nuevo sistema.

Para resolver las siguientes actividades el grupo de alumnos se dividirá en 6 grupos (G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 y G_6)

1) Dados los siguientes ángulos:



(i) **(ii)** **(iii)**

a) Reconstrúyanlos usando solamente compás, regla y/o escuadra.

b) Respondan: i) ¿qué amplitud tienen? (solo puede usarse compás, regla y/o escuadra)
ii) ¿cómo obtuvieron dichas medidas? ¿Qué unidad de medida usaron?

2) Para esta actividad cada grupo, G_n, dibuja una circunferencia cuyo radio mida n [cm] (G_1 circunferencia cuyo radio mide 1 [cm], G_2 una de radio 2 [cm], el G_3 una de 3 [cm], etc.)

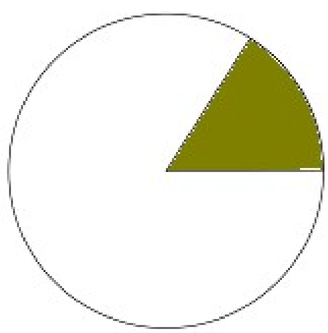
a) En la misma, representen un ángulo central con la misma amplitud que tiene el ángulo α .

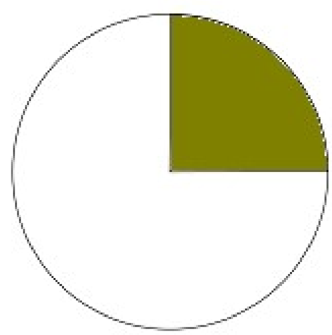
b) i) Midan y registren la longitud de arco correspondiente al ángulo α.
ii) Comparen con los otros grupos las medidas obtenidas. Registren en la siguiente tabla:

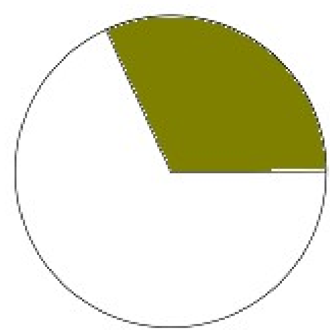
	Medida del radio	Longitud de arco	Longitud de arco/Medida del radio
G_1	1 [cm]		
G_2	2 [cm]		
G_3	3 [cm]		
G_4	4 [cm]		
G_5	5 [cm]		
G_6	6 [cm]		

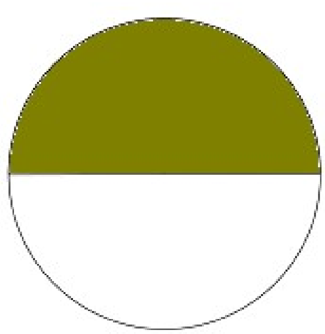
c) Respondan:
i) ¿Son iguales o distintas las medidas obtenidas en cada grupo? ¿Por qué?
ii) ¿Qué unidad de medida usaron para medir la longitud de arco? ¿Por qué?
iii) ¿Qué otras unidades de medidas podrían haber usado?
iv) ¿Cambia la cantidad de la medida de la longitud de arco usando otra unidad? ¿Por qué?
ii) ¿Las magnitudes "longitud de arco" y "longitud de radio" son directamente proporcionales? ¿Por qué?

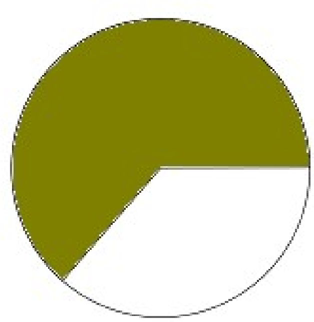
3) Cada grupo, G_n, dibuja una circunferencia cuyo radio mida n [cm] y en la misma:
a) Construyan un ángulo central que abarque una longitud de arco equivalente al radio.
b) Recorten el sector circular construido y úsenlo como unidad para medir los siguientes ángulos.

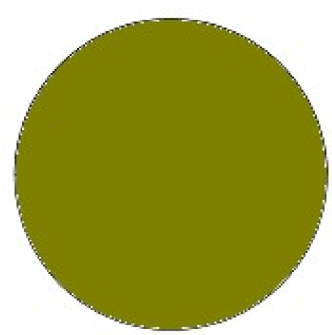

(i)


(ii)

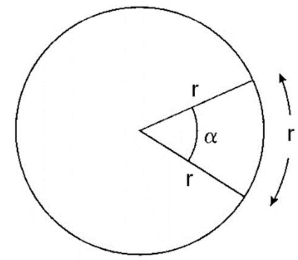

(iii)


(iv)


(v)


(vi)

c) Si llamamos radián a la unidad usada en el ítem anterior, respondan: ¿cuáles son las medidas de los seis ángulos centrales sombreados en el ítem b)? Registren y comparen con los otros grupos.
d) Midan el ángulo construido en el ítem 3 a) considerando como unidad el grado sexagesimal. Comparen con los demás grupos. Extraigan una conclusión



α = 1 radian = 1 [rad]

Un radián es la amplitud de un ángulo central que subtiende un arco de circunferencia que tiene la misma longitud que el radio de la misma.
Es la unidad de medida del **Sistema Circular o Radianal**.

Completen la siguiente tabla con la correspondencia adecuada:

Sistema Radianal	Sistema Sexagesimal
1 [rad]	

4) En cada uno de los ángulos centrales representados en la actividad (3):
a) Midan la Longitud de arco que abarcan y la Longitud del radio de la circunferencia que los contiene.
b) En cada caso calculen la razón [Long. de arco]/[Long. de radio]. Comparen con las medidas en radianes de cada ángulo y extraigan una conclusión.

Ángulo	Medida en radianes	[Long. de arco]/[Long. de radio]
(i)		
(ii)		
(iii)		
(iv)		
(v)		
(vi)		

5) Cada grupo, G_n, dibuja una circunferencia cuyo radio mida n [cm] y en la misma:
a) Representen un ángulo central de 30°.
b) Midan la longitud de arco que dicho ángulo abarca, registren y luego comparen con los demás grupos.
c) Respondan:
    i) ¿Cuántas veces entra la medida del radio en la longitud de arco anterior?
    ii) ¿Cuánto mide el ángulo central construido en radianes? ¿Por qué?

6) Completen con el número real correspondiente a la cantidad de veces que entra la longitud del radio de una circunferencia en la longitud de arco que dicho ángulo central abarca.
- arco correspondiente a 360° $\longleftrightarrow$ ……………..
- arco correspondiente a 180° $\longleftrightarrow$ ………………
- arco correspondiente a 90° $\longleftrightarrow$ ……………… Compara con los otros grupos.

Habrán observado que existe una correspondencia entre el ángulo central y el arco de circunferencia que abarca; a cada ángulo central le corresponde uno y sólo un arco de circunferencia.

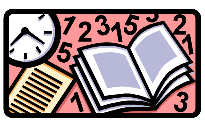
También han comprobado, que a todos los grupos les da la misma cantidad al calcular la razón [Long. de arco]/[Long. de radio] independientemente del radio de la circunferencia que hayan dibujado; esta cantidad solo depende del ángulo central.

El cociente obtenido (un número real) se corresponde con la cantidad asignada a la medida del ángulo central en radianes.

$$\frac{\text{Longitud de arco}}{\text{Longitud de radio}} = \textit{número real} \leftrightarrow \textit{cantidad de la medida de un ángulo central, medido en radianes}$$

7) Completen la siguiente tabla de correspondencias:

Amplitud de un ángulo en el Sistema Sexagesimal	$\frac{Longitud\ de\ arco}{Longitud\ de\ radio}$	Amplitud de un ángulo en el Sistema Radianal
0°	0	0 [rad]
20°		
30°		
45°		
60°		
90°		
120°		
150°		
180°	π	π [rad]
210°		
240°		
270°		
360°	2π	2π [rad]



ACTIVIDADES 3.8

1) Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de 62º?

b) ¿Un ángulo de 1,5 [rad] es menor, igual o mayor que un ángulo recto?

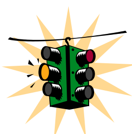
c) ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia correspondiente al ángulo de un radián?

d) ¿En una circunferencia de radio 4 [cm], cuál es la medida del arco correspondiente a un ángulo de $\frac{\pi}{4}$[rad]?

e) ¿Cuál es la amplitud en grados sexagesimales de un ángulo de 4,5 [rad]?

2) En una circunferencia de 3 [cm] de radio, marca un ángulo central de 155º. Calcula en forma exacta y aproximada su amplitud en radianes. Calcula la longitud del arco correspondiente en [cm] y tomando como unidad de medida el radio.

3) Calcula: a) $sen\left(\frac{\pi}{3} rad\right)$ b) $cos\left(\frac{\pi}{4} rad\right)$ c) $tg\left(\frac{\pi}{6} rad\right)$



En esta calculadora:
- el Modo 1 corresponde al sistema sexagesimal.
- el Modo 2 corresponde al sistema radianal.
- el Modo 3 corresponde al sistema centesimal.

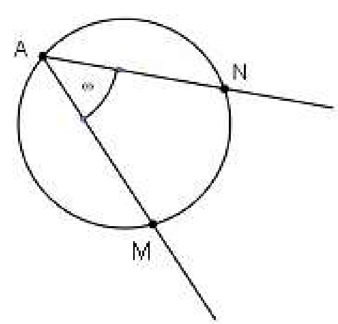
Ángulo inscripto, semiinscripto y central

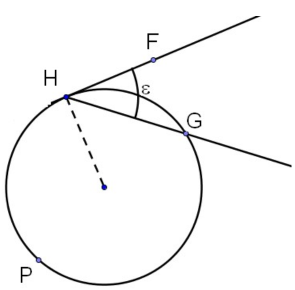
Ángulo inscripto:

Se llama ángulo inscripto en una circunferencia a todo ángulo que tiene su vértice en un punto de la circunferencia y sus lados pasan por los extremos de un arco.

$\hat{\omega}$ es un ángulo inscripto en el arco MN que contiene al punto A (Se puede decir arco MAN).

$\hat{\omega}$ abarca o contiene el arco MN que no contiene al punto A.



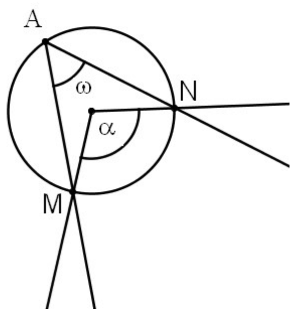


Ángulo Semiinscripto:

Se llama ángulo semiinscripto en una circunferencia a todo ángulo que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados está contenido en una recta secante a ella y el otro en una recta tangente a la misma.

$\widehat{\varepsilon}$: es un ángulo semiinscripto en el arco HG que contiene al punto P. (Se puede decir arco HPG).

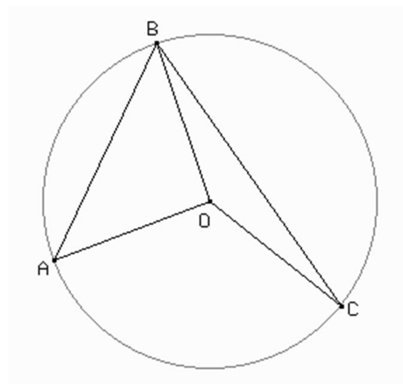
$\widehat{\varepsilon}$: abarca o contiene el arco HG que no contiene al punto P.



Ángulo Central:

El ángulo central correspondiente a un ángulo inscripto es aquel que, teniendo su vértice en el centro de la circunferencia, abarca el mismo arco que el ángulo inscripto.

$\hat{\alpha}$ es el ángulo central correspondiente al ángulo inscripto $\hat{\omega}$



Demuestra que:

1) La amplitud de todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad de la amplitud del ángulo central correspondiente.

Sugerencia: observar los triángulos isósceles de la figura.

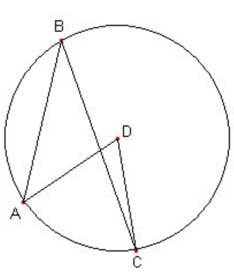
2) La amplitud de todo ángulo semiinscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad de la amplitud del ángulo central correspondiente.

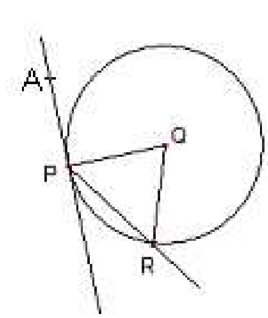
3) Las amplitudes de un ángulo inscripto y de un ángulo semiinscripto en un mismo arco de circunferencia, son iguales.

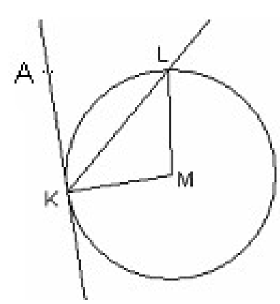
4) Todo ángulo inscripto en una semicircunferencia es recto. Realiza figura de análisis.

ACTIVIDADES 3.9

1) Halla en cada caso la amplitud del ángulo x.







Datos:

$A\hat{B}C = 25^o$

$A\hat{D}C = X$

D centro de Circ.

Datos:

$A\hat{P}R = X$

$P\hat{Q}R = 68^o$

$\overleftrightarrow{AP}$ es tangente

Q centro de circ.

Datos:

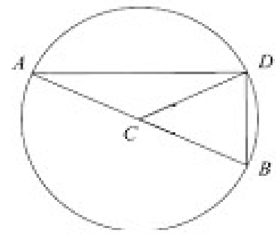
$A\hat{K}L = 48^o$

$K\hat{M}L = X$

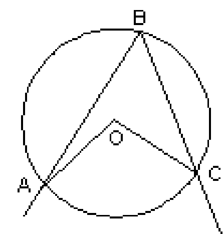
$\overleftrightarrow{AK}$ es tangente

M centro de circ.

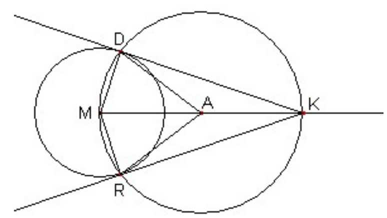
2) C es el centro de la circunferencia y pertenece al lado $\overline{BA}$. Establece cual es la amplitud de $B\hat{A}D$ y cuál es la de $A\hat{D}B$, sabiendo que la amplitud de $D\hat{C}B$ es 60º.



3) En la figura O es el centro de la circunferencia. Determina la amplitud del ángulo $B\hat{A}C$, sabiendo que el ángulo $B\hat{C}O$ mide 35º y el ángulo $A\hat{O}C$ mide 100º. JUSTIFICA todos los pasos.



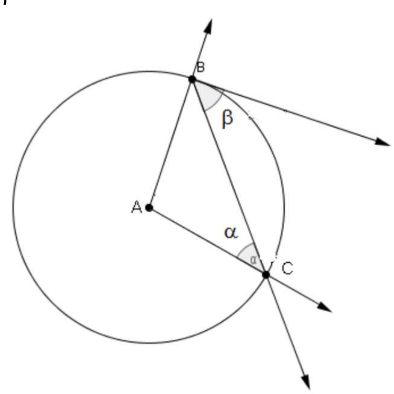
4) Averigua la amplitud del ángulo $R\hat{M}A$ y del ángulo $D\hat{K}R$, sabiendo que la amplitud del ángulo $D\hat{A}R$ es 75º. M y A son los centros de las dos circunferencias.



5) Calcula la amplitud de $\hat{\alpha}$ sabiendo que $\hat{\beta}$ = 50º.

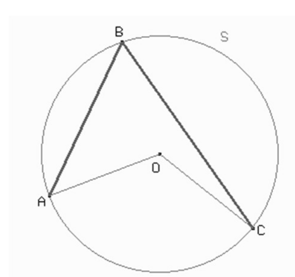
A: Centro de la circunferencia

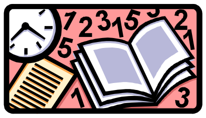
$\hat{\beta}$: Ángulo semiinscripto



6) AB̂C = 2x y AÔC = 3x + 15º

Halla la amplitud de cada uno de los dos ángulos dados.





ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1) Halla el valor de x en cada una de las siguientes proporciones:

a) $\dfrac{1-\sqrt{\frac{3}{4}-2^{-1}}}{x} = \dfrac{0,2^{2}+\frac{73}{50}}{\left(\frac{1}{3}-2\right).0,24}$

b) $\dfrac{\left(2x-\frac{1}{3}\right).0,2}{\left(0,25-1\right)^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{5}-3x}{\sqrt{\frac{19}{4}+1,5}}$

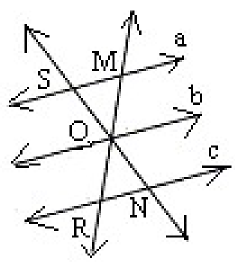
c) $\dfrac{\left(\frac{4}{3}-0,4\right):\left(-\frac{7}{3}\right)}{1+\sqrt{\frac{1}{3}+3^{-2}}} = \dfrac{\frac{29}{25}-0,6^{2}}{x}$

d) $\dfrac{\left(\frac{3}{5}-1\right)^{-1}}{\left(3x+0,25\right).\frac{8}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{2,5-\frac{21}{8}}}{0,6-4x}$

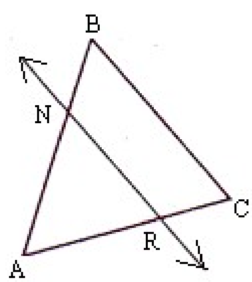
Rta: a) $-\dfrac{2}{15}$ b) $\dfrac{1}{30}$ c) $-\dfrac{10}{3}$ d) $\dfrac{1}{12}$

2) Halla el valor de x en cada una de las siguientes figuras.

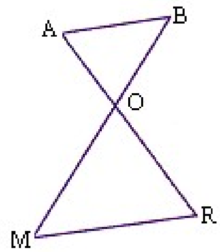
a) $\begin{cases} a//b//c \\ \overline{OS}=8[cm] \\ \overline{ON}=5[cm] \\ \overline{MR}=6,5[cm] \\ \overline{OR}=x \end{cases}$



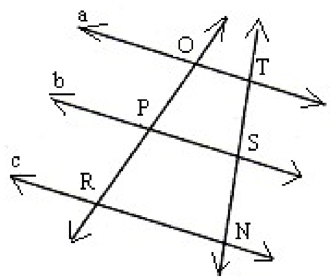
b) $\begin{cases} \overline{NR}//\overline{BC} \\ \overline{AN}=4[cm] \\ \overline{AB}=4x+1[cm] \\ \overline{AR}=5[cm] \\ \overline{RC}=4x-2,25[cm] \end{cases}$



c) $\begin{cases} \overline{AB} // \overline{MR} \\ \overline{OB} = 3[cm] \\ \overline{OM} = 7{,}5[cm] \\ \overline{AR} = 14[cm] \\ \overline{OR} = x \end{cases}$



d) $\begin{cases} a // b // c \\ \overline{OR} = 23[cm] \\ \overline{PR} = 4x + 1[cm] \\ \overline{NT} = 27{,}6[cm] \\ \overline{SN} = 5x + 0{,}5[cm] \end{cases}$



Rtas: a) x = 2,5[cm]   b) x = 1,5[cm]   c) x = 10[cm]   d) x = 3,5[cm]

3) Decimos que un segmento *x* es cuarto proporcional a otros tres segmentos A, B y C, si se verifica $\frac{A}{B} = \frac{C}{x}$. Halla analítica y gráficamente el cuarto proporcional a los segmentos A = 5 [cm], B = 7 [cm] y C = 4 [cm]

4) Decimos que un segmento *x* es tercero proporcional a otros dos segmentos A y B, si se verifica $\frac{A}{B} = \frac{B}{x}$. Halla analítica y gráficamente el tercero proporcional a los segmentos A = 6 [cm] y B = 4 [cm]

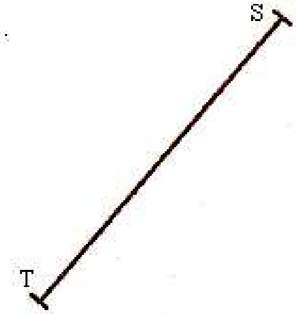
5) Divide el segmento M, en dos partes *x* e *y* de modo que se verifique que $\frac{x}{y} = \frac{A}{B}$ siendo:

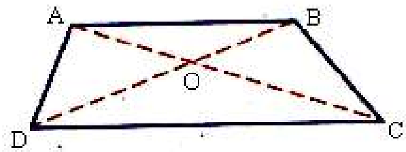
M   A   B

6) Divide el segmento P en dos partes *x* e *y* de modo que $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Resuelve gráfica y analíticamente.

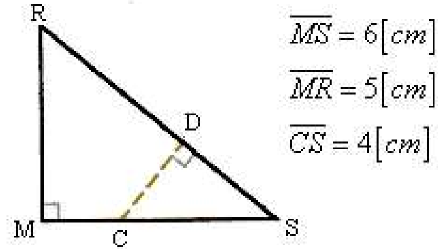
P

7) Divide el segmento $\overline{ts}$ en 5 partes iguales, utilizando el teorema de Thales.





8) Descubre en el trapecio ABCD de la figura un par de triángulos semejantes y justifica por qué lo son.



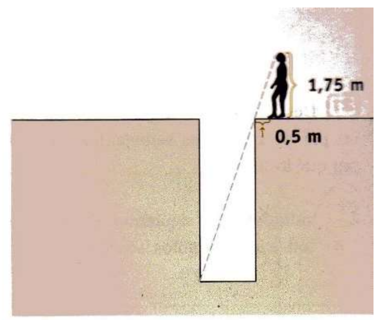
9) Teniendo en cuenta la siguiente figura y las medidas dadas:

a) Explica por qué se puede asegurar que los triángulos $M\overset{\Delta}{R}S$ y $C\overset{\Delta}{D}S$ son semejantes.

b) Calcula la medida de $\overline{CD}$.

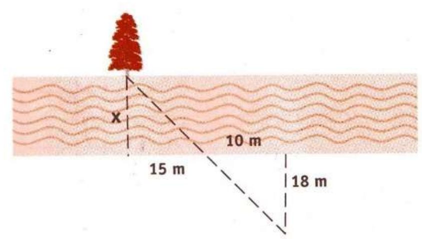
10) Averigua cuál es la profundidad del pozo, si se sabe que su ancho es de 1,6 [m] y que la altura de la persona es de 1,75 [m].

Rta: 5,6 [m]



11) Fernando necesita medir el ancho del canal y para ello toma, desde una de las orillas, las medidas indicadas en el esquema. ¿Cómo hace para calcular el ancho del canal con los datos que tiene? ¿Qué resultado obtiene?

Rta: 27 [m]

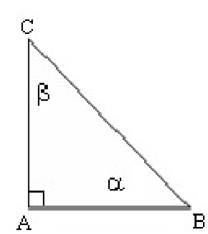


12) Para medir la altura del obelisco imita a Thales. La sombra que proyecta un palo de 1,5[m] de longitud mide 30 [cm] a cierta hora del día; a esa misma hora la sombra del obelisco tiene una longitud de 13,4[m].

a) Responde: ¿Cuál es la altura del obelisco? Rta: 67 [m]

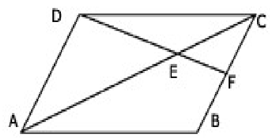
b) Utiliza el método de Thales para medir la altura de un árbol o una edificación que esté en la escuela.

13) Justifica si los siguientes enunciados son Verdaderos o Falsos.



a) En el triángulo rectángulo isósceles ABC de la figura, se cumple que $sen\,\alpha = \cos\beta$.
b) El seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo puede dar como resultado 1.
c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 [cm] y uno de sus ángulos agudos 40º, luego uno de los catetos mide 6 [cm]
d) Si $\cos\alpha = w$ entonces $sen(90º - \alpha) = w$
e) Las razones trigonométricas se definen a través de los lados de cualquier triángulo.

14) Una escalera de 6 [m] de longitud descansa sobre una pared vertical de tal manera que el pie de la escalera queda a 1,5 [m] de la base de la pared. ¿Cuál es el ángulo que la escalera forma con la pared y hasta qué altura de la pared llega la escalera? Rta: 14° 28´39´´ y 5,81 [m]



15) ADCB es un paralelogramo. $\overline{DE} = 8[cm]$, $\overline{EF} = x+2[cm]$, $\overline{AE} = 10[cm]$, $\overline{EC} = x+3[cm]$.

a) Demuestra que los triángulos ADE y CEF son semejantes.

b) Halla las medidas de los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{EC}$. Rta: $\overline{EF} = 4[cm]$ y $\overline{EC} = 5[cm]$

16) En el siguiente triángulo: los ángulos $B\hat{A}C$ y $A\hat{D}C$ son rectos, $\overline{BC} = 18[cm]$ y $\overline{AC} = 12[cm]$.

Calcula $\overline{AD}$. Rta: $\overline{AD} = 8,94[cm]$

17) Una persona parada junto a un edificio observa que la sombra que proyecta el edificio es de 15[m] y la sombra de él es de 1,2 [m]. Si la persona tiene 1,75 [m] de altura. Responde:

a) ¿Cuál es la altura del edificio? Rta: 21,875[m].

b) ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol en ese momento del día? Rta:55° 33´ 39´´

18) La mayor de las pirámides de Egipto, es una pirámide recta de base cuadrada de 233 [m] de lado y su altura es de 137,18 [m]. Calcula:

a) Su apotema (la apot. de una pirámide es la altura de cada una de las caras laterales). Rta: 179,97 [m]

b) La arista lateral. Rta: 214,39[m]

c) La superficie lateral. Rta: 83.866,02[m^2]

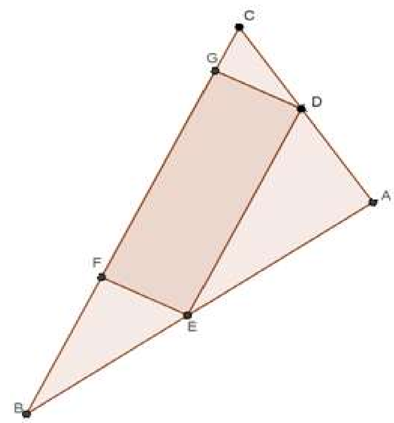
d) El ángulo que forman las caras laterales con el plano de la base. Rta: 49° 39´34´´

19) Calcula el perímetro y el área de un pentágono regular inscripto en una circunferencia de 10 [cm] de radio.

20) En el romboide ABCD $\overline{AB} = \overline{BC} = 10[\text{cm}]$, $\overline{CD} = \overline{DA}$, $C\hat{D}A = 40^{\circ}, B\hat{C}A = 30^{\circ}$.

Halla la amplitud de los ángulos interiores del romboide, su perímetro y su área.

21) El cuadrilátero EFGD es un rectángulo, y el triángulo ABC es recto en A.



a) Demuestra que todos los triángulos determinados en la figura son semejantes.

b) Sabiendo que $\overline{AB} = 6,71\left[cm\right]$, $\overline{AC} = 3,8\left[cm\right]$ y $\overline{AE} = 3,58\left[cm\right]$, calcula el perímetro del rectángulo dado.

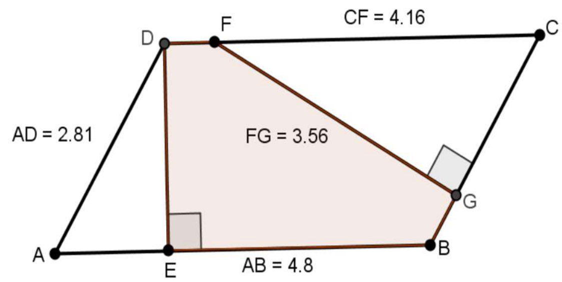
c) Obtiene la amplitud de los ángulos agudos del triángulo CDG.

22) Sabiendo que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo y considerando los datos que aparecen en la figura:

a) Demuestra que los triángulos ADE y CFG son semejantes.

b) Calcula la longitud del segmento $\overline{DE}$ y el área sombreada.

c) Obtiene la amplitud de los ángulos del polígono DEBGF.



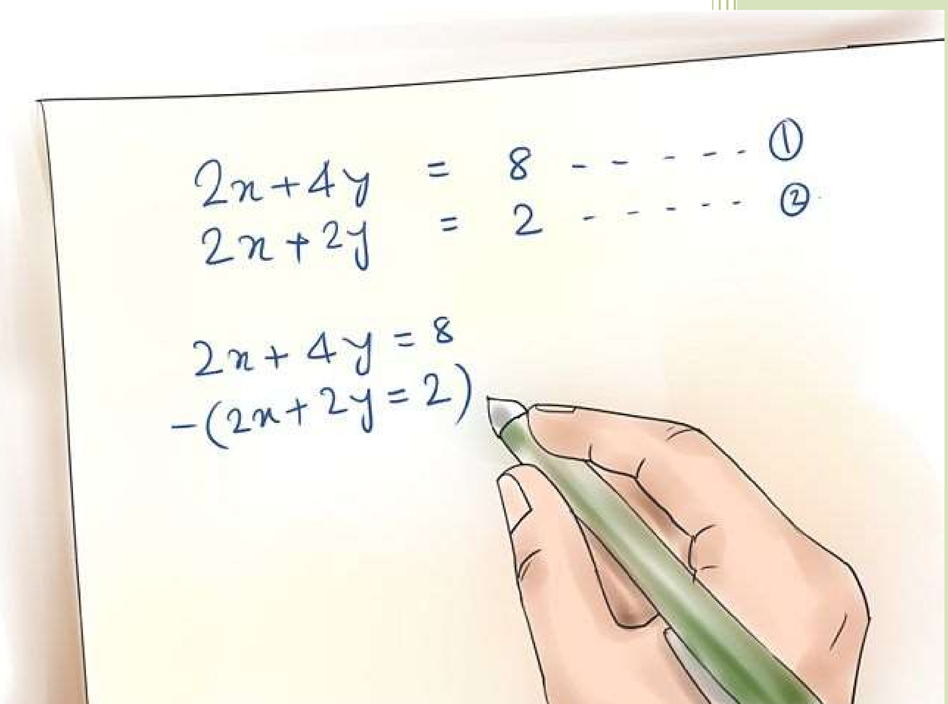
23) Un punto se mueve sobre una circunferencia de radio 4,5 [cm] en el sentido contrario a las agujas del reloj. Cuando recorre $\frac{2}{5}$ de la longitud de la circunferencia:

a) ¿Cuál es la medida del arco que le falta recorrer para dar una vuelta completa? Rta.:16,96[cm]

b) ¿Cuál es la medida en radianes del ángulo correspondiente a ese arco? Rta.: 3,76rad

24) Una curva de una carretera se corresponde con un arco de circunferencia de 920 [m] de radio y abarca un ángulo central de 28º 35´. ¿Cuánto tiempo tardará un automóvil en recorrer la curva si su velocidad es de 107 [km/h]? Rta.: 15,41 [s]

Capítulo 4: Sistemas de Ecuaciones



- Resolución gráfica
- Clasificación según el conjunto solución
- Resolución analítica:
  - Método de sustitución
  - Método de igualación
- Problemas

Sistemas de Ecuaciones

Resuelve las siguientes situaciones:

a) Un tren sale de la ciudad de Salsacate a las 8 [h] a 50 [km/h]. A las 10 [h], otro tren sale a 75 [km/h] de la misma ciudad y en la misma dirección sobre una vía paralela. ¿A qué hora alcanzará el segundo tren al primero?

b) Talía y Ailén fueron a la veterinaria a comprarse mascotas. Talía compró 2 hámster y 3 canarios a $810. Ailén quiso también comprarse estas mismas mascotas, compró 4 hámster y 3 canarios a $950. ¿Cuál es el precio de un hámster y de un canario?

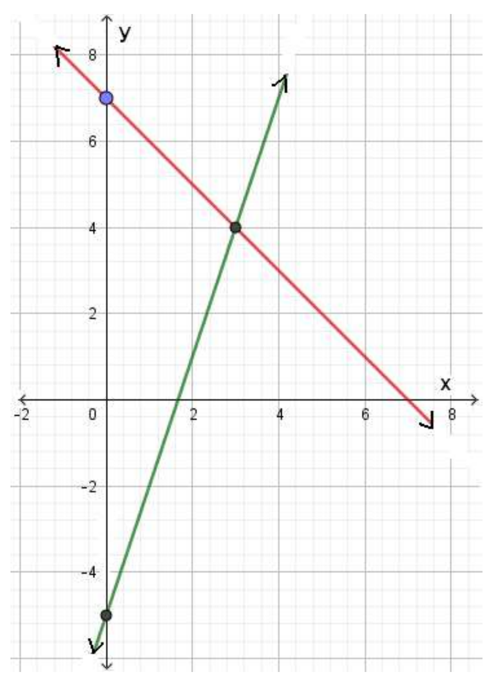
c) Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4 la suma es 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma es 174.

Anteriormente analizamos funciones lineales que se pueden representar con una ecuación de la forma y = a x + b ,con dominio y codominio en el conjunto de números reales. Esta igualdad se puede interpretar como una ecuación lineal con dos incógnitas que son x e y. Geométricamente es una recta y los pares (x ; y) que verifican la ecuación son infinitos, ya que a una recta pertenecen infinitos puntos. Por esto decimos, que tiene infinitas soluciones.
Ahora, si consideramos otra ecuación lineal y = c x + d, con dominio en el conjunto de números reales, también tendrá infinitos pares (x ; y) que la verifiquen, pues también es una recta. Por lo tanto también tendrá infinitas soluciones.
Entonces, si trazamos dos rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos, ¿habrá un par (x; y) o un punto del plano que verifique las dos ecuaciones a la vez?

Para analizar esta cuestión, realizamos la gráfica del siguiente par de ecuaciones lineales.

Primera ecuación lineal: $x + y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 7 - x$

Segunda ecuación lineal: $3x - y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 5$



En el gráfico, observamos que las coordenadas del punto (3; 4) verifican las dos ecuaciones lineales a la vez, esto es, las coordenadas del punto (3; 4) son solución tanto de la primera como de la segunda ecuación. Observamos que es el punto de intersección entre las dos rectas y sus coordenadas son la solución del sistema de ecuaciones.

Verifica lo anterior en el programa Geogebra. Cuando aparezca la pantalla del Geogebra en la parte inferior tiene una barra de "entrada". Ahí puedes escribir una ecuación del sistema, luego enter y a continuación escribes la otra ecuación. Verás que el programa grafica las dos rectas. Busca la intersección entre las rectas y a la izquierda de la pantalla (vista algebraica) aparecerán las coordenadas del punto de intersección.

Dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas cada una, determinan un sistema de ecuaciones.

- Cada una de las ecuaciones del sistema tiene por solución a todos los puntos de una recta.
- Resolver un sistema de ecuaciones significa hallar los valores, de las dos incógnitas, que verifican ambas ecuaciones del sistema.
- La interpretación gráfica de esto último es: La ***solución del sistema son las coordenadas del punto de intersección*** de las rectas que representan a las ecuaciones del sistema.

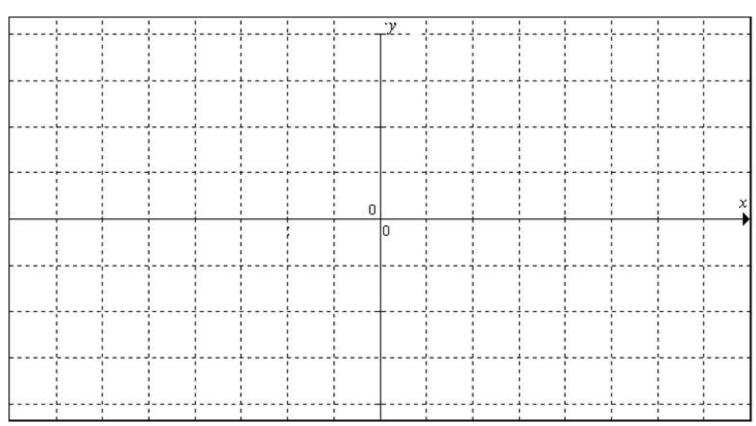
En el ejemplo anterior:

El sistema de ecuaciones lineales es $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-y=5 \end{cases}$. La solución del sistema son las coordenadas del punto (3 ; 4), lo que significa que x = 3 e y = 4.

Pero, te preguntaste: ¿qué pasaría si las rectas fueran paralelas?
Para analizar esta situación planteamos dos situaciones posibles:

Inventa dos ecuaciones de rectas paralelas con distintas ordenadas al origen y luego, grafícalas.

$$\begin{cases} y= \\ \\ y= \end{cases}$$



Si las rectas son paralelas y tienen distintas ordenadas al origen, ¿tienen algún punto en común?……………………………………………………………………

Si la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas son los valores de las incógnitas que verifican las dos ecuaciones, este sistema, ¿tiene solución?………………..

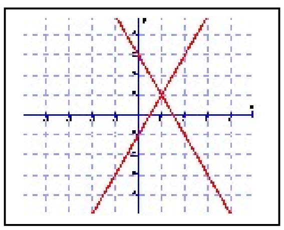
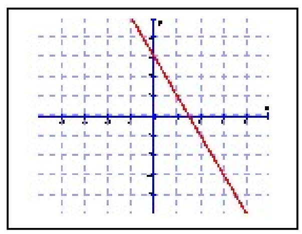
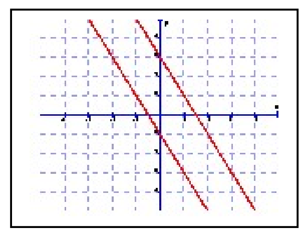
Considerando ahora, rectas paralelas con igual ordenada al origen, Responde:

¿Tienen algún punto en común?……………………………………………

Si la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas son los valores de las incógnitas que verifican las dos ecuaciones, este sistema, ¿tiene solución?……….........

¿Cuántos pares (x; y) son solución de este sistema de ecuaciones?……………………………

Clasificación de los sistemas de ecuaciones, según su conjunto solución.

Compatible Determinado	**Compatible Indeterminado**	**Incompatible**
Una única solución 	Infinitas soluciones 	Sin solución 
Las rectas del sistema se intersecan en un único punto y las coordenadas de éste son la solución del mismo.	Las rectas del sistema son coincidentes y todos los puntos sobre las mismas son solución del sistema.	Las rectas del sistema son paralelas no coincidentes.
Las pendientes de las rectas son	Las pendientes de las rectas son .... y las ordenadas al origen	Las pendientes de las rectas son .... y las ordenadas al origen ....

Resolución Analítica de los sistemas de ecuaciones

Hay varios métodos analíticos para hallar la solución de un sistema de ecuaciones; dos de ellos son:

Método de Igualación:

Resolvamos el sistema utilizando este método: $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

Primero, se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} x+y=7 \Rightarrow & y=7-x \\ 3x-y=5 \Rightarrow & y=3x-5 \end{cases}$$

Luego, se igualan las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante.

$$3x-5=7-x$$
$$3x+x=7+5$$
$$4x=12 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{x}=3$$

Por último, se reemplaza el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las ecuaciones del sistema dado y se obtiene el valor de la otra incógnita.

$\mathrm{y}=3\cdot 3\text{-}5 \Rightarrow \quad \mathrm{y}=4$

Entonces, obtenemos la solución del sistema de ecuaciones que son las coordenadas del punto (3; 4).

<u>Método de Sustitución:</u>

Con este nuevo método resolvamos el mismo sistema de ecuaciones.

Primero, se despeja una de las incógnitas (cualquiera de las dos) de una de las ecuaciones.

$$\begin{cases} x+y=7 \Rightarrow & y=7-x \\ 3x-y=5 & \end{cases}$$

Luego, se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve:

$$3x-(7-x)=5$$
$$3x-7+x=5$$
$$3x+x=5+7$$
$$4x=12$$
$$x=3$$

Por último, se reemplaza el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las ecuaciones del sistema dado y se obtiene el valor de la otra incógnita.

y = 7 – 3 = 4

Entonces, obtenemos la solución del sistema de ecuaciones que son las coordenadas del punto (3; 4) .

<u>Método de Reducción:</u>

Consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por el número que convenga obteniendo ecuaciones equivalentes, donde los coeficientes de la variable que se quiere eliminar sean iguales u opuestos. Luego se restan o suman las mismas de modo que se elimine la variable deseada.

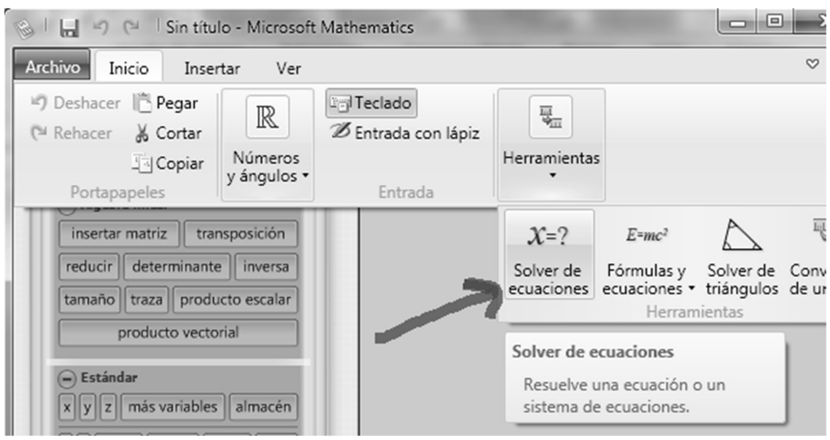
$$\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-y=5 \end{cases} \text{ se multiplica la } 1^{era} \text{ ecuación por 3 } \begin{cases} 3x+3y=21 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

Luego se restan ambas ecuaciones y se obtiene:

$$(3x+3y)-(3x-y)=21-5$$
$$4y=16$$
$$y=4$$

Para finalizar se sustituye el valor de y en una de las ecuaciones y se obtiene el valor correspondiente a x.

 Puedes verificar tu resolución usando el Microsoft Mathematics.



 1) Resuelve gráfica y analíticamente los siguientes sistemas. También, clasifícalos según su conjunto solución.

a) $\begin{cases} x+2y=2 \\ -x+y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 4x-2y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -4x+2y=-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-3y=3 \\ -x+3y=6 \end{cases}$

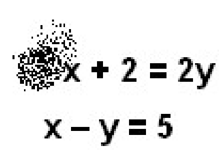
2) Determina en cada caso qué valor debe tener m para que el sistema $\begin{cases} -x+2y=6 \\ mx+2y=4 \end{cases}$ sea:

i) Compatible determinado.

ii) Compatible indeterminado.

iii) Incompatible.

3) Sabiendo que x = 3 es parte de la solución del sistema que se muestra a la derecha, calcula el coeficiente que está manchado.



ACTIVIDADES 4.1

1) Resuelve los siguientes sistemas con algún método analítico y luego, verifica sus soluciones.

a) $\begin{cases} 2x - 6y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x - y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -x - \dfrac{3}{2}y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + 6 = 3y \\ 5y - 3 = 7 - x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + 1 = 5x + 3 \end{cases}$

Rtas: a) $(1;0)$ b) $\left(\dfrac{13}{11}; -\dfrac{4}{11}\right)$ c) $(-5;11)$ d) inf sol. e) $(0;2)$ f) $\left(-\dfrac{1}{7}; \dfrac{9}{7}\right)$

2) Lee los siguientes problemas y en cada uno de ellos:

- analiza y detalla las variables (incógnitas) en juego,
- escribe el planteo correspondiente (puedes incluir un gráfico para orientarte),
- encuentra la solución correspondiente a cada uno.
- Responde a las preguntas planteadas.

a) En el colegio, algunas aulas tienen 30 bancos y otras tienen 35. Si en total hay 19 aulas y 630 bancos, cuántas aulas de 30 bancos y cuántas de 35 hay. (Rta. 7 aulas de 30 bancos y 12 aulas de 35 bancos)

b) La suma de dos números es 1000 y la diferencia entre el mayor y el triple del menor es 100. ¿Cuáles son esos números? (Rta. Los números son 775 y 225)

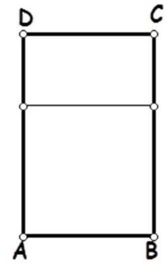
c) Un padre tiene actualmente el triple de la edad que su hijo tenía hace 10 años, dentro de 4 años la edad del padre será el doble de la edad del hijo. ¿Qué edad tienen actualmente el padre y el hijo? (Rta.72 años el padre y 34 el hijo)

d) Mauricio compró una docena de alfajores, algunos son de chocolate y otros de dulce de leche. Su hermana quiere saber cuántos compró de cada clase, y Mauricio le respondió así: “Los de chocolate cuestan $8,5 cada uno y los de dulce de leche $7. Yo gasté en total $96”. ¿Cuántos alfajores hay de cada clase? (Rta. Hay 8 alfajores de chocolate y 4 de dulce de leche)

e) ¿Cuántos litros de leche con un 10% de materia grasa tenemos que mezclar con otra leche que tiene un 4% de materia grasa para obtener 18 litros con un 6% de materia grasa? (Rta.: 6 litros de leche con un 10% de materia grasa y 12 litros de la otra)

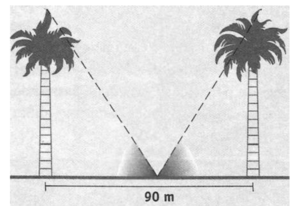
f) El perímetro de un triángulo isósceles es de 27 [cm]. Si la diferencia entre dos de sus lados es de 3 [cm]. ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados? (Rta: 7 [cm] y 10 [cm] o también 8 [cm] y 11[cm])

g) El rectángulo ABCD tiene 88 [cm] de perímetro. Al trazar una paralela al lado AB, el ABCD queda partido en un cuadrado y un rectángulo más pequeño. El perímetro del rectángulo más pequeño es 14 [cm] menos que el perímetro del cuadrado. Calcula la medida de los lados del rectángulo ABCD.(Rta: 17 [cm] y 27 [cm])



h) Obtiene el área y el perímetro del triángulo limitado por las rectas cuyas ecuaciones son: $y = 2x - 4$, $y = -\frac{2}{3}x + 5$ y el eje x. Representa gráficamente la situación. (Rta: A=7,6 [u^2] P=13,52 [u])

i) Dos palmeras, de igual altura, distan 90 [m]. Desde un punto situado sobre la recta horizontal que une sus bases, se miden dos ángulos como se observa en el esquema. Estos ángulos son de 28º y 38º. Calcula la altura de las palmeras. (Rta: 28,5 [m] aprox)



j) La razón de dos números es 3/4. Si se restan 10 unidades a cada uno de ellos la razón de los nuevos números es 7/5. Halla los números. (Rta: $\frac{60}{13}\ y\ \frac{80}{13}$)

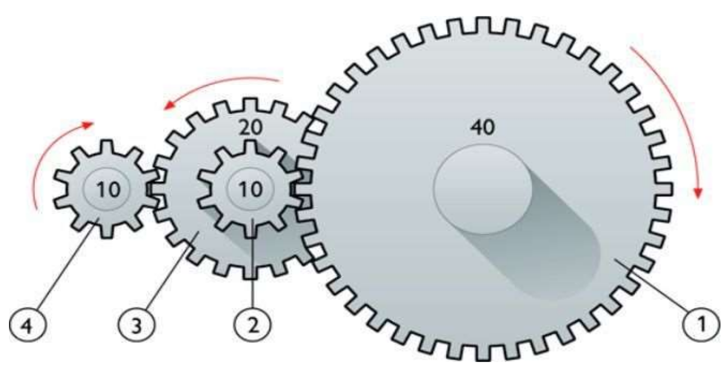
k) Una industria química, que se dedica a la producción de ácido sulfúrico, debe controlar una fuga del producto como consecuencia de una fisura en uno de sus tanques de almacenamiento. Las cantidades iniciales del tanque roto y del auxiliar son 4000 [l] y 2000 [l] respectivamente. Las velocidades de vaciado y llenado son de 20 [l/s].

i. Escribe, para cada tanque, una fórmula que permita calcular el volumen de líquido que contiene en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la maniobra.

ii. Calcula cuánto tiempo será necesario para terminar de vaciar el tanque roto. (Rta:200 [s])

iii. ¿En qué momento de la maniobra de vaciado ambos tanques igualarán su volumen? (Rta: 50 [s])

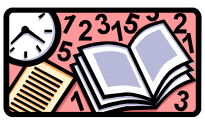
l) En la siguiente imagen se muestra un sistema de engranajes compuesto, formado por cuatro ruedas dentadas. Si el número que aparece en cada una de las ruedas indica la cantidad de dientes que tiene. Responde: ¿Cuántas vueltas deberá dar la rueda 1 para que la rueda 4 dé 20 vueltas?



3) Calcula el valor de q y t en los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} \dfrac{q}{5} - 2t = -4{,}7 \\ 3q + \dfrac{3t}{2} = \dfrac{15}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{-3t}{5} = -\dfrac{21}{5} - q \\ 48{,}8 + \dfrac{2}{3}q = 5t \end{cases}$ c) $\begin{cases} -\dfrac{9}{2} - \dfrac{t}{3} = -2q \\ \dfrac{5t}{4} + 15{,}25 - q = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{q}{m} + t = 2mn \\ q - mt = m^2 n \end{cases}$

Rtas: a) $\begin{matrix} q = -3{,}5 \\ t = 2 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} q = \dfrac{9}{5} \\ t = 10 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} q = \dfrac{1}{4} \\ t = -12 \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} q = \dfrac{3}{2}m^2 n \\ t = \dfrac{1}{2}mn \end{matrix}$



ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1) Un padre tiene 7 veces la edad del hijo y hace un año tenía 9 veces la edad del mismo. Halla las edades actuales del padre y del hijo. (Rta: 4 y 28 años)

2) El perímetro de un rectángulo es de 24 [cm]. La diferencia entre la base y la altura es de 2 [cm]. Calcula su área. (Rta. 35 [cm^2])

3) Un moderno buque de turismo tiene camarotes dobles (dos camas) y simples (1 cama). Si se ofertan 65 camarotes que en total tienen 105 camas, averigua el número de camarotes de cada tipo. (Rta. 25 camarotes simples y 40 camarotes dobles.)

4) Halla las edades de dos personas sabiendo que la suma de las mismas es, actualmente, 50 años y que la razón entre las mismas era, hace 5 años, igual a 1/3. (Rta. 15 años y 35 años)

5) Halla la base y la altura de un rectángulo sabiendo que si se aumenta 3 [cm] a la altura y se disminuye 2 [cm] a la base, su área no aumenta ni disminuye, siendo además la altura 2 [cm] mayor que la base. (Rta. base = 10 [cm]; altura = 12 [cm])

6) Una fábrica de agua lavandina ofrece dos tipos de producto. Uno de ellos (lavandina A) contiene 12% de materia activa, y el otro (lavandina B) 20% de materia activa. Responde: ¿Cuántos litros de cada uno deben utilizarse para producir 100 litros de agua lavandina con 15% de materia activa? (Rta. 62,5 litros de lavandina A y 37,5 litros de lavandina B)

7) En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si se cuentan las patas, son 134. Responde: ¿Cuántos animales hay de cada clase? (Rta. 17 conejos, 33 gallinas)

8) En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. Calcula cuántos luchadores había de cada clase. (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas). (Rta. 30 y 12)

9) En la granja se han envasado 300 [l] de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. Responde: ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado? (Rta.20 de 5 [l], 100 de 2 [l])

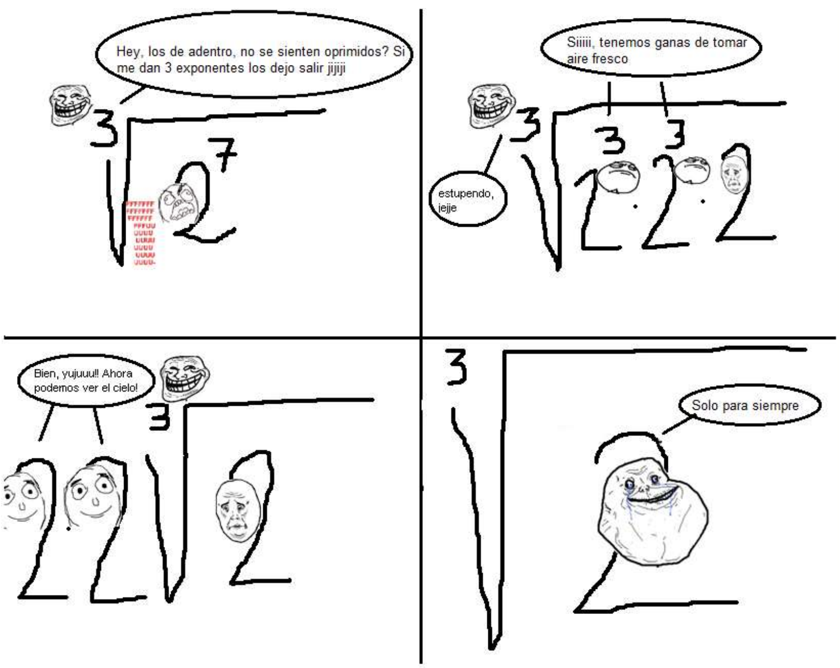
10) Al comenzar los estudios de Bachillerato se les hace un test a los estudiantes con 30 cuestiones sobre Matemática. Por cada cuestión contestada correctamente se le dan 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un alumno obtuvo en total 94 puntos. Responde: ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente? (Rta.22)
11) El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudaron $40625. Si los adultos pagaban $75 y los niños $50. Responde: ¿Cuál es el número de adultos y niños que acudieron? (Rta. 425 adultos y 175 niños)
12) En una pastelería se fabrican dos clases de tartas. La primera necesita 2,4 [kg] de masa y 3 [h] de elaboración. La segunda necesita 4 [kg] de masa y 2 [h] de elaboración. Calcula el número de tartas elaboradas de cada tipo si se han dedicado 67 [h] de trabajo y 80 [kg] de masa.
13) En una bolsa hay 16 monedas con un valor de $2,20. Las monedas son de 5 y 25 centavos. Encuentra la cantidad de monedas que hay de cada valor. (Rta. 9 monedas de 5 centavos y 7 de 25 centavos)
14) Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años sólo será el duplo. Responde: ¿Cuáles son las edades de mi padre y de mi hermano? (Rta. 15 y 35)
15) Un móvil sale de A al mismo tiempo que otro sale de B y van en sentidos opuestos uno al encuentro del otro. El primero lleva una velocidad constante de 45 [km/h] y el segundo una velocidad, también constante de 35 [km/h]. Si la distancia entre A y B es de 400 [km], Responde: ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse? (Rta. Tardarán 5 [h])
16) La distancia entre dos ciudades A y B es de 300 [km]. Un móvil sale de A hacia B con una velocidad de 12 [km/h] al mismo tiempo que otro móvil sale de B hacia A con una velocidad de 18 [km/h]. Responde: ¿A qué distancia de A se encontrarán?(Rta. 120 [km])
17) La suma de 2 números es igual a 231 y la diferencia de los mismos es 41. Halla estos números. (Rta. 136 y 95)

Retomando el formato de hojas D.I.N....

Calcula las dimensiones exactas de una hoja con formato A4. Las siguientes preguntas te orientarán para resolver la situación:

- ¿Recuerdas la superficie de la hoja con formato A0? ¿Qué superficie tiene una hoja con formato A4?
- ¿Cuál es la razón entre las dimensiones de las hojas con formato D.I.N.?

Capítulo 5: Números Reales
(Segunda parte)



- Propiedades de la potenciación y de la radicación
- Radicales – Operaciones
- Racionalización de denominadores

Propiedades de Potenciación y Radicación en R

1) Halla el área de un triángulo cuya base mide $3^{\frac{1}{2}}$ [m] y su altura $4.3^{\frac{5}{2}}$ [m], expresando el resultado en forma exacta.

2) Calcula la longitud de la altura de un triángulo equilátero cuyos lados miden **L** unidades. Para que tu respuesta sea tenida en cuenta, enuncia todos los pasos y propiedades utilizadas.

Recuerda:

<u>Propiedades de Potenciación:</u>

- Producto de Potencias de igual base: $x^n \cdot x^t = x^{n+t}$
- Cociente de Potencias de igual base: $x^n \div x^t = x^{n-t}$
- Potencia de otra Potencia: $\left(x^n\right)^t = x^{n \cdot t}$
- Todo número elevado a 1, da como resultado el mismo número: $x^1 = x$
- Todo número distinto de cero, elevado a 0, da como resultado 1: $x^0 = 1$
- Propiedad distributiva con respecto a la multiplicación y división:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad y \neq 0$$

- Exponente Negativo: $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$ con $x \neq 0 \; e \; y \neq 0$

<u>Propiedades de Radicación</u>

La radicación se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario.

Por ejemplo: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$

Podemos escribir: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

En general, sea $\frac{a}{b}$ un número racional con $b \geq 2$. Si x es un número real tal que $\sqrt[b]{x}$ está definida, entonces:

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$$

- Propiedad distributiva con respecto a la multiplicación y división:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- Raíz de otra raíz: $\sqrt[r]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.r]{a}$

- Simplificación o amplificación de índices: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:r]{a^{m:r}}$, $r\neq 0$

  $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n.r]{a^{m.r}}$, $r\neq 0$

- Eliminación de la raíz: $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & \text{si n es impar} \\ |a| & \text{si n es par} \end{cases}$

<u>**Ejemplo 1**</u>: $\sqrt[4]{5^2}=\sqrt{5}$

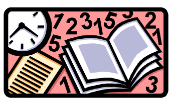
<u>**Ejemplo 2**</u>: $\sqrt{6}=\sqrt[2\cdot 2]{6^{1\cdot 2}}=\sqrt[4]{36}$

<u>**Ejemplo 3**</u>: $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

<u>**Ejemplo 4**</u>: $\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5\cdot 4]{x^{3\cdot 4}}=\sqrt[20]{x^{12}}$

<u>**Ejemplo 5:**</u> $\sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|=2$

<u>**Ejemplo 6:**</u> $\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$



ACTIVIDADES 5.1

1) Escribe V (verdadero) o F (falso) según corresponda en cada caso. Justifica la respuesta.

a) $a^3\cdot a^2=a^6$ b) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ c) $\sqrt{a^3}=a^{\frac{2}{3}}$

d) m.m.m = 3m e) $(b\cdot b^2)^3=b^9$ f) $\sqrt{x^2}=x$

2) Halla la mínima expresión, aplicando las propiedades de la potenciación.

a) $(a\cdot a^2)^2:a^5=$ b) $(x^3)^5:(x\cdot x)^2=$ c) $(b\cdot b^{-2})^3\cdot b^2=$

d) $(a^2\cdot b)^4\cdot(a\cdot b)^{-2}=$ e) $\left(\dfrac{m}{n^3}\right)^5\cdot\left(\dfrac{m}{n}\right)^{-3}=$ f) $(x^{-2}\cdot y^3)^3\cdot(x^4\cdot y^{-7})=$

3) Halla la mínima expresión, aplicando las propiedades de la radicación.

a) $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^4}=$ b) $\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[9]{x^6}\cdot\sqrt[15]{x^{10}}=$

c) $\sqrt[9]{\dfrac{x^{12}}{y^{15}}}=$ d) $\sqrt[3]{x^2\cdot z^5}\cdot\sqrt[3]{x^7\cdot z}=$

4) Resuelve aplicando propiedades.

a) $\dfrac{2^5}{2^3}+3^{-1}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=$ b) $3^{-2}\cdot\dfrac{1}{3^3}\cdot 3^6+\sqrt{\sqrt{\dfrac{625}{81}}}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=$

c) $\dfrac{4}{2^4}-\dfrac{1}{3^{-1}}+\dfrac{2^3\cdot 4}{32}-\sqrt{\dfrac{3^7}{3^3}}=$ d) $\dfrac{\sqrt{10}\sqrt{6}}{\sqrt{15}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^4:2^{-2}+\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{8}\sqrt{8}}{27}}=$

Respuestas: a) $\dfrac{19}{3}$ b) $\dfrac{37}{6}$ c) $-\dfrac{43}{4}$ d) $\dfrac{29}{12}$

Radicales

Ya hemos visto cuando un número es racional y cuando un número es irracional.

Por ejemplo: π, $\sqrt{3}$, 7,1234567891011…… son números irracionales; en particular $\sqrt{3}$, se llama radical.

Se denomina radical a la raíz indicada de un número o de una expresión, siempre que ésta tenga solución real.

Por ejemplo: $\sqrt[4]{-6}$ no es un radical, en cambio sí lo son $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt{x} \Leftrightarrow x \geq 0$

Dos radicales son semejantes cuando tienen igual índice y el mismo radicando.
Ejemplos:

- radicales semejantes: $\sqrt{3}$ y $5\sqrt{3}$; $-2\sqrt[3]{2}$ y $4\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[4]{x^3}$ y $-8\sqrt[4]{x^3}$
- radicales no semejantes: $-\sqrt[3]{7}$ y $2\sqrt{7}$ $5\sqrt{3}$ y $7\sqrt{2}$ $-4\sqrt[4]{3}$ y $9\sqrt[3]{4}$

Existen casos en los cuales ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión, a este procedimiento lo llamamos extracción de factores de un radical.

Extracción de factores de un radical

Existen factores, dentro de un radical, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o a lo sumo igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse las propiedades de la potenciación y radicación.

Ejemplo 1: $\sqrt[3]{16x^7} = \sqrt[3]{2^4 \cdot x^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 2x^2 \cdot \sqrt[3]{2x}$

Ejemplo 2: $\sqrt[4]{x^{85}} = \sqrt[4]{x^{21.4+1}} = \sqrt[4]{(x^{21})^4 .x} = \sqrt[4]{(x^{21})^4}\sqrt[4]{x} = x^{21}.\sqrt[4]{x}$

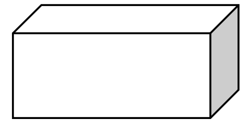
ACTIVIDADES 5.2

Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales

a) $\sqrt{8}$ = b) $\sqrt{0{,}27}$ = c) $\sqrt[3]{10000}$ = d) $\sqrt[4]{x^{21}}$ =

e) $\sqrt{16x^3}$ = f) $\sqrt{9a^2b^6c}$ = g) $\sqrt[3]{-8x^6y^5}$ = h) $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}064a^8b^{10}}{c^{21}}}$ =

Adición y sustracción de radicales



La superficie de una de las dos caras cuadradas de un prisma, como el de la figura, es de 2 [cm2].

a) Calcula la medida de cada arista, sabiendo que el largo del prisma es tres veces el ancho.

b) Obtiene la suma de todas las aristas.

Dos o más radicales pueden sumarse o restarse siempre que sean semejantes.

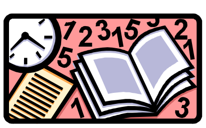
Ejemplo 1: $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=(3+5-1)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

Ejemplo 2: $5\sqrt{3}-2\sqrt{5}+3\sqrt{3}+7\sqrt{5}=(5+3)\sqrt{3}+(-2+7)\sqrt{5}=8\sqrt{3}+5\sqrt{5}$

Existen casos en los cuales ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión.

Ejemplo 3:
$$\begin{aligned}3\sqrt{2}-5\sqrt{32}+7\sqrt{8}-9\sqrt{50} &= 3\sqrt{2}-5\sqrt{2^5}+7\sqrt{2^3}-9\sqrt{5^2\cdot 2}\\ &= 3\sqrt{2}-5\sqrt{2^4}\cdot\sqrt{2}+7\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}-9\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2}\\ &= 3\sqrt{2}-20\sqrt{2}+14\sqrt{2}-45\sqrt{2}\\ &= (3-20+14-45)\sqrt{2}=-48\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 4:
$$\begin{aligned}4\sqrt{3}-6\sqrt[4]{25}-8\sqrt{27}+\sqrt{20} &= 4\sqrt{3}-6\sqrt[4]{5^2}-8\sqrt{3^2\cdot 3}+\sqrt{2^2\cdot 5}\\ &= 4\sqrt{3}-6\sqrt{5}-24\sqrt{3}+2\sqrt{5}\\ &= (4-24)\sqrt{3}+(-6+2)\sqrt{5}=-20\sqrt{3}-4\sqrt{5}\end{aligned}$$



ACTIVIDADES 5.3

1) Resuelve los siguientes cálculos:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}-5\sqrt{2}=$

b) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x}=$

c) $\sqrt{a}-2\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}=$

d) $2\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{-5}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}=$

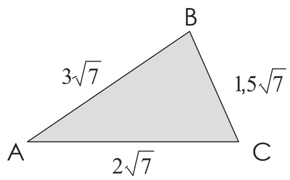
e) $3\sqrt{18}-11\sqrt{2}+2\sqrt{50}=$

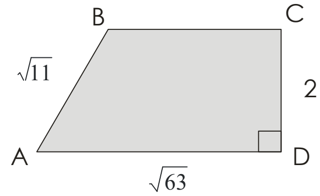
f) $\sqrt[4]{9y^8}+\sqrt[6]{27y^{12}}=$

g) $\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{27}}-\frac{5}{3}\sqrt[3]{54}+5\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{125}}=$

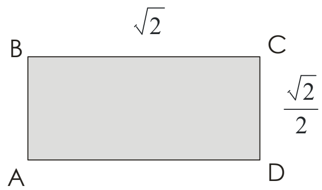
h) $\sqrt{81a^3}+\sqrt{9a^3}-\sqrt{25a^3}=$

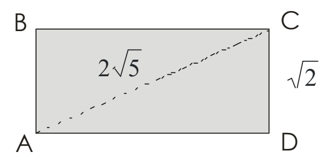
2) Halla el perímetro de las siguientes figuras, cuyas medidas están en [cm].





En los siguientes dos casos ABCD es un rectángulo.



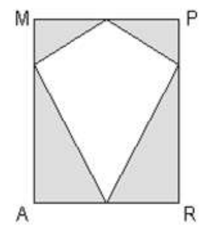


Multiplicación y división de radicales

La base del rectángulo AMPR mide $2\sqrt{3}$ [cm] y la altura $\sqrt{6}$ [cm].

a) Calcula el área del rectángulo.

b) Calcula el área del romboide no sombreado.



Multiplicación y división de radicales de igual índice

Recuerda…

a) Propiedad distributiva de la multiplicación y división respecto de la suma y la resta.
a . (b + c) = a . b + a . c = (b + c) . a
(b + c) : a = b : a + c : a

a) Cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados.
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a + b) . (a – b) = a^2 - b^2$

- Propiedad recíproca de la distributiva de la radicación respecto de la multiplicación y división

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.....\sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{a.b.c....f}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

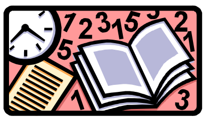
Ejemplos

$$a)\sqrt{2}.\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)=\sqrt{2}.\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{8}=\sqrt{4}+\sqrt{16}=2+4=6$$

$$b)\left(\sqrt{75}-\sqrt{27}\right):\sqrt{3}=\sqrt{75}:\sqrt{3}-\sqrt{27}:\sqrt{3}=\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$$

$$c)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2.\sqrt{3}.\left(-\sqrt{5}\right)+\left(-\sqrt{5}\right)^2=3-2.\sqrt{3}.\sqrt{5}+5=8-2.\sqrt{15}$$

$$d)\left(\sqrt{3}-\sqrt{8}\right).\left(\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2=3-8=-5$$



ACTIVIDADES 5.4

Resuelve aplicando propiedades.

$$a)\left(5+\sqrt{\frac{3}{4}}\right).\left(5-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)=$$

$$d)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{6}=$$

$$b)\left(\sqrt{6}-\sqrt{24}\right):\sqrt{3}=$$

$$e)\sqrt[4]{2a^2}.\sqrt[4]{ab}.\sqrt[4]{2ab}=$$

$$c)\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=$$

$$f)\ \sqrt[6]{t^2}.\sqrt[6]{3t^5}:\sqrt[6]{\left(\frac{t^2}{3}\right)^{-1}}=$$

Multiplicación y división de radicales de distinto índice

Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice, se los debe transformar en radicales de igual índice (amplificando o simplificando los índices) y luego aplicar las propiedades correspondientes a la multiplicación o división de radicales de igual índice.

Ejemplo 1*:* Para multiplicar:

$$\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[4]{x^3}=$$
$$=\sqrt[3.4]{x^{2.4}}.\sqrt[4.3]{x^{3.3}}$$
$$=\sqrt[12]{x^8}.\sqrt[12]{x^9}$$
$$=\sqrt[12]{x^8.x^9}$$
$$=\sqrt[12]{x^{17}}$$
$$=\sqrt[12]{x^{12}.x^5}$$
$$=x\sqrt[12]{x^5}$$

Debemos tratar que los índices sean iguales en los dos radicales, por lo tanto podríamos amplificar los índices (en este caso), a los siguientes índices comunes: 12, 24, 36, …
De todos ellos elegimos por conveniencia el menor. Entonces, amplificamos los índices. En el ejemplo dado lo hacemos de la siguiente manera y ésta no es la única forma… puedes intentar otras.
Aplicamos la propiedad recíproca de la distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación.
Extraemos factores fuera del radical para que el radical quede expresado en forma irreducible.

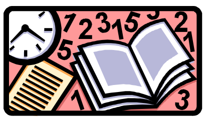
Ejemplo 2:

$$\frac{\sqrt[4]{m^3}.\sqrt[2]{m.t^2}}{\sqrt[5]{m^2.t}} = \frac{\sqrt[4.5]{m^{3.5}}.\sqrt[10.2]{m^{1.10}.t^{2.10}}}{\sqrt[5.4]{m^{2.4}.t^{1.4}}} = \frac{\sqrt[20]{m^{15}}.\sqrt[20]{m^{10}.t^{20}}}{\sqrt[20]{m^8.t^4}} = \sqrt[20]{\frac{m^{15}m^{10}.t^{20}}{m^8.t^4}} = \sqrt[20]{\frac{m^{25}.t^{20}}{m^8.t^4}} = \sqrt[20]{m^{17}.t^{16}}$$

m y t números reales diferentes de cero.

Ejemplo 3

$$\sqrt{x.\sqrt{x}}.\sqrt[3]{x} = \sqrt{x}.\sqrt{\sqrt{x}}.\sqrt[3]{x} = \sqrt{x}.\sqrt[4]{x}.\sqrt[3]{x} = \sqrt[12]{x^6}.\sqrt[12]{x^3}.\sqrt[12]{x^4} = \sqrt[12]{x^{13}} = x\sqrt[12]{x}$$



ACTIVIDADES 5.5

Resuelve cada caso hasta obtener un radical irreducible, x y b son diferentes de 0.

$a)\ \frac{\sqrt{x}.\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} =$

$b)\ \sqrt{x.\sqrt{x.\sqrt{x}}} =$

$c)\ \sqrt[5]{3x^3}.\sqrt{3x} =$

$d)\ \frac{\sqrt[3]{9x}}{\sqrt[4]{27.x^2}} =$

$e)\ \frac{\sqrt[3]{a.b^2}\,\sqrt[5]{a^2.b^3}}{\sqrt[4]{b}} =$

Racionalización de denominadores

Si en una fracción aparecen radicales irracionales en el denominador es conveniente *racionalizar el denominador* para transformarlo en un número racional, así hallamos una fracción equivalente a la dada con denominador racional.

Aquí analizaremos dos situaciones: cuando en el denominador de una fracción hay un único radical irracional y cuando en el denominador de una fracción hay una sustracción o adición donde interviene un radical irracional con índice dos.

<u>Primera situación:</u> denominador con un único radical irracional

Para racionalizar este tipo de expresiones, se amplifica la fracción con el objetivo de obtener en el denominador un número racional. Analizamos esta situación con los siguientes ejemplos.

<u>Ejemplo 1</u>

$\frac{1}{\sqrt{2}} =$ es una fracción cuyo denominador es un radical irracional, por lo tanto amplificamos esta fracción para que en el denominador quede un número racional

$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} =$ para amplificar la fracción, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ obtenemos así un número racional en el denominador.

Para tener en cuenta… así como racionalizamos denominadores también podemos racionalizar numeradores. Por ejemplo, en la última expresión el numerador tiene un radical irracional por lo que si amplificamos la fracción para obtener un número racional en el numerador, llegaríamos a la primera expresión planteada.

<u>Ejemplo 2</u>

$\frac{3}{\sqrt[3]{5}} =$ es una fracción cuyo denominador es un radical irracional, por lo tanto amplificamos esta fracción para que en el denominador quede un número racional

$= \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} =$ para amplificar la fracción, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[3]{5^2}$

$= \frac{3 \cdot \sqrt[3]{25}}{5}$ obtenemos así un número racional en el denominador.

<u>Ejemplo 3</u>

$\frac{2}{\sqrt[4]{x^3.y^2}} =$ es una fracción cuyo denominador es un radical irracional con x e y distintos de cero, por lo tanto amplificamos esta fracción para que en el denominador quede un número racional

$= \frac{2}{\sqrt[4]{x^3.y^2}} . \frac{\sqrt[4]{x\ .y^2}}{\sqrt[4]{x\ .y^2}} =$ para amplificar la fracción, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{x\ .y^2}$

<u>Segunda situación</u>: denominador con adición o sustracción, donde interviene un radical irracional con índice dos

Para racionalizar este tipo de expresiones, se amplifica la fracción con el objetivo de obtener en el denominador un número racional. Una de las propiedades que utilizaremos en este proceso es:

$$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$$

Analizamos esta situación con los siguientes ejemplos.

<u>Ejemplo 1</u>

$\frac{4}{\sqrt{5}+2}=$ es una fracción cuyo denominador es una adición entre un número entero y un radical irracional de índice dos, por lo tanto amplificamos esta fracción para que en el denominador quede un número racional

$=\frac{4}{\sqrt{5}+2}.\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=$ para amplificar la fracción, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{5}-2$

$=\frac{4.\left(\sqrt{5}-2\right)}{\sqrt{5^2}-2^2}=4.\left(\sqrt{5}-2\right)$ obtenemos así un número racional en el denominador ya que $\left(\sqrt{5}+2\right).\left(\sqrt{5}-2\right)=\sqrt{5^2}-2^2=5-4=1$

Para tener en cuenta… así como racionalizamos denominadores también podemos racionalizar numeradores. Por ejemplo, en la última expresión el numerador tiene una sustracción entre un radical irracional de índice dos, por lo que si amplificamos la fracción para obtener un número racional en el numerador, llegaríamos a la primera expresión planteada.

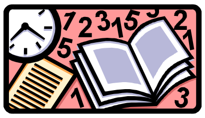
<u>Ejemplo 2</u>

$\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$ es una fracción cuyo denominador es una sustracción entre radicales irracionales de índice dos, por lo tanto amplificamos esta fracción para que en el denominador quede un número racional

$=\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$ para amplificar la fracción, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$=\frac{4.\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}}=\frac{4.\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}=$ obtenemos así un número racional en el denominador ya que: $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{5^2}-\sqrt{3}^2=5-3=2$

$=2.\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=2.\sqrt{5}+2.\sqrt{3}$

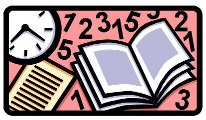


ACTIVIDADES 5.6

Racionaliza los denominadores en las siguientes expresiones, con x e y distintos de cero.

$a)\ \dfrac{8}{\sqrt{2}} =$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{3}} =$ c) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}} =$ d) $\dfrac{x}{\sqrt{x}} =$ $e)\ \dfrac{3.x}{2.\sqrt[3]{x}} =$ f) $\dfrac{x.y^2}{\sqrt[7]{x^3.y^5}} =$

g) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} =$ h) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+3} =$ i) $\dfrac{-5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$ j) $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} =$ k) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} =$



ACTIVIDADES COMPLEMETARIAS

1) Completa el siguiente enunciado de forma tal que resulte verdadero.

a) Los números cuya expresión decimal es infinita no periódica no pueden ser expresados con una...

b) Dados $\sqrt{3}$ y $3^{2/3}$, su producto es ....

c) La expresión de la altura de un triángulo equilátero de x [cm] de lado es.....................

d) El conjunto de los números reales es continuo porque...

e) $\sqrt[3]{81}$ - 3 + $\sqrt[6]{9}$ = ...

2) Indica cuál de las siguientes opciones responden al enunciado. Justifica tu elección para que sea considerada.

a) El conjunto solución de $s^2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ es:

I) S = { $\sqrt{3}$ }...... II)S = {$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$}....... III) S = { 1/3}....... IV) Ninguna de las anteriores....

b) Dos radicales son semejantes cuando en su forma irreducible tienen:

I) Igual índice.......... II) Igual radicando....... III) Ninguna de las anteriores.......

c) $\mathbf{a}^{n}$, con $\mathbf{a} \in \mathbf{N}$ y $\mathbf{n} \in \mathbf{Q}$ es:

I) Siempre un n° real... II) Siempre un n° racional..... III) Siempre un n° irracional.....IV) Ninguna de las anteriores

d) $\sqrt[3]{448}$ es semejante a:

I) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$....... II) $\sqrt{7}$........ III) $\sqrt[3]{4}$........ IV) Ninguna de las anteriores.......

3) Justifica si cada uno de los siguientes enunciados es Verdadero o Falso.

a) $\sqrt[4]{x^4}$ es igual a un número real positivo x.

b) Los radicales $\sqrt{18}$ y $\sqrt[4]{4}$ son semejantes.

c) La raíz cuadrada de cualquier número entero es un número real.

d) $\sqrt[3]{2\,a} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$ es un número irracional

f) Todo número real es un número racional.

g) $\left(\dfrac{1}{2}\,a\,b^{-2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b^{-4}}\right)$

h) La ecuación: $(5p)^2 + 26 = -p^2$, tiene solución $p = -1$.

i) $(27^{1/2})^3 = 3^{10}\sqrt{3}$

j) $-2\sqrt{18} + 5\sqrt{8} + \sqrt{50} = 3^2 .2^{1/2}$

k) $\sqrt[4]{s^{12}} = s^3$

l) La expresión $\dfrac{2\cdot\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ da por resultado un número natural.

m) Dada la función $y = f(e) = \sqrt[3]{e}$, $f(16) = 2\sqrt[3]{2}$

4) Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 5/2 [cm] y 1/2 [cm] respectivamente. Además representa el resultado en la recta real. (Sugerencia opera con fracciones).

5) Obtiene todos los productos posibles y distintos entre dos números diferentes del conjunto:

$$\left\{\sqrt{2};\sqrt{8};2\sqrt{2};2\sqrt{8};5\sqrt{2}\right\}$$

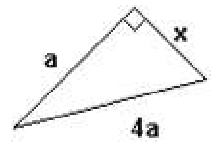
6) Halla el perímetro de un rectángulo cuya base mide $\sqrt{12}$ [cm] y su altura mide $\sqrt{75}$ [cm]. Expresa el perímetro como radical irreducible.

7) Calcula la medida de la diagonal de un cuadrado de lado "t" unidades, en forma exacta e irreducible.

8) Calcula la medida de "x" en cada caso en forma exacta e irreducible:

a) x es la medida de la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden "b" y "2b" unidades.

b)



9) Señala la opción correcta. Justifica tu respuesta para que ésta se considere válida.

a) $\sqrt{25\,x^5} + \sqrt{x}$	1) $6\,x^2\sqrt{x}$
	2) $(5\,x^2+1)\sqrt{x}$
b) $\sqrt[5]{y^3 \cdot y^2}$	1) y
	2) $\sqrt[5]{y^{13}}$
c) $3\sqrt{5} + \sqrt{25} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{125}$	1) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5} + 5$
	2) $3\sqrt{5} + \frac{5}{2}$
d) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	1) $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$
	2) $\frac{2\cdot\sqrt[3]{9}}{3}$

10) Resuelve en forma exacta las siguientes operaciones. Expresa la solución de cada una utilizando radicales irreducibles.

a) $\sqrt{2\,a}\cdot\sqrt[3]{2\,a^2}$

b) $\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\right) : \sqrt{a} =$

c) $\sqrt{8} + \sqrt{245} - 4\cdot\sqrt{2} =$

d) $\sqrt{a^5 \cdot a^{\frac{5}{3}}}\cdot\sqrt[6]{a^{-1}} =$

e) $\left(\frac{1}{w}\right)^{-2}\cdot\left(w^2\right)^3 : w =$

f) $\sqrt[3]{\frac{2\,t^3 + 6\,t^3}{t^6}} =$

g) $2\sqrt{3} - \sqrt[4]{144} + 3 - 12^{\frac{1}{2}} =$

h) $\frac{\sqrt[4]{a^3}\,.\,\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{3}}} =$

i) $\sqrt[3]{-27} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt[4]{9} + \sqrt{243} =$

j) $\left(2 - \sqrt{5}\right)^2 + \sqrt{125} =$

k) $\frac{3}{1 - \sqrt{5}} + \frac{3}{4} =$

11) Un trapecio isósceles tiene la base mayor de $\sqrt{45}$ [cm], la menor de $\sqrt{20}$ [cm] y cada lado congruente de $5^{1/2}$ [cm] de longitud. Halla su perímetro expresándolo como radical irreducible.

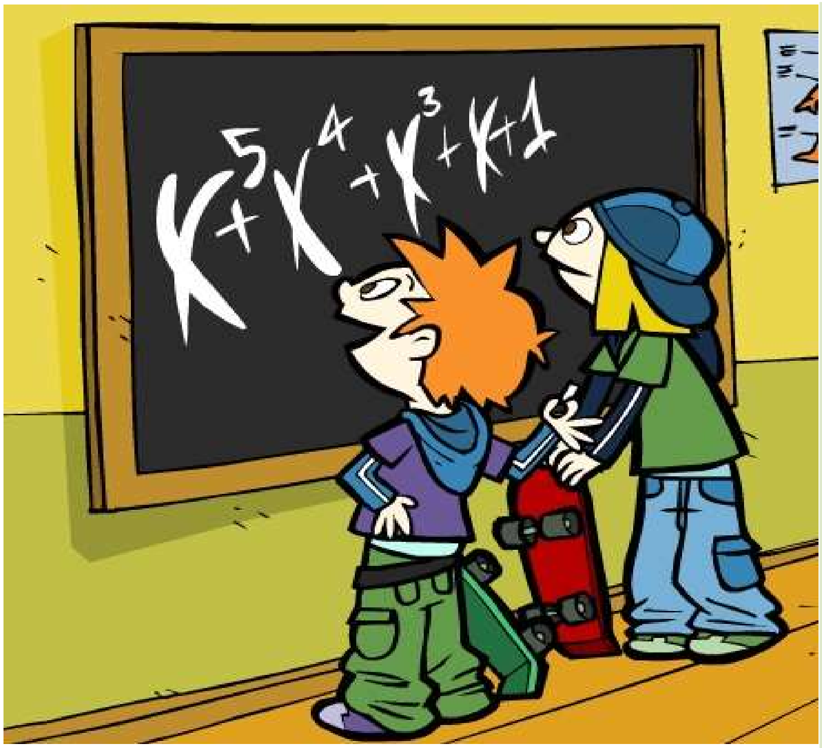
12) En un rombo una diagonal mide 24 [cm] y la otra es dos tercios de esta.
a) Realiza la figura de análisis, colocándole vértices A, B, C, D al rombo. Calcula en forma exacta e irreducible la longitud de la diagonal desconocida y el lado del rombo. Justifica.
b) Redondea a los centésimos, el perímetro del rombo.

13) Construye, con la mayor exactitud posible, un cuadrado de área 5 [cm^2].

14) Halla exactamente y en su mínima expresión el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide $2\sqrt{2}$ [cm] y la altura correspondiente a dicha base mide 4 [cm].

15) Sabiendo que en un trapecio isósceles la base mayor difiere en 3 [cm] de la base menor y que su altura es de $\frac{\sqrt{15}}{2}$ [cm]. Halla la longitud de los lados congruentes del mismo y exprésala en su forma irreducible.

Capítulo 6: Polinomios



- Definición
- Características
- Especialización - Raíz
- Operaciones
- Teorema del resto

POLINOMIOS

Claudia compró un terreno y quiere instalar allí una pileta de base rectangular. El arquitecto le dijo que: "su pileta debe tener el doble de largo que de ancho, y que la profundidad debe ser la mitad del ancho".
Para hacer un presupuesto, averigua que el material para las paredes y el piso cuesta \$75 el $\left[m^2\right]$; la soldadura para las juntas \$40 el $[m]$; la excavación y colocación \$50 el $\left[m^3\right]$ y el traslado de materiales \$100. Responde:
a) ¿Cuál es la expresión algebraica que nos permite calcular el costo de la construcción de la pileta en función del ancho?
b) ¿Cuánto le costará a Claudia una pileta de 5 $[m]$ de ancho?

✓*Recordemos…*

Una ***expresión algebraica*** *es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.*

☑ Ejemplos de expresiones algebraicas

a) $2x + 3^4$ b) $5a^3 + 6a - \frac{1}{3}$ c) $b + \sqrt{3b}$ d) $\frac{c^5 - 4}{c^2}$ e) $\sqrt{2}d - \frac{2}{5}d^4$ f) 7/2

✓ Los números son los **coeficientes**, y las letras, las **variables** o indeterminadas.

Si la variable no está afectada por una raíz, o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios.**

Las expresiones (a), (b), (e) y (f) son polinomios.

La expresión (c) no es un polinomio porque la variable está afectada por una raíz. Es una expresión algebraica irracional.

La expresión (d) no es un polinomio porque: $\frac{c^5 - 4}{c^2} = c^3 - \frac{4}{c^2}$, la variable aparece en el denominador. Es una expresión algebraica fraccionaria.

Se llama polinomio en la variable x, a una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

- Los supraíndices indican a qué exponente entero no negativo está elevada la variable.
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \ldots a_2, a_1, a_0$ son los coeficientes (números reales) que multiplican a la variable. Por ejemplo: a_{n-2} es el coeficiente que multiplica a x^{n-2}

- Para nombrar polinomios podemos usar letras en imprenta mayúscula, por ejemplo: P, Q, etc. Entre paréntesis colocamos la variable (en imprenta minúscula) del polinomio: P(x), Q(m)

Nota: $Q(x , y) = 2x^2 + 3yx$ también es un polinomio, con dos variables. Puede haber polinomios con más de una variable. Nosotros estudiaremos expresiones algebraicas con una sola variable.

Según la cantidad de términos con coeficientes no nulos, un polinomio se denomina:

- ✓ **Monomio:** si tiene un solo término $P(e) = 0{,}5e^5$
- ✓ **Binomio:** si tiene dos términos $P(x) = 4x^2 + 5$
- ✓ **Trinomio:** si tiene tres términos $P(g) = 3g - 8 + g^3$
- ✓ **Cuatrinomio:** si tiene cuatro términos $P(x) = 2x^5 - 2x + 7 - x^2$

Existe un polinomio especial, llamado **Polinomio nulo:** P(x) = 0.

¿Cuáles son los coeficientes en este polinomio?

✓ Los monomios que tienen la misma variable y exponente, son **semejantes**.

Los monomios $4x^2$, $-\frac{1}{2}x^2$, x^2 son semejantes; y los monomios $-\frac{1}{2}x^2$, 3 x no son semejantes.

✓ Se llama **polinomio reducido** cuando el polinomio está expresado como suma de monomios no semejantes.

☑ Ejemplos:

$P(x) = 7x + 6x^2 - x^5 + x^2 - 0{,}5x^2$ es un polinomio no reducido

$P(x) = 7x + 6{,}5x^2 - x^5$ es un polinomio reducido

✓ Se denomina **grado** de un polinomio al mayor exponente que tiene la variable entre los términos con coeficientes <u>no nulos</u> del polinomio.

☑ Ejemplos:

a) $P(x) = 7x + 6x^2 - x^5$ tiene grado: 5

b) $Q(h) = 4 - h + h^3$ tiene grado: 3

c) $T(y) = 5$ tiene grado: 0

d) El polinomio nulo no tiene grado.

✓ Se llama **coeficiente principal** de un polinomio al coeficiente del término de mayor grado.

☑ Ejemplos:

a) $S(t) = t + 5t^3 - 2t^4$ coeficiente principal: -2

b) $A(x) = x^5 - 8x^4 + x$ coeficiente principal: 1

✓ Se llama **término independiente** de un polinomio, al término de grado cero.

✓ Al polinomio cuyo coeficiente principal es 1 se lo denomina **normalizado** o mónico.

☑ Ejemplo:

El polinomio $A(x) = x^5 - 8x^4 + x$ está normalizado.

✓ Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.

☑ Ejemplos:

a) $H(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ está ordenado en forma decreciente.

b) $J(m) = 4 + m - \frac{1}{10}m^3$ está ordenado en forma creciente.

c) $Z(v) = v^5 - 2v^2 + 7$ está ordenado en forma decreciente.

✓ Un polinomio está **completo** si tiene todas las potencias decrecientes a partir del grado.

☑ Ejemplos:

a) $R(x) = 6x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x - 1$ está completo.

b) $Q(y) = y^4 - \frac{1}{2}y^2 - 3$ está incompleto.

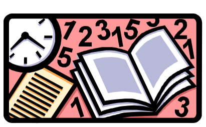
Para completar un polinomio se agregan los términos que faltan con coeficiente cero.

☑ Ejemplos:

a) $M(b) = b^5 + 3b^3 - 1 = b^5 + 0b^4 + 3b^3 + 0b^2 + 0b - 1$

b) $N(x) = 4x^4 + 2x^2 = 4x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 0$

c) $K(c) = c^6 - 3 = c^6 + 0c^5 + 0c^4 + 0c^3 + 0c^2 + 0c - 3$



ACTIVIDADES 6.1

1) Marca con una **X** las expresiones algebraicas que son polinomios.

a) $16x + x^{-1}$ b) $\sqrt{3}d^2 - 5$ c) $\sqrt[3]{g^2} - 9$ d) $\frac{2}{3}k^2 + 5k - 2$ e) $\sqrt{\frac{2x+1}{3}}$ f) $f^{10} - \frac{f}{5}$

2) Clasifica de acuerdo al número de términos e indica el grado, coeficiente principal y término independiente de cada uno de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 6 + x^3 + 3x - x^2$

b) $Q(w) = 7w^3 - 2w^5 + 4$

c) $R(t) = 0t^4 - t + 5t^2$

d) $S(e) = e + 3^3$

e) $T(d) = d^3 - 2^7 \cdot d^5$

f) $M(u) = -u^3 + 6 + 0u^5$

3) Escribe un polinomio que cumpla con cada una de las siguientes condiciones.

a) Binomio de grado 2.

b) Trinomio de grado 3.

c) Monomio de grado 6.

d) Cuatrinomio de grado 5.

4) Ordena en forma decreciente y completa cada uno de los siguientes polinomios.

a) $p(z) = 5z^3 - 1$

b) $q(y) = -27y^3 + y^4 + 2$

c) $h(x) = -2 + 2x^3 - x$

d) $A(w) = w - 3w^2 + w^5 - 1$

5) Completa:

Referencias:

1 – Nombre que recibe el polinomio que tiene todas las potencias decrecientes a partir del grado.

2 – Polinomio reducido de dos términos.

3 – Nombre que reciben las letras x e y en el polinomio $3x^2 - 4y$.

4 – Nombre que reciben los números 5 y 6 en el polinomio $5x^3 + 6x$.

5 – El polinomio $5 - 3t^2 + t^4 - 7t^6$, está ……... en forma creciente.

6 – El polinomio reducido de $5 + 4u - 3u^2 + 2u - u^2 + 8$ es un …

7 – Los términos $2x^5$ y $-3x^5$ son …

8 – En la división $\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$, C(x) es el …

9 – Cada uno de los términos de un polinomio.

			1 –				**P**							
			2 –				**O**							
3 –							**L**							
4 –							**I**							
		5 –					**N**							
		6 –					**O**							
				7 –			**M**							
			8 –				**I**							
			9 –				**O**							

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO - RAÍZ DE UN POLINOMIO

Consideramos $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$, un polinomio en la variable x, donde x puede tomar cualquier valor real.

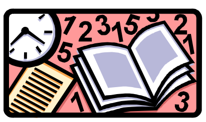
Si asignamos a esa variable, por ejemplo, el valor 3 (x = 3), calculamos:

P(3) = $3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 1$= 27 –12 +1 = 16; 16 es el número real que le corresponde a $P(x)$ cuando la variable es reemplazada por el número 3, es decir, 16 es el <u>valor numérico de $P(x)$</u> cuando la variable toma el valor 3.

Dado $R(x) = x^2 - 4x + 4$, obtiene el valor numérico de $R(x)$ cuando $x = 2$;

Completa $R(2)$ = …… En este caso decimos que <u>el número 2 es un cero o raíz del polinomio</u> $R(x)$.

> Dado el polinomio $P(x)$, si al asignar el valor $a \in$ R a la variable x del mismo, obtenemos $P(a)$ = 0, entonces el número a es un **cero o raíz** real de $P(x)$.



ACTIVIDADES 6.2

1) Teniendo en cuenta $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$, calcula P(1/2); P(1); P(0); P(-1); P(-2).

2) Siendo M(t) = $2\ t^2 - 8\ t$;

a) Calcula M(0); M(4); M(2); M(-2); M(-1); M(5); M(-1/2).

b) ¿Alguno de los valores asignados a la variable es un cero o raíz de M(t)? ¿Cuáles?

3) Halla **b** y **c** en el polinomio P(x) = x^2 + bx +c, sabiendo que este polinomio tiene dos raíces que son x = -2 y x = 3.

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Dado un triángulo ABC isósceles, con $\overline{AB} = \overline{BC} = 2x^2 - 3x + 4$ y $\overline{AC} = x^2 - 5x + 2$, obtiene el polinomio reducido que representa el perímetro de ABC. Clasifícalo según la cantidad de términos, indica el grado, coeficiente principal y término independiente.

Adición y Sustracción de Monomios

✓ La adición de varios monomios semejantes es ...., cuyo coeficiente es ....de los coeficientes de los monomios dados.

☑ Ejemplo 1:

$5a + 2a + 6a = (5 + 2 + 6)a = 13a$

☑ Ejemplo 2:

$3,4\ y^2 + y^2 = 4,4\ y^2$

✓ Para resolver la sustracción entre monomios, sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo

☑ Ejemplo 3:

$x^2 – 0,5\ x^2 = 0,5\ x^2$

☑ Ejemplo 4:

$-7z + z = (1 - 7)z = - 6z$

Adición y Sustracción de Polinomios

✓ Para sumar polinomios, se aplica la propiedad conmutativa y asociativa sobre la adición, y así podemos sumar los términos (**monomios) semejantes.**

☑ Ejemplo 5:

Sea $Q(a) = 2a + a^3$ y $P(a) = 5a – 12\ a^2 + a^3$, calcularemos $Q(a) + P(a)$.

Resolvemos así:

$Q(a)+P(a) = (2a + a^3) + (5a – 12\ a^2 + a^3) = (2a + 5a) + (– 12\ a^2) + (a^3 + a^3) = 7a – 12\ a^2 + 2a^3$

☑ Ejemplo 6:

Para calcular la suma de los polinomios:

$$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (5x^3 - x^2 + 2x)$$

Podemos indicar la suma de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\ \underline{+ \qquad 5x^3 - x^2 + 2x} \\ 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 0x + 5 \end{array}$$

✓ Para resolver la sustracción de polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

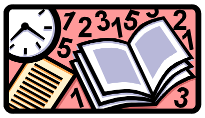
☑ Ejemplo 7:

Para calcular la diferencia o resta de los polinomios:

$$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) - (5x^3 - x^2 + 2x)$$

Se calcula la suma:

$$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (- 5x^3 + x^2 - 2x) = 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5$$



ACTIVIDADES 6.3

1) Escribe el polinomio reducido.

a) $4x^3 + 5x^2 - 2x - x =$

b) $6x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^3 - x^4 =$

c) $-4z^5 + z^3 - 0z^3 + \frac{1}{2}z^5 =$

d) $40y - y^2 + 5y + 6y^2 - y^3 =$

2) Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = -2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 3$ $\quad$ $Q(x) = 3x - 4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$ $\quad$ $R(x) = x^2 - 5x + 2$

Resuelve las siguientes operaciones.

a) P(x) + Q(x) = $\quad$ b) P(x) – Q(x) = $\quad$ c) P(x) + R(x) = $\quad$ d) R(x) – Q(x) =

Rtas: 1) a) $4x^3 + 5x^2 - 3x$ $\quad$ b) $5x^4 + \frac{3}{2}x^3$ $\quad$ c) $-\frac{7}{2}z^5 + z^3$ $\quad$ d) $-y^3 + 5y^2 + 45y$

2) a) $-\frac{3}{2}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x - 1$ $\quad$ b) $-\frac{5}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x + 7$

c) $-2x^3 + 2x^2 - \frac{11}{2}x + 5$ $\quad$ d) $-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8x + 6$

Multiplicación de Polinomios

¿Cuál será la expresión del área de un rectángulo cuyos lados son 3x – 7 y x + 5?

✓ Para multiplicar dos monomios se deben multiplicar los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de potenciación.

Recordar que:

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

☑ Ejemplos:

a) $(3x)\cdot(2x) = 6x^2$

b) $(10w^4)\cdot(-5w^4) = -50w^8$

c) $(-4h)\cdot(h^3) = -4h^4$

d) $(-6y^5)\cdot(-3y^2) = 18y^7$

✓ Para multiplicar un polinomio por un número real, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y resta.

☑ Ejemplo:

$$-3\cdot\left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x - 4\right) = (-3)\cdot x^3 + (-3)\cdot 2x^2 + (-3)\cdot\frac{1}{3}x - (-3)\cdot 4 = -3x^3 - 6x^2 - x + 12$$

✓ Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, de la multiplicación respecto de la suma y resta, efectuando luego la multiplicación de monomios.

☑ Ejemplo 1:

Dados: $P(x) = 2x^2 + 2x$ y $Q(x) = 3x^2 - x$

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= \left(2x^2+2x\right)\cdot\left(3x^2-x\right) \\ &= \left(2x^2\right)\cdot\left(3x^2\right)+\left(2x^2\right)\cdot(-x)+(2x)\cdot\left(3x^2\right)+(2x)\cdot(-x) \\ &= 6x^4-2x^3+6x^3-2x^2 \\ &= 6x^4+4x^3-2x^2 \end{aligned}$$

☑ Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2\cdot(x-2)\cdot(3-2x) &= \left(\frac{1}{2}x^3-x^2\right)\cdot(3-2x) \\ &= \frac{3}{2}x^3-x^4-3x^2+2x^3 \\ &= -x^4+\frac{7}{2}x^3-3x^2 \end{aligned}$$

Una forma de resolverlo es asociar los dos primeros factores y luego al producto de éstos multiplicarlo por el tercer factor.

<u>Producto Especial</u>

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

$$\boxed{(a + b).(a - b) = a^2 - b^2}$$

<u>Verifiquémoslo:</u>

$$(a+b)\cdot(a-b) = \underbrace{a^2-ab+ba-b^2}_{\text{Aplicamos prop. distributiva}} = \underbrace{a^2-b^2}_{\text{Cancelamos términos opuestos}}$$

☑ Ejemplos:

a) $(x+4)\cdot(x-4) = x^2-4x+4x-16 = x^2-16$

b) $\left(d^2+5d\right)\cdot\left(d^2-5d\right) = d^4-5d^3+5d^3-25d^2 = d^4-25d^2$

c) $\left(2m^5+\frac{1}{5}m^3\right)\cdot\left(2m^5-\frac{1}{5}m^3\right) = 4m^{10}-\frac{2}{5}m^8+\frac{2}{5}m^8-\frac{1}{25}m^6 = 4m^{10}-\frac{1}{25}m^6$

d) $\left(-\frac{1}{2}y^2+7y\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}y^2-7y\right) = \frac{1}{4}y^4+\frac{7}{2}y^3-\frac{7}{2}y^3-49y^2 = \frac{1}{4}y^4-49y^2$

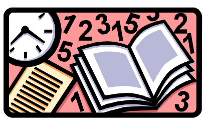
Operaciones Combinadas

Las operaciones combinadas entre polinomios se resuelven aplicando los mismos procedimientos y propiedades que con números reales.

☑ Ejemplo:

Dados: $P(x)=5x^2-6x+2$, $Q(x)=2x^3-x+6$ y $R(x)=-x^2+1$

$$P(x)\cdot R(x)-Q(x)=\left(5x^2-6x+2\right)\cdot\left(-x^2+1\right)-\left(2x^3-x+6\right)$$
$$=-5x^4+5x^2+6x^3-6x-2x^2+2+(-2x^3+x-6)$$
$$=-5x^4+4x^3+3x^2-5x-4$$



ACTIVIDADES 6.4

1) Resuelve las siguientes multiplicaciones de monomios.

a) $\left(2z^2\right)\cdot\left(-6z\right)=$ b) $\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\cdot\left(8y^3\right)\cdot\left(0,75y\right)=$ c) $\left(-\frac{4}{9}x^4\right)\cdot\left(-\frac{15}{8}x^5\right)=$

2) Resuelve los siguientes productos.

a) $\left(-2w\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}w^3+5w^2\right)=$

b) $\left(-\frac{4}{3}u^2+\frac{12}{5}u-6\right)\cdot\left(\frac{3}{4}u^4\right)=$

c) $\left(5t^6+2t\right)\cdot\left(5t^6-2t\right)=$

d) $\left(-\frac{3}{4}r^3+\frac{1}{6}r\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}r^3-\frac{1}{6}r\right)=$

e) $(3x-4)\cdot x\cdot(x-1)=$

f) $\left(q^3-q+1\right)\cdot\left(q^2-q\right)=$

g) $\left(-\frac{2}{3}n+n^3\right)\cdot\left(2n-3n^2+1\right)=$

h) $\left(2m-3m^2+1\right)\cdot\left(-2m^3-\frac{1}{2}+3m\right)=$

3) Resuelve

a) $2\left(j^2-1\right)-3j\cdot\left(j^2+2j+1\right)-2\left(j^2+1\right)=$

b) $\frac{1}{2}\left(h^2+2h+1\right)+5\left(h^2+1\right)-3\left(h-1\right)\cdot\left(h+1\right)=$

4) Dados: $P(x)=2x^2-3$, $Q(x)=5x+1$ y $R(x)=-6x^3+2x^2+7$

Resuelve los siguientes cálculos combinados.

a) P(x).Q(x) – R(x) = b) R(x).[Q(x) + P(x)] =

5) En un campo se quiere construir un tanque australiano con la condición de que la altura sea la mitad del radio. Los costos son los siguientes:

-Excavación: \$100 por $\left[m^3\right]$

-Materiales para paredes y piso: \$500 por $\left[m^2\right]$

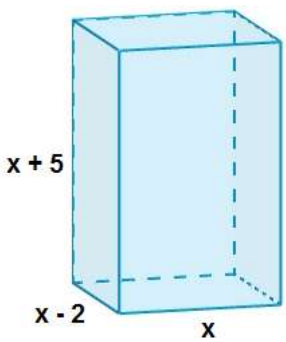
-Envío de material: \$300

El dueño tiene \$18000 para invertir en dicho depósito de agua.

a) Determina cuál es la expresión polinómica que nos permite calcular el costo de la construcción del tanque en función de su radio.

b) Expresa el grado, coeficiente principal, término independiente del polinomio obtenido y clasifícalo.

c) Responde: ¿Se podrá construir un tanque de 4,5$[m]$ de diámetro?, ¿y de 5$[m]$ de diámetro?



6) Una empresa fabrica bloques prismáticos macizos para la construcción como se muestra en la figura. El costo del material de relleno es de \$12 el centímetro cúbico. Tiene un costo de pintado de todas sus caras y es de \$2,50 por centímetro cuadrado de pintura. Por otro lado las aristas del prisma deben estar pulidas para evitar que se quiebren ya que son frágiles, este proceso de pulido agrega un costo de \$1,50 por centímetro lineal de arista. Además la empresa tiene un costo fijo de \$4 por cada bloque fabricado.

a) Expresa el costo total en función de x.

b) Si la altura mide 20 $[cm]$, Responde: ¿cuál es el costo de construcción de 10 bloques?

Rtas: 1) a) $-12z^3$ b) $-3y^6$ c) $\frac{5}{6}x^9$

2) a) $\frac{2}{3}w^4 - 10w^3$ b) $-u^6 + \frac{9}{5}u^5 - \frac{9}{2}u^4$

c) $25t^{12} - 4t^2$ d) $\frac{9}{16}r^6 - \frac{1}{36}r^2$

e) $3x^3 - 7x^2 + 4x$ f) $q^5 - q^4 - q^3 + 2q^2 - q$

g) $-3n^5 + 2n^4 + 3n^3 - \frac{4}{3}n^2 - \frac{2}{3}n$ h) $6m^5 - 4m^4 - 11m^3 + \frac{15}{2}m^2 + 2m - \frac{1}{2}$

3) a) $-3j^3 - 6j^2 - 3j - 4$ b) $\frac{5}{2}h^2 + h + \frac{17}{2}$

4) a) $16x^3 - 15x - 10$ b) $-12x^5 - 26x^4 + 22x^3 + 10x^2 + 35x - 14$

5) a) $C(x) = 50\pi x^3 + 1000\pi x^2 + 300$ c) Podrá construir un tanque de 4,5 [m] de diámetro, no así uno de 5 [m].

6) a) $C(x) = 12x^3 + 51x^2 - 72x - 28$ b) \$508670

Sabiendo que el área de un rectángulo se expresa de la siguiente forma: $3x^2+8x-35$ y que la medida de uno de sus lados es: x + 5. Responde: ¿Cuál es la expresión del otro lado?

✓ Para dividir dos monomios se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de potenciación.

Recordar que:

$x^m : x^n = x^{m-n}$

¿Qué condiciones deben cumplir el dividendo y el divisor para que el cociente sea un monomio?

☑ Ejemplos:

a) $\left(4x^3\right):(2x) = 2x^2$

b) $\left(w^4\right):\left(-8w^3\right) = -\frac{1}{8}w$

c) $\left(-6h^5\right):\left(3h^2\right) = -2h^3$

d) $\left(-10y^8\right):\left(-2y^3\right) = 5y^5$

✓ Para dividir un polinomio por un monomio, se aplica la propiedad distributiva de la división a la derecha de una suma algebraica.

☑ Ejemplos:

a)

$$\left(24x^5-16x^3-4x\right):(-4x)=$$

$$=\left(24x^5\right):(-4x)+\left(-16x^3\right):(-4x)+(-4x):(-4x)$$

$$=-6x^4+4x^2+1$$

b) $\left(2u^6+5u^5+u^3+\frac{1}{2}u^2+6u\right):\left(\frac{1}{2}u\right)=4u^5+10u^4+2u^2+u+12$

✓ Para dividir dos polinomios, debemos considerar previamente:

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor.
- El polinomio **dividendo** debe estar **<u>completo</u>** y **<u>ordenado</u>** en forma decreciente.
- El polinomio **divisor** debe estar **<u>ordenado</u>** en forma decreciente.

Dividendo
$\uparrow$
$P(x) \;\; \underline{|Q(x)} \rightarrow$ Divisor
$R(x) \;\;\; C(x) \rightarrow$ Cociente
$\downarrow$
Resto

☑ Ejemplo:

Dados: $P(x) = 2x - 3 + 2x^4$ y $Q(x) = -2x + x^2$

Halla P(x) : Q(x).

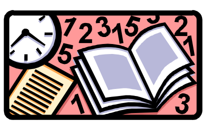
El dividendo debe estar completo y ordenado: P(x) = $2x^4 + 0x^3 + x^2 + 2x - 3$

El divisor debe estar ordenado: Q(x) = $x^2 - 2x$

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 & \big|\ x^2 - 2x \\
-\underline{2x^4 - 4x^3} & 2x^2 + 4x + 8 \rightarrow \text{Cociente} : C(x) \\
4x^3 + 0x^2 & \\
-\underline{4x^3 - 8x^2} & \\
8x^2 + 2x & \\
-\underline{8x^2 - 16x} & \\
18x - 3 \rightarrow \text{Resto} : R(x) &
\end{array}
$$

C(x) = $2x^2 + 4x + 8$

R(x) = 18x – 3



ACTIVIDADES 6.5

1) Resuelve las siguientes divisiones de monomios.

a) $\left(-10z^4\right) : (5z) =$ b) $\left(\frac{1}{4}y^5\right) : \left(-\frac{3}{2}y^3\right) =$ c) $\left(-10x^7\right) : \left(-4x^2\right) =$

2) Resuelve las siguientes divisiones.

a) $\left(6w^3 - 12w^2 + 3w\right) : (-3w) =$

b) $\left(\frac{1}{5}v^5 - \frac{2}{3}v^4 + \frac{1}{4}v^3 - 2v^2\right) : \left(\frac{1}{2}v\right) =$

c) $\left(u^4 - 15u^3 + 9u^2 - \frac{6}{5}u\right) : \left(-\frac{3}{5}u\right) =$

d) $\left(-6t^4 + \frac{3}{2}t^3 - 2t^2\right) : \left(-\frac{1}{3}t^2\right) =$

e) $\left(-\frac{1}{3}s^6 + s^5 - 2s^4 + 5s^3\right) : \left(-3s^3\right) =$

3) Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $\left(2x^3 - 4x^2 - 5x - 3\right) : (x + 1) =$

b) $\left(x^3 - 6x^2 + 2\right) : \left(\frac{1}{3}x + 1\right) =$

c) $\left(5d^3 - 4d - 3\right) : \left(d^2 - d\right) =$

d) $\left(2d^5 + d^4 - 3d^3 + d^2\right) : \left(d^3 - d + 1\right) =$

Rtas: 1) a) $-2z^3$ b) $-\frac{1}{6}y^2$ c) $\frac{5}{2}x^5$

2) a) $-2w^2+4w-1$

b) $\frac{2}{5}v^4-\frac{4}{3}v^3+\frac{1}{2}v^2-4v$

c) $-\frac{5}{3}u^3+25u^2-15u+2$

d) $18t^2-\frac{9}{2}t+6$

e) $\frac{1}{9}s^3-\frac{1}{3}s^2+\frac{2}{3}s-\frac{5}{3}$

3) a) $C(x)=2x^2-6x+1$
$R(x)=-4$

b) $C(x)=3x^2-27x+81$
$R(x)=-79$

c) $C(d)=5d+5$
$R(d)=d-3$

d) $C(d)=2d^2+d-1$
$R(d)=-2d+1$

Regla de Ruffini

Paolo Ruffini: Nace en Valentano (Italia) el 22 de septiembre de 1765. Fue matemático, médico y filósofo. Fue rector de la Universidad de Módena. Investigó sobre la teoría de las ecuaciones algebraicas y sobre el cálculo de probabilidades. Durante la epidemia de 1817 contrae el tifus. Destaca su obra *Teoría general de las ecuaciones*. El 9 de mayo de 1822 muere en Módena (Italia), y es enterrado en la iglesia de Santa María de Pomposa.

La **regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio P(x) por otro de la forma x - a.

☑ Ejemplo 1:

Dados $P(x)=-x-5+2x^3$ y $Q(x)=x+2$.

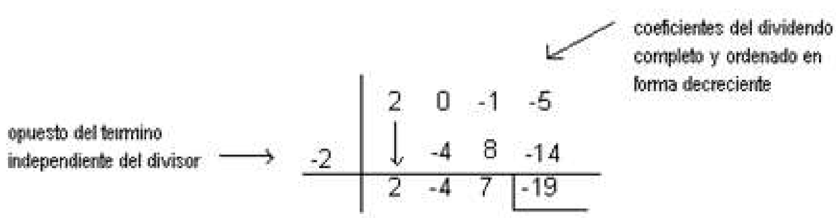
Halla el cociente y el resto de P(x) : Q(x).

Como el divisor tiene la forma requerida podemos aplicar la regla de Ruffini.

El polinomio **dividendo** debe estar **completo** y **ordenado** en forma decreciente.

Entonces completamos y ordenamos el dividendo: $P(x)=2x^3+0x^2-x-5$

<u>*Aplicamos la regla*</u>: El coeficiente principal se baja sin ser modificado, luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma el resultado al segundo coeficiente del dividendo y así sucesivamente.



Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto de la división.

El grado del polinomio cociente **es un grado menor** que el grado del polinomio dividendo.

Justifica por qué.

Por lo tanto: El cociente es C(x)= $2x^2 - 4x + 7$ y el resto es R(x)= -19

☑ Ejemplo 2:

Dados P(x) = $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 10$ y Q(x) = x – 2.

Halla el cociente y el resto de P(x) : Q(x).

Recordemos que, primero disponemos los coeficientes de P(x) del siguiente modo:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Se escribe el coeficiente principal debajo de la línea horizontal, luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y el resultado se suma al segundo coeficiente

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & 1 & & & \end{array}$$

Con el valor obtenido se reitera el proceso hasta llegar al final.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & 4 & 2 & 14 & 16 \\ \hline & 2 & 1 & 7 & 8 & 26 \end{array}$$

El último número obtenido (26) es el resto de la división, los otros son los coeficientes del polinomio cociente. Para escribir éste, basta recordar que el grado es una unidad menor al del dividendo.

C(x) = $2x^3 + x^2 + 7x + 8$

R(x) = 26

Podemos hacer el otro algoritmo de la división para verificar estos resultados:

$$\begin{array}{rl|l} 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 10 & & x - 2 \\ \cline{3-3} -2x^4 + 4x^3 \qquad\qquad\qquad & & 2x^3 + x^2 + 7x + 8 \\ \hline x^3 + 5x^2 - 6x + 10 & & \\ -x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & & \\ \hline 7x^2 - 6x + 10 & & \\ -7x^2 + 14x \qquad & & \\ \hline 8x + 10 & & \\ -8x + 16 & & \\ \hline 26 & & \end{array}$$

Teorema del resto

El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma x - a, es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.

El teorema del resto es de gran utilidad porque permite encontrar el resto de una división sin realizarla y determinar si la misma es exacta.

☑ Ejemplo 1:

Dados: $P(x)=2x^3+5x^2-x-5$ y $Q(x)=x+2$

El resto de la división P(x):Q(x), se obtiene:

P(-2) = $2(-2)^3+5(-2)^2-(-2)-5$

P(-2) = -16 + 20 + 2 – 5

P(-2) = 1

El resto de la división es 1.

☑ Ejemplo 2:

Dados: $P(z)=z^2-2z-3$ y $Q(z)=z-3$

El resto de la división P(z):Q(z), se obtiene:

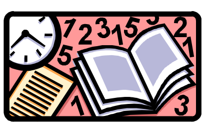
P(3) = $3^2-2\cdot 3-3$

P(3) = 9 – 6 – 3

P(3) = 0

Cuando el resto de una división del tipo P(x) : Q(x), siendo Q(x) = x - a, es cero, podemos afirmar que:

- La división es exacta
- P(x) es divisible por Q(x)
- Q(x) es divisor de P(x)
- Q(x) es factor de P(x)
- Q(x) divide a P(x)
- P(x) es múltiplo de Q(x)
- x = a, es un cero o raíz de P(x)



ACTIVIDADES 6.6

1) Aplica la regla de Ruffini en cada una de las siguientes divisiones y verifiquen el resto de cada división, aplicando el teorema del resto.

a) $(2x^3+3x-1):(x-2)=$

b) $(3x^3-2x^2-2):(x+1)=$

c) $(-24d-d^4+5):(d+3)=$

d) $(-d^5+12d^3-15d^2-16):(d+4)=$

2) Marca con una **X** las divisiones exactas.

a) $(x^5+32):(x+2)=$ ☐ b) $(4y^{102}+5y-y^{21}):(y-1)=$ ☐ c) $(16-d^4):(d-2)=$ ☐

3) Encuentra el valor de k para que al dividir (y^4 – 5y + k) por (y – 1), de resto 0.

Rtas ejercicios 1 y 2:

1) a) $C(x)=2x^2+4x+11$, $R(x)=21$

b) $C(x)=3x^2-5x+5$, $R(x)=-7$

c) $C(d)=-d^3+3d^2-9d+3$, $R(d)=-4$

d) $C(d)=-d^4+4d^3-4d^2+d-4$, $R(d)=0$

2) a) Exacta b) No exacta c) Exacta

Potencia de un monomio.

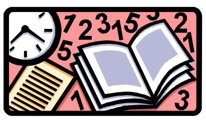
Para resolver una potencia cuya base es un monomio, conviene aplicar la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación y también potencia de otra potencia.

Recordamos las propiedades: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$$\left(a^m\right)^t = a^{m \cdot t}$$

☑ Ejemplos:

a) $(2x)^4 = 2^4.x^4 = 16x^4$ b) $(-3z^3)^2 = 9z^6$ c) $\left(-\frac{2}{5}e^7\right)^3 = -\frac{8}{125}e^{21}$



ACTIVIDADES 6.7

Resuelve las siguientes potencias

$a)\left(4x^2\right)^3 =$ c) $-\left(-0{,}1.\ e^9\right)^3 =$

$b)\left(-\frac{2}{3}m^6\right)^2 =$ d) $\left(3a^5\right)^2.\left(a^4\right)^5 =$

Rtas: a) $64x^6$ b) $\frac{4}{9}m^{12}$ c) $\frac{1}{1000}e^{27}$ d) $9a^{30}$

Cuadrado de un binomio

Si tenemos que elevar al cuadrado un binomio tendremos una expresión simbólica como: $(a + b)^2$. Esta expresión es equivalente a la siguiente expresión $(a + b).(a + b)$.

El producto de un binomio por sí mismo recibe el nombre de **cuadrado de un binomio**.

El desarrollo de un cuadrado de binomio siempre tiene la misma estructura. Por ejemplo, al elevar al cuadrado el binomio "*a + b*" se obtendrían las siguientes expresiones algebraicas equivalentes:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si observamos la última expresión que es la más simplificada, podemos afirmar que:

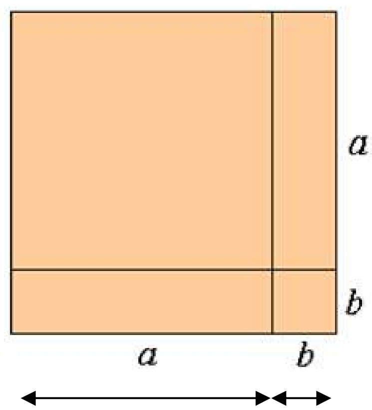
- Según la cantidad de términos es un trinomio
- Dos de sus términos son cuadrados perfectos y
- el tercer término es el doble del producto entre el primer y el segundo término del binomio dado.

Por lo anterior la expresión "$a^2 + 2ab + b^2$" recibe el nombre de **trinomio cuadrado perfecto**.

Entonces: $\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

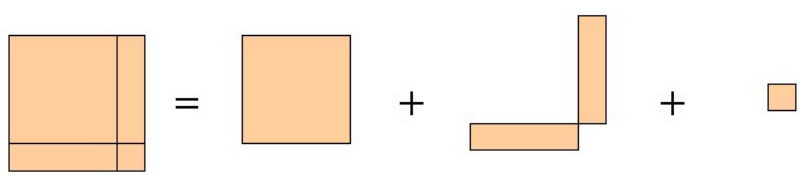
Representación geométrica del cuadrado del binomio

El cuadrado del binomio, se puede interpretar geométricamente en el plano.
Consiste en considerar $(a + b)^2$ como el área de un cuadrado cuyo lado mide "*a* + *b*" unidades.



Y luego, subdividir al cuadrado en cuatro regiones rectangulares menores: dos cuadrados, uno de lado "*a*" unidades y otro de lado "*b*" unidades, y dos rectángulos cuyos lados miden "*a*" y "*b* " unidades.

$$\left(a+b\right)^2 = \quad a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2$$



Luego, la suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado (*a* + *b)*.

Para justificar:

- Julián afirma que: $\left(a+b\right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ¿Puedes determinar si esta afirmación es falsa o verdadera?
- El profesor de matemática le pregunta a Camila: ¿a qué es igual $(a + b)^2$? Camila le responde: $a^2 + b^2$

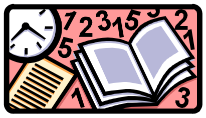
¿Cómo le explicarías a Camila que su respuesta es errónea?

☑ Ejemplos:

a) $\left(x+3\right)^2 = x^2 + 3^2 + 2.x.3 = x^2 + 9 + 6x$

b) $\left(e^{4}+5\right)^{2}=\left(e^{4}\right)^{2}+2.e^{4}.5+5^{2}=e^{8}+10e^{4}+25$

c) $\left(\frac{1}{2}-t\right)^{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+2.\frac{1}{2}.(-t)+(-t)^{2}=\frac{1}{4}-t+t^{2}$



ACTIVIDADES 6.8

1) Desarrolla los siguientes cuadrados de binomios.

$a)\,(x+5)^{2}=$ c) $\left(e^{9}+1\right)^{2}=$

$b)\left(\frac{2}{3}-m\right)^{2}=$ d) $\left(3a^{5}+2\right)^{2}=$

2) Desarrolla (a + b + c)^2 geométricamente.

3) Carina eligió dos números naturales consecutivos, 2 y 3. Los elevó al cuadrado y restó la potencia menor a la mayor. Obtuvo la suma de los números que había elegido inicialmente. Repitió el procedimiento con otros dos números consecutivos, obteniendo nuevamente la suma de los números elegidos esta vez. ¿Este resultado se cumple para cualquier par de números naturales consecutivos? Justifica.

Rtas ejercicio 1:

a) $x^{2}+10x+25$ b) $\frac{4}{9}-\frac{4}{3}m+m^{2}$ c) $e^{18}+2e^{9}+1$ d) $9a^{10}+12a^{5}+4$

<u>Cubo de un binomio</u>

Si tenemos que elevar al cubo un binomio tendremos una expresión simbólica como:

(a + b)^3

Esta expresión es equivalente a la siguiente expresión (a + b)^2. (a + b).

El desarrollo de un cubo de binomio siempre tiene la misma estructura. Por ejemplo, al elevar al cubo el binomio "*a + b*" se obtendrían las siguientes expresiones algebraicas equivalentes: Completa:

$$(a+b)^{3}=(a+b)^{2}\cdot(a+b)=\left(a^{2}+2ab+b^{2}\right).(a+b)=\text{...............................}$$

Al elevar al cubo un binomio se obtiene un **cuatrinomio cubo perfecto**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

☑ Ejemplos:

a) $(x+2)^{3}=x^{3}+2^{3}+3.x^{2}.2+3.x.2^{2}=x^{3}+8+6x^{2}+12x$

b) $\left(3e^2-5\right)^3=\left(3e^2\right)^3+3.\left(3e^2\right)^2.\left(-5\right)+3.\left(3e^2\right).\left(-5\right)^2+\left(-5\right)^3=$

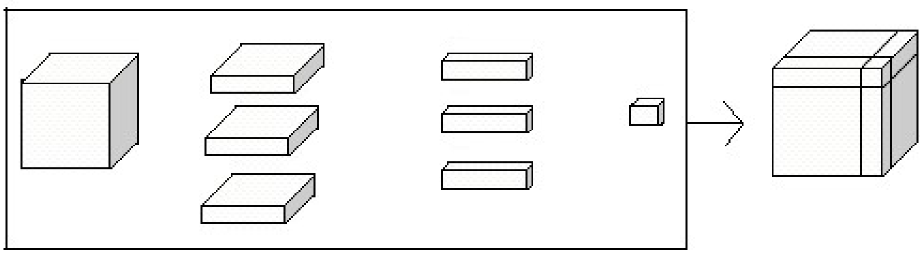
$=27e^6+3.9e^4.\left(-5\right)+3.\left(3e^2\right).25-125=$

$=27e^6-135e^4+225e^2-125$

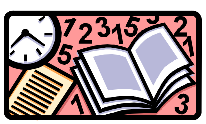
Representación geométrica del cubo del binomio

El cubo de un binomio, se puede interpretar geométricamente en el espacio.

Consiste en considerar $(a + b)^3$ como el volumen de un cubo cuyo lado mide "*a* + *b*" unidades.



Indica el volumen de cada cuerpo que conforma el cubo de lado (a+b). Compara estos resultados con la expresión algebraica vista anteriormente que resulta de $(a+b)^3$.



ACTIVIDADES 6.9

1) Desarrolla los siguientes cubos de binomios.

$a)\left(x+1\right)^3=$ c) $\left(e^2-2\right)^3=$

$b)\left(\frac{2}{5}-t\right)^3=$ d) $\left(2a^3+a\right)^3=$

2) Realiza las siguientes operaciones combinadas

a) $(x+1)^2 + 2x\,(x-3) + 3 =$
b) $(2m+1)^2 - (m+1).(m-1) =$
c) $(t + 2)^3 - 3t\,(t^3 - 2) =$

Recuerda separar en términos antes de comenzar

Rtas: 1) a) x^3+3x^2+3x+1 b) $\frac{8}{125}-\frac{12}{25}t+\frac{6}{5}t^2-t^3$

c) $e^6-6e^4+12e^2-8$ d) $8a^9+12a^7+6a^5+a^3$

2) a) $3x^2-4x+4$ b) $3m^2+4m+2$ c) $-3t^4+t^3+6t^2+18t+8$

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1) a) Indica cuales de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios y justifica la respuesta:

I) $x^3 - 2.x^2 - 2^{-1}$ II) $2.x - 5.x^{-1}$ III) $2.x^2 - x – 3$ IV) $x + 2 - 5.x^5$ V) $(2.x - 2.x^2 + x^3)/6$

b) En los siguientes polinomios, determina: a) grado; b) término independiente; c) coeficiente principal; d) ordénalos en forma decreciente si es necesario; e) complétalos, si es necesario.

I) R(x) = $-8x^2 - \frac{1}{2}x^3 + 27x$ II) M(x) = $3x^3 + 18x^2 - \frac{1}{2}$

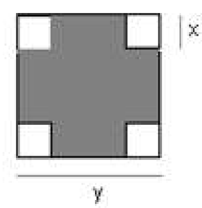
III) D(e) = $0,\hat{1}\ e^3 - \frac{1}{6} + e^5$ IV) P(e) = $0,5\ e^3 - e^5$

2) Dados los polinomios: P(z) = $-\frac{2}{3}z^2 + 1$; $Q(z) = z^2 + \frac{z}{2} + 3$

Calcula: a) P(z)+Q(z)= b) P(z)+Q(z) – P(z)=

c) (3z+1).(- P(z))= d)(-4z).P(z)+ 2.Q(z) =

3) Se cortaron cuatro esquinas cuadradas cuyo lado mide x unidades, en el cuadrado grande de lado "y" unidades, según muestra la figura y se pidió calcular el área de la zona sombreada.



Los alumnos respondieron

a) $y^2 - 4x^2$ b) $(y – 2x).(y + 2x)$ c) $(y – 2x)^2 + 4x\,(y – 2x)$

Indica si son o no correctas las respuestas dadas por los alumnos.

4) Resuelve hasta obtener la mínima expresión: (separa en términos antes de comenzar)

$$\left[(e+2)^3 - e^3 + 0,\hat{2}\right].\left(e^4 - 1\right) =$$

5) a) Si P(x)= (x – 5).(x + 5), ¿para qué valor de x , P(x)=20?

b) Resuelve las siguientes ecuaciones:

b1) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

b2) $\left(\frac{2}{3}x + 1\right)^2 = \left(\frac{2}{3}x + 1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x - 1\right)$

b3) $(x-2).(x+2) = (x+5).(x-5)$

6) Dados los siguientes polinomios:

A(x) = $x^2 + \frac{1}{2}x^3$ B(x) = $-x^3 + 2x + \frac{1}{2}$ C(x)= x + 5

a) Halla A(x) –B(x).

b) Halla el cociente y el resto de B(x) : C(x). c) Halla $[A(x)]^2$

7) Halla **a** en cada división, si P(x) es el dividendo y Q(x) es el divisor:

P(x)	*Q(x)*	*Resto*
$x^2 + x - 1$	x - 2	a
$x^3 - 9$	x + 3	a

8) Dados los siguientes polinomios:

A(x) = $x^3 + \frac{1}{2}$ B(x) = $(x-\sqrt{2}).(x+\sqrt{2}).\,x$

a) Halla $[A(x)]^2$ b) Halla A(x) – B(x). c) Halla A(x): (x+2)

9) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) Si P(x) = $4x^2 + 2$ entonces P($\sqrt{2}$) = 4

b) Los ceros o raíces del polinomio: F(t) = $t^2 - 2t$ son t = 0 y t = - 2

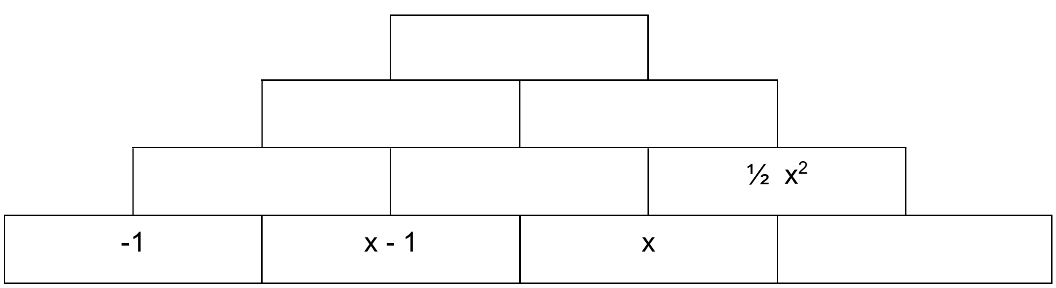
c) La expresión: M(x) = $\sqrt{x+1}$ es un polinomio.

d) El resto de la división entre polinomios: $(x^3 - 1)$: (x + 1/2) es cero.

e) La mínima expresión resultante de $[(x-7)^2 - 49 + 2x] : x$ es (x – 14).

f) El polinomio: R(t) = $t^2 + 4$ no tiene ceros o raíces reales.

10) En cada bloque de esta pirámide escalonada, debe figurar el producto de las expresiones algebraicas escritas en los dos bloques inmediatos inferiores sobre los cuales se apoya.



11) Halla el polinomio P(x) no nulo, tal que:

a) $\frac{P(x)}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1$ b) $\frac{x^5 - 32}{P(x)} = x - 2$

c) $\dfrac{P(x)}{x+3} = x^3 - x + 2$ d) $\dfrac{P(x)}{x-2} = x + 2$

12) Si P(x) = $x^5 - 3x^3 - 2$, Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) P(-1) = 0

b) x + 1 divide a P(x)

c) x + 1 es factor de P(x)

d) P(x) es divisible por (x +1)

e) x = –1 es raíz de P(x)

f) El resto de dividir P(x) por (x + 1) es 0.

13) Dado P(x) = $2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$ ¿Es (x + 1) factor de P(x)? ¿Por qué?

14) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) Si P(x) = $(3 - m)\,x^2 + m.(1 + x)$ tiene un cero o raíz real en x = 1,entonces m = 2.

b) La expresión W(x) = $-4x^{-2} + \dfrac{1}{4}$, es un polinomio.

c) La única raíz real de la función y = 0 ; es x= 0.

d) El polinomio N(t) = $6t + t^2$ tiene dos raíces reales.

e) El grado del polinomio resultante del producto de dos polinomios, de grados m y n respectivamente, con la misma variable, es de grado m+n.

15) Halla el valor de "k" para que $Q(n) = (3+k)^2.n^4 + (1+k^2).n$ sea divisible por $(n+1)$.

16) Encuentra **a** y **b** para que el polinomio:

a) P(x)= $a.x^4 + a.x^2 - x - 1$ una raíz real sea x = 1

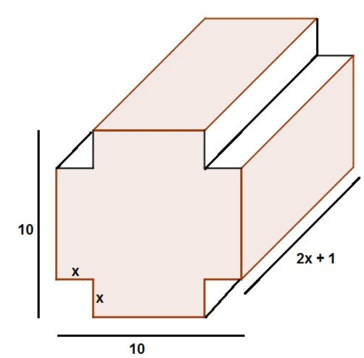
b) M(x)= $a.x^5 + 3.x^3 - b.x^2 + 1$ para que tenga dos raíces, una es x = -1 y otra es x = ½

c) P(x) = $a.(x + 1)^4.(x - 1)^6.(x - 3)^2$ al ser dividido por (x – 2) de resto 9.

d) Q(x) = x – 5 divida al polinomio P(x) = $bx^3 + x^2 - b$

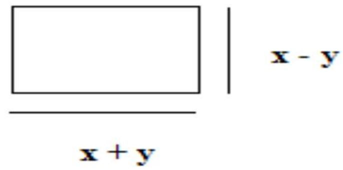
e) Al dividir P(x) = $2x^3 + 4x^2 - 2x + a$ por Q(x) = x – 3 se obtenga 10 como resto.

17) Escribe un polinomio reducido para expresar el área total y el volumen del siguiente cuerpo:



18) Completa con lo pedido en cada caso:

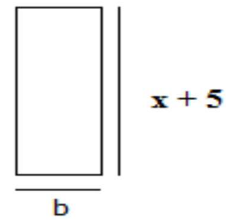
a)



área: ....

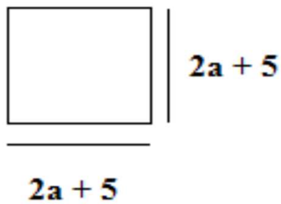
b)

área: $x^2 - 25$



el valor de b: ....

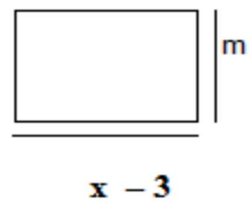
c)



área: ....

d)

área: $x^2 - 7x + 12$



el valor de m: ....

19) Reduce las siguientes expresiones:

a) $(x + 5)^2 - (x - 5)^2 =$

b) $(2x + 4)^2 - (2x + 4)(2x - 4) =$

c) $(x - 4)(x + 8) + (2x - 4)(2x - 8) =$

d) $(x - 5)^3 - (x + 5)^3 =$

e) $(y + 3)^2 - (y - 2)^2 =$

20) Completa:

a) $2x^2 \cdot (3x^3 + 5x) =$ ....

b) $(7a - 4p).(7a + 4p) =$ ....

c) $(b-5)^2 =$ ....$-$.........$+$........

d) ....$\cdot(3m^2 - m) = 15m^4 - 5m^3$

e) $25z^2 - \frac{4}{9} = (\ldots\ldots\ldots\ldots) \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

f) $4z^2 + 12z + 9 = (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots)^2$

Rtas Actividades Complementarias.

1) b)

I) Grado: 3

Término Independiente: 0

Coeficiente Principal: $-\frac{1}{2}$

Ordenado en forma decreciente y Completo: $-\frac{1}{2}x^3 - 8x^2 + 27x + 0$

II) Grado: 3

Término Independiente: $-\frac{1}{2}$

Coeficiente Principal: 3

Ordenado en forma decreciente y Completo: $3x^3+18x^2+0x-\frac{1}{2}$

III) Grado: 5

Término Independiente: $-\frac{1}{6}$

Coeficiente Principal: 1

Ordenado en forma decreciente y Completo: $e^5+0e^4+0,\widehat{1}e^3+0e^2+0e-\frac{1}{6}$

IV) Grado: 5

Término Independiente: 0

Coeficiente Principal: -1

Ordenado en forma decreciente y Completo: $-e^5+0e^4+0,5e^3+0e^2+0e+0$

2) a) $\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{2}z+4$ b) $z^2+\frac{1}{2}z+3$ c) $2z^3+\frac{2}{3}z^2-3z-1$ d) $\frac{8}{3}z^3+2z^2-3z+6$

3) Todas las respuestas son correctas.

4) $6e^6+12e^5+\frac{74}{9}e^4-6e^2-12e-\frac{74}{9}$

5) a) $x=\pm\sqrt{45}$ b) b1) $x=-\frac{3}{20}$ b2) $x=-\frac{3}{2}$ b3) $S=\varnothing$

6) a) $\frac{3}{2}x^3+x^2-2x-\frac{1}{2}$ b) $C(x)=-x^2+5x-23;\ R(x)=\frac{231}{2}$ c) $x^4+x^5+\frac{1}{4}x^6$

7)

P(x)	*Q(x)*	*Resto*
$x^2 + x - 1$	x - 2	a = 5
$x^3 - 9$	x + 3	a = -36

8) a) $x^6+x^3+\frac{1}{4}$ b) $2x+\frac{1}{2}$ c) x^2-2x+4

10)

$-\frac{1}{2}x^7+\frac{3}{2}x^6-\frac{3}{2}x^5+\frac{1}{2}x^4$			
$-x^3+2x^2-x$	$\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3$		
$-x+1$	x^2-x	$\frac{1}{2}x^2$	
-1	x - 1	x	$\frac{1}{2}x$

11) a) $P(x)=x^4-1$ b) $P(x)=x^4+2x^3+4x^2+8x+16$

c) $P(x)=x^4+3x^3-x^2-x+6$ d) $P(x)=x^2-4$

13) (x + 1) no es factor de P(x) porque $P(-1)=9\neq 0$

15) $k=-\frac{4}{3}$

16) a) $a=1$ b) $a=-\frac{20}{3}$, $b=\frac{14}{3}$ c) $a=\frac{1}{9}$ d) $b=-\frac{25}{124}$ e) $a=-74$

17) Área: $-8x^2+80x+240$ Volumen: $-8x^3-4x^2+200x+100$

18) a) x^2-y^2 b) x – 5 c) $4a^2+20a+25$ d) x – 4

19) a) 20x b) 16x + 32 c) $5x^2-20x$ d) $-30x^2-250$ e) 10y + 5

- Chorny y otros. (2010) Matemática 4. Estrada. Buenos Aires. Argentina
- Abdala y otros. (2003). Carpeta de matemática I. Polimodal. Aique. Buenos Aires. Argentina.
- Altman y otros. (2003). Matemática 2: Funciones 2. Longseller. Buenos Aires. Argentina.
- Cortés, G. (1992). Matemática 3. Estela . Buenos Aires. Argentina.
- Fauring y otra. . Problemas (OMA). Red Olímpica. Olimpíadas Matemática Argentina. Buenos Aires. Argentina.
- Garaventa y otros. (2003). Carpeta de matemática de noveno. Aique. Buenos Aires. Argentina.
- Garaventa y otros. (2001). Carpeta de matemática de octavo. Aique. Buenos Aires. Argentina.
- Laurito y otros. (2001). Matemática 9 EGB. Puerto de Palos. Buenos Aires. Argentina.
- Piñeiro y otro. (2002). Matemática 9 EGB. Santillana Hoy. Buenos Aires. Argentina.
- http://gaussianos.com/dos-demostraciones-de-la-irracionalidad-de-raiz-de-2/
- http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen2/ciencia3/062/htm/sec_7.htm
- http://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa
- http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/Loponte/ProyFinalLoponte/proyectofinal/matematicos.htm
- http://es.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini