Matemática I

Prof. Kernot, Sandra Fabiana

Prof. Santarrone, María Alejandra

Prof. Veronesi, Celina Adela

sandra.kernot@gmail.com; santarrone@gmail.com ; celinaveronesi@hotmail.com

ISBN-13: 978-987-692-025-4
Obra registrada en la Dirección Nacional del Derecho de Autor.
Hecho el depósito que marca la Ley 11.723.

2014-Santa Fe- Argentina

Matemática I

Esp. Sandra Kernot
Profesora en Matemática egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del litoral.
Especialista en Docencia Universitaria. Título otorgado por la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Especialista en entornos virtuales de aprendizaje otorgado por centro de Altos estudios universitarios de la Organización de Estados Iberoamericanos y Virtual Educa.
Docente investigadora de Universidades Nacionales. Categoría V.
Profesora de la Escuela Industrial Superior. Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del litoral. en el período 2003-2013.
Adjunta Interina. Cátedra de matemática. Facultad de Arquitectura Diseño y Urbanismo. Universidad Nacional del Litoral.
Profesora de matemática en Instituto de formación docente de la provincia de Santa Fe.

Esp. María Alejandra Santarrone
Profesora en Matemática egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del litoral.
Especialista en Docencia Universitaria. Título otorgado por la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Docente investigadora de Universidades Nacionales. Categoría V.
Profesora Titular. Escuela Industrial Superior. Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral.
Jefe de Trabajos Prácticos Ordinaria. Cátedra de Estadística. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional del Litoral.

Prof. Celina Veronesi

Profesora de Matemática egresada de la Facultad de Formación Docente en Ciencias.
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Profesora interina de Matemática. Escuela Industrial Superior. Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del litoral.
Profesora titular de Matemática. Colegio Antonia Ma. Verna.
Profesora titular. ISPI Nº9017 San José Adoratrices.
Profesora Ordinaria de la Facultad de Formación Docente en Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Hasta 1996 en las siguientes cátedras: Geometría Analítica; Conducción del Aprendizaje especializado en Matemática; Algebra I; Matemática General I y II; Matemática Discreta I y II.
Desde 2012 con el beneficio a la jubilación.

Prólogo

“Lo que yo pretendo es que usted enseñe a sus alumnos a descubrir por sí solos (...)
Lo que yo pretendo es que usted sea capaz de desafiar,
de provocar la inteligencia de sus alumnos como para que ellos ejerciten
su capacidad de pensamiento creativo autónomo (...)
Lo que yo pretendo es que usted le haga caso a Borges
y pueda enseñar la voluntad de aprender”. Fausto Toranzos

La necesidad de “echar luz” a ideas, procedimientos y conceptos que en el momento de enseñar nos abren un abanico de posibles explicaciones, donde debemos optar por alguna o algunas críticamente a través del sustento de las teorías en que se fundamentan, nos ha llevado a pensar en la posibilidad de trabajar, disfrutar colaborativa y cooperativamente entre las tres autoras. Estamos convencidas “que esfuerzos individuales no tienen gran impacto” y que como lo expresa F.Tonucci “la idea del verdadero trabajo en grupo es que juntos podemos hacerlo mejor de lo que podría hacerlo solo el mejor del grupo”.

A pesar de ser el libro de texto nuestro recurso didáctico principal, año tras año, advertíamos que nunca estaba completo, siempre era posible mejorarlo, hacerle algún recorte o algún agregado. De allí nuestro interrogante: Un libro de texto escrito por nosotras mismas, ¿por qué no?.Fue así cuando comenzaron a aparecer las primeras hojas, seguramente ya intervenidas, de este texto.

Con la esperanza que se animen a hacer sus propios materiales didácticos y que esto se transforme en un proceso continuo, ponemos en sus manos nuestro trabajo pensado y disfrutado. En este mirar-nos logramos repensar nuestra práctica, acordar la secuenciación de contenidos y de actividades, como así también buscar la rigurosidad matemática en la formulación de conceptos, definiciones y propiedades; manteniendo un vocabulario acorde al que pueden interpretar nuestros estudiantes en el proceso de apropiación de dichos conocimientos. Según Carmen Sessa *"hacer matemáticas va más allá de las cuentas. Es imaginar, hacer conjeturas, discutir, poner a prueba lo que uno supone y validarlo, construir entre todos un conocimiento".*

La presentación de los contenidos y la secuencia de actividades que presentamos tienden a posibilitar la construcción de aprendizajes significativos y autónomos. Fueron concebidas para:

* Fomentar la diversidad de procedimientos para resolver un problema. La resolución de problemas es un eje que atraviesa todo el trabajo, porque creemos que es lo que pone en marcha el quehacer matemático.
* Anticipar posibles obstáculos epistemológicos y/o concepciones erróneas de los alumnos, recuperando la potencialidad constructiva de los mismos.
* Resignificar conceptos previos, necesarios para avanzar en el tratamiento de algunos temas, a veces tratados intuitivamente en un momento y con mayor formalidad en el momento en que se advierte que el alumno puede hacerlo.
* Favorecer la expresión coloquial/simbólica/gráfica al momento de argumentar afirmaciones, fomentando que los estudiantes cuenten sus resoluciones, para así validar el trabajo propio y el de sus compañeros con el intercambio de ideas. Combinar en forma dialéctica, el trabajo individual, grupal y cooperativo.

Al trabajar este texto con sus alumnos los profesores deben saber que el abordaje de los temas desarrollados en el mismo no es lineal, la formalidad en la notación y la introducción de demostraciones en algunos casos, como el enunciado de propiedades en forma simbólica, se debe a que posibilita al alumno acercarse al trabajo del quehacer en matemática y nuestra realidad áulica nos lo permite. Algunos términos son usados para aproximarnos al uso habitual de los alumnos, sin perder rigurosidad.

Aspiramos a que el docente intervenga el texto, que haga las observaciones que crea conveniente a sus alumnos, adapte actividades a la realidad de su propia práctica, que critique y analice. Puesto que como sostiene Santos Guerra *“los materiales didácticos no son un fin en sí mismo. Solo el uso de los mismos, puesto al servicio de un proceso de enseñanza- aprendizaje y analizado desde una concepción determinada del mismo, permitirá entender si resultan útiles, estériles, o incluso perjudiciales”.*

Es nuestra intención compartir esta experiencia que evaluamos como posibilitadora para lograr una posición activa de indagación de las propias prácticas.

Las autoras.

Índice

Capítulo 3. Geometría. Segunda parte

Capítulo 4. Expresiones Algebraicas

Capítulo 5. Números Racionales

Capítulo 6. Introducción al concepto de función.

Capítulo 7. Probabilidad y estadística

¿Cómo usar este libro?

En la presentación de cada capítulo están señalados los contenidos más importantes que serán desarrollados. Cada vez que termines de estudiar el capítulo, asegúrate de comprenderlos y relacionarlos entre sí.

Durante su desarrollo te encontrarás con los siguientes íconos, no los pases por alto, ya que cada uno tiene su significado:

Significa que comienza una sección, a continuación se desarrollará un nuevo tema.

A su lado aparecen definiciones y propiedades.

Indica la propuesta de una actividad para que te asegures que comprendes el tema.

Alerta que a continuación hay un concepto muy importante que debes recordar.

Previene de posibles errores que se pueden cometer al aplicar el concepto previamente desarrollado.

Da reglas prácticas para aplicar los conceptos o destaca algunas cuestiones importantes.

+
ACTIVIDADES

Es una sección, al final de cada capítulo, con problemas y ejercicios para pensar, aplicar y afianzar lo visto, separado por secciones a través del ícono "Rapiditos".

Propone algunas preguntas o cuestiones interesantes para que las pienses y trates de resolverlas mentalmente.

Presenta alguna frase o chiste sobre matemática.

El trabajo con un texto de matemática se hace más fácil procediendo en espiral. Esto supone que en cada tema des una primera lectura, muchas cosas son fáciles, pero otras quizás necesites volver a revisarlas. Analiza bien los ejemplos resueltos. Resalta las palabras claves. Elabora cuadros de síntesis de los conceptos de cada tema. Debes asegurarte que: entiendas las ideas que se exponen, cómo los ejemplos corresponden a esas ideas y de que tú mismo seas capaz de explicar con tus propias palabras esos ejemplos. Cuando se termina cada sección resuelve las actividades correspondientes al final del capítulo. Si te resultan difíciles, no puedes empezar o no puedes resolverlas bien, vuelve a leer pausadamente lo que precede, es posible que haya algo que aún no comprendas. Ten presente el refrán:

"Oigo, y olvido. Veo, y recuerdo. Hago, y entiendo".

Capítulo 0
Introducción

¿CÓMO TRABAJAR EN MATEMÁTICA?

La matemática es una ciencia que forma parte del pensamiento humano, es una construcción de la humanidad, y es necesario su conocimiento para vivir en sociedad. La importancia de aprender matemática, como cualquier otra ciencia, radica en saber hacer cosas con lo que aprendes, aplicar los conocimientos en diferentes contextos y resolver problemas.

Nada más cercano para aprender que el hacer. Aprender matemática tiene mucho que ver en cómo se hace matemática, es decir cómo piensan y desarrollan los conceptos los matemáticos.

Puedes acercarte a la tarea de hacer matemática por dos caminos que te proponemos: la resolución de problemas y el razonamiento en matemática.

- Resolución de problemas
- Razonamiento en matemática.

- ***RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS***

En esta primera sección se plantean distintas situaciones problemáticas, para que las pienses e intentes distintos procedimientos de resolución. Puedes resolverlas aplicando los conocimientos que has aprendido en matemática.

Un problema es un desafío. Resolverlo es un proceso en el que se puede tener éxito o no; pero vale la pena intentarlo; nada se consigue sin esfuerzo.

Ante la pregunta: ¿Qué es lo que tengo que hacer frente a un problema?, he aquí algunas sugerencias:

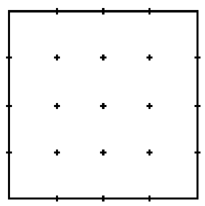
1) Lee atentamente el enunciado para comprenderlo. Si hay algún término que no conoces consulta en el diccionario.
2) Señala en el enunciado el o los verbos que indican lo que se pide.
3) Hazte una imagen mental de la situación planteada.
4) Si la situación lo permite realiza:

-Una figura de análisis consignando en la misma los datos e incógnitas, analiza si son suficientes y no contradictorios.

-Un diagrama o un gráfico.

5) Piensa qué relaciones y/o propiedades matemáticas vinculan los datos que se dan con lo que se quiere obtener.
6) Trázate un plan y resuelve la situación planteada.
7) Deja registrado todos los pasos que has seguido para resolver.
8) Verifica si la solución obtenida satisface las condiciones del problema. En caso afirmativo da la respuesta y en caso negativo vuelve atrás, revisa lo planteado y si no dio resultado ensaya otro camino.

1) La docena de choclos costaba ayer \$28 y hoy cuesta \$28.50.Responde: ¿cuál será el precio de la docena de choclos mañana?
2) En un triángulo rectángulo isósceles un cateto tiene una longitud de 3m y la hipotenusa mide aproximadamente 4,24m. Calcula su área.
3) Encuentra diferentes formas de dividir un cuadrado en cuatro partes de igual área. Reproduce el cuadrado que se muestra a continuación tantas veces como lo necesites.



4) Responde: ¿cuál es el volumen de un cilindro cuyo desarrollo plano son los dos círculos correspondientes a las bases y un rectángulo de 18,84 cm por 15,7cm? (considera π = 3,14).
5) Construye un rectángulo $ABCD$ con $\overline{AB}$=10cm y $\overline{BC}$ = 6cm.

   Sobre la diagonal $\overline{AC}$ marca un punto P a 9 cm de A.

   Traza la paralela al lado $\overline{AD}$ que pase por P, cortará a $\overline{AB}$ en I y a $\overline{CD}$ en J.

   También traza por P una paralela al lado $\overline{AB}$ que corte a $\overline{AD}$ en K y $\overline{BC}$ en L.

   Responde: ¿los rectángulos $IBLP$ o $KPJD$ tienen igual área? ¿Por qué?
6) Se tienen 504 caramelos y se quieren fraccionar en bolsitas que contengan la misma cantidad de caramelos. Enumera todas las opciones posibles, diciendo cuántas bolsitas serán necesarias y cuántos caramelos contendrán en cada caso.

- ***RAZONAMIENTO EN MATEMÁTICA***

El razonamiento es el proceso mediante el cual se sacan conclusiones a partir de determinada información. En muchas oportunidades, al observar varias veces que una acción produce el mismo resultado, concluimos que esa acción tendrá siempre ese resultado.

Por ejemplo:

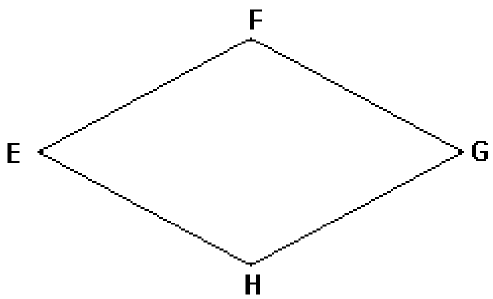
Enseguida nos podemos dar cuenta que la generalización a la que se llega en el ejemplo es falsa. Para demostrar que una generalización es falsa, se puede citar un ***contraejemplo*** (son ejemplos que invalidan las generalizaciones falsas), en este caso la existencia de un pato negro.

Veamos a continuación una generalización pero ahora en matemática:

Generalización: "Si un cuadrilátero tiene cuatro lados iguales, tiene cuatro ángulos interiores iguales".

Para demostrar que esta generalización es falsa debemos presentar un cuadrilátero con cuatro lados iguales que no tenga cuatro ángulos iguales.

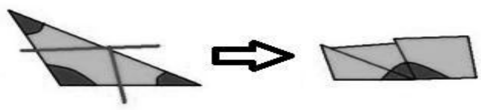
Contraejemplo: el cuadrilátero $EFGH$ tiene todos sus lados iguales, pero el ángulo $H\hat{E}F$ no es igual con el ángulo $E\hat{F}G$



Todas las propiedades y teoremas que has aprendido hasta el momento en matemática son generalizaciones verdaderas, ya que suceden en todos los casos. Por ejemplo:

Generalización: "La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180º".
Podemos verificarla para un triángulo cualquiera por ejemplo aplicando el siguiente procedimiento:

Dibuja un triángulo en una hoja de papel, recórtalo y corta sus esquinas. Luego, junta los recortes como se muestra en la figura de la derecha.

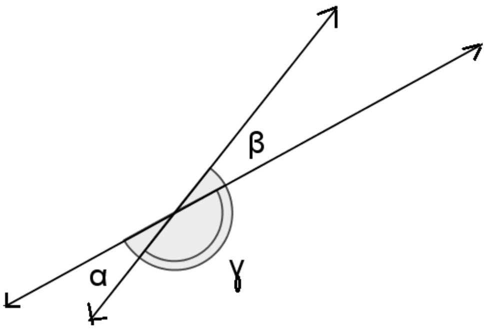


¿Qué se observa acerca de la suma de las medidas de los ángulos interiores de cada triángulo?
……………………………………………………………………………………………………

Para demostrar que esta generalización es verdadera no basta con medir en uno o varios casos particulares. Más delante, luego de aprender los conceptos desarrollados en el capítulo 3 del libro, estarás en condiciones de entender la demostración correspondiente a esta propiedad.
Para demostrar que una generalización es verdadera para todos los casos uno de los razonamientos que se utiliza en matemática es el ***razonamiento deductivo***.
El razonamiento deductivo requiere la aceptación de unas cuantas generalizaciones básicas sin probarlas. Estas generalizaciones se llaman ***postulados***.
Las generalizaciones verdaderas, se llaman ***teoremas.*** Los teoremas pueden probarse con la ayuda de definiciones, postulados y la lógica del razonamiento deductivo. Cada teorema consta de las siguientes partes:

* **Enunciado del teorema:** expresa las condiciones que se imponen a los elementos que intervienen y también expresa la propiedad que se desea probar.
* **Hipótesis:** es la expresión de las condiciones impuestas a los elementos que intervienen.
* **Tesis:** es la expresión de la propiedad que se desea demostrar.
* **Demostración:** es el razonamiento lógico y deductivo que conduce a probar la Tesis. Aquí es donde pueden intervenir definiciones, postulados y otros teoremas ya probados. También se pueden utilizar los datos o condiciones establecidos en la Hipótesis.

Ejemplo de la demostración de un teorema



* Enunciado: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
* Hipótesis: $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos opuestos por el vértice
* Tesis: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$
* Demostración:

Considerando el ángulo $\hat{\gamma}$ adyacente al $\hat{\alpha}$; como la suma de dos ángulos adyacentes es un ángulo llano, se tiene:

$\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 1\ \text{llano}$.En consecuencia:$\hat{\gamma}$ es suplemento de $\hat{\alpha}$.

Pero el $\hat{\gamma}$ es también adyacente del $\hat{\beta}$, por lo tanto:

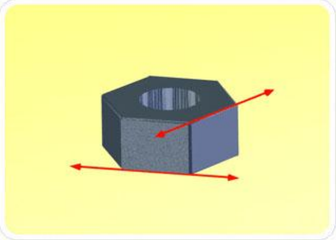
$\hat{\beta} + \hat{\gamma} = 1\ \text{llano}$.En consecuencia:$\hat{\gamma}$es también suplemento de $\hat{\beta}$.

Pero dos ángulos que tienen igual suplemento son iguales; luego, como $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ tienen el mismo suplemento, resultan iguales, es decir:

$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ que es la tesis y por lo tanto se ha demostrado el teorema.

Indica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifica en ambos casos.

a) Todo triángulo que tiene dos de sus lados que miden 3cm y 4cm respectivamente, tiene área 6 cm^2.
b) Todo triángulo equilátero es isósceles.
c) La sustracción entre dos números naturales da como resultado otro número natural.
d) Si a un número natural se le suma su consecutivo se obtiene por resultado un número par.



Capítulo 1
Geometría
Primera Parte

http://whitey.net/es/egipto-fotos.htm

La Geometría (geo: Tierra; metrein: medir) es una de las ramas más antiguas de la matemática.

Según cuenta la historia, el estudio de la Geometría comienza a orillas del río Nilo en el Antiguo Egipto a partir de la necesidad de sus pobladores de delimitar y medir terrenos por los desbordes periódicos del río.

En la actualidad sus aplicaciones son muchísimo más amplias. En la vida diaria nos encontramos muchas veces con frases como “caminá siete cuadras derecho y una hacia la derecha”; “comprá dos papeles de regalo para envolver el regalo, con uno no va alcanzar”; “¡cuánta agua desperdiciaste al llenar la bañera!”; “tengo que poner la torta en un molde redondo de 50cm”. Todas ellas se relacionan con conceptos que se estudian en geometría. En años anteriores estudiaste muchos de estos conceptos, en el siguiente capítulo se proponen actividades para que recuerdes y apliques algunos y sigas aprendiendo otros.

- ∗ Notaciones en geometría
- ∗ Rectas y planos. Semiplanos y semirrectas
- ∗ Distancia de un punto a un punto.
- ∗ *Distancia de un punto a una recta.
- ∗ Recta tangente a una circunferencia
- ∗ Algunas propiedades de los ángulos y diagonales de polígonos convexos
- ∗ Triángulos
- ∗ Cuadriláteros convexos
- ∗ Cálculo de área
- ∗ Cuerpos geométricos

➢ *NOTACIONES EN GEOMETRÍA*

Algunos elementos y figuras geométricas tienen notaciones particulares dentro de la geometría, que permiten con pocos símbolos, describir sus características. Observa que en la sección anterior ya hemos utilizado varias de ellas.

Convenio de notación:

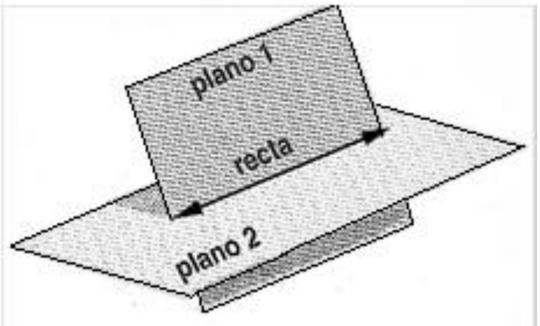
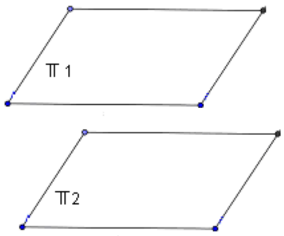
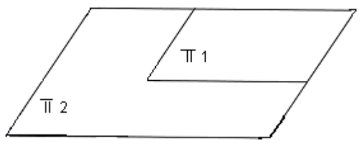
- Los puntos se señalarán con letra imprenta mayúscula.
- Las rectas se nombrarán con letra imprenta minúscula.
- A los planos se nombrarán con letras griegas.
- Los ángulos se nombrarán con tres puntos. Por ejemplo:
  $A\hat{B}C$ es el ángulo con vértice en B y cuyos lados pasan por A y por C. Puede representar también la amplitud del ángulo. Se podrá nombrar a los ángulos con letras griegas.
- $r \,//\, s$ indica que las rectas r y s son paralelas
- $r \perp s$ indica que las rectas r y s son perpendiculares
- $\overline{AB}$ es el segmento cuyos extremos son los puntos A y B. Puede representar también la longitud del segmento.
- $\overleftrightarrow{AB}$ es la recta que pasa por los puntos A y B
- $\overrightarrow{AB}$ es la semirrecta de origen A que contiene al punto B
- $C\,(O,r)$ es la circunferencia de centro O y radio r

➢ *RECTAS Y PLANOS*

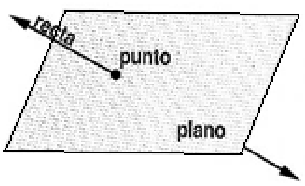
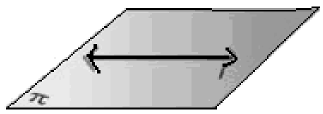
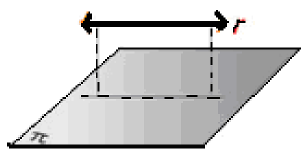
Identifica en la siguiente fotografía elementos que den una idea aproximada de punto, recta y plano.

Arquitecto japonés, YasuhiroYamashita.
La casa recibe el nombre de Mineral House.
Foto: http://decoracion2.com/otros/casas-otros/page/11/ 19/10/13

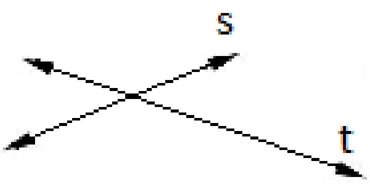
POSICIONES DE DOS PLANOS EN EL ESPACIO

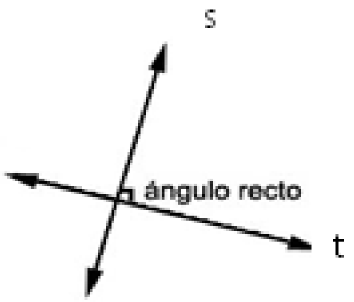
Planos secantes	**Planos paralelos**
Tienen una recta en común. Los planos secantes pueden ser oblicuos o perpendiculares.  	No tienen ningún punto en común o todos sus puntos coinciden  Los que tienen todos sus puntos en común se los denomina planos coincidentes. 

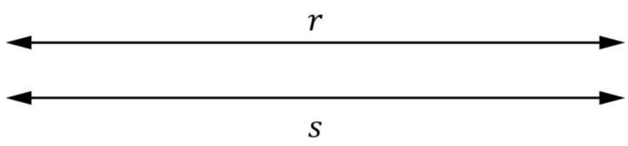
POSICIONES ENTRE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

RECTA SECANTE A UN PLANO	RECTA PARALELA A UN PLANO	
La recta corta al plano en un punto La recta puede ser perpendicular al plano u oblicua.  	La recta está contenida en el plano  	La recta es paralela al plano. La recta está siempre a la misma distancia del plano. 

POSICIONES DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

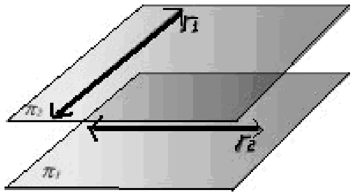
<table>
<tr>
<td rowspan="2">Rectas coplanares
Existe un plano que las contiene.</td>
<td>Rectas secantes
Tienen un punto en común.
Si se intersecan formando un ángulo recto, son perpendiculares, de lo contrario son oblicuas


$s \not\perp t$


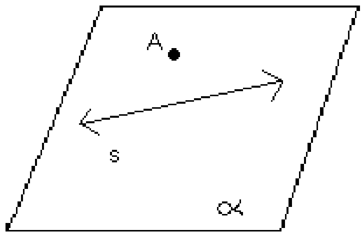
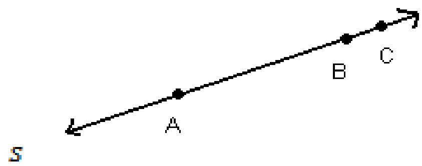
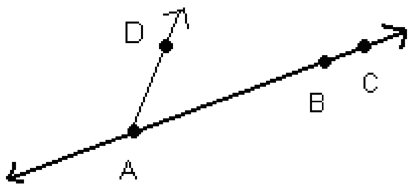
$s \perp t$</td>
</tr>
<tr>
<td>Rectas paralelas
No tienen punto en común o tienen todos sus puntos en común. $r // s$


Si tienen todos sus puntos en común se denominan coincidentes $r // s$

r coincide con s</td>
</tr>
</table>

Rectas alabeadas No existe un plano que las contenga a ambas.	

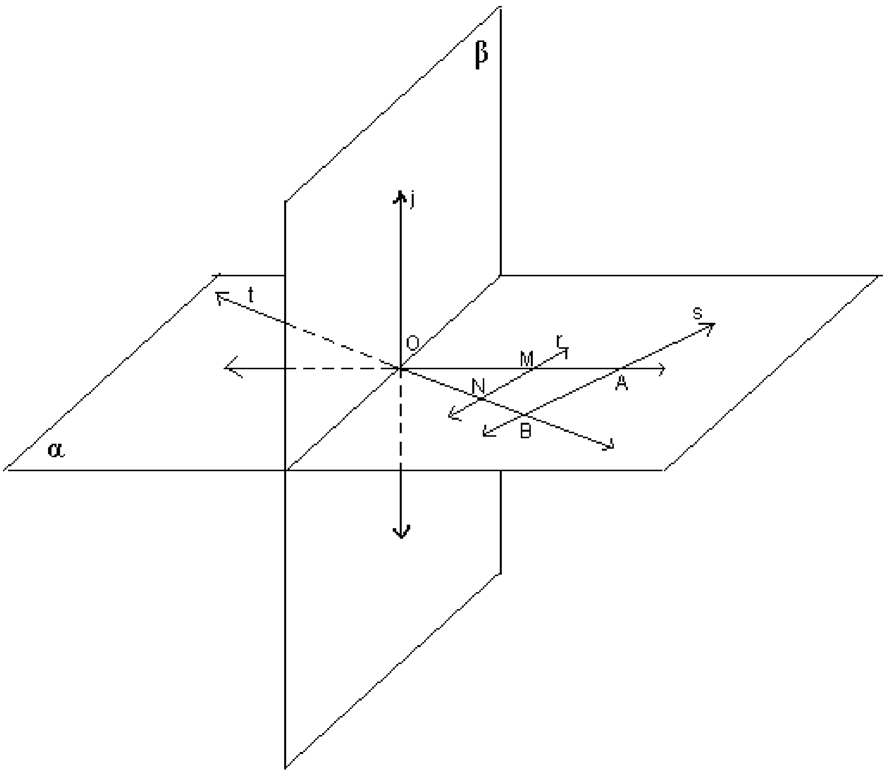
SEMIPLANOS Y SEMIRRECTAS

Semiplanos: Dado el plano α, la recta s y el punto A, contenidos en él, quedan determinados dos semiplanos: el semiplano de borde s que contiene al punto A y el semiplano de borde s que no contiene al punto A. Notación: $Spl(s, A)$ Se lee: Semiplano de borde s que contiene el punto A	
Semirrectas opuestas: Dada la recta s y el punto B contenido en ella, quedan determinadas dos semirrectas de origen B con sentidos opuestos: La semirrecta de origen B que contiene al punto A $(\overrightarrow{BA})$ y la semirrecta de origen B que contiene al punto C $(\overrightarrow{BC})$. Se llaman semirrectas opuestas.	
Segmentos consecutivos: Se dice que dos segmentos son consecutivos cuando tienen sólo un extremo en común. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son consecutivos. También lo son $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. En cambio los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ no son consecutivos.	

1) Identifica en la fotografía elementos que den una idea aproximada de posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.

Residencia moderna geométrica en Cataluña, España
http://arquitecturadecasas.blogspot.com.ar/2010/07/casas-modernas-informacion.html 19/10/13 .

2) Observando el dibujo, indica con verdadero o falso según corresponda.



	V	F
Los planos α y β son paralelos		
$\overleftrightarrow{j}$ está incluida en el plano α		
$\overleftrightarrow{s}$ es alabeada con $\overleftrightarrow{OM}$		
$\overleftrightarrow{j}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son coplanares		
$\overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{t}$ no tienen puntos en común		
El punto A pertenece al semiplano de borde $\overleftrightarrow{NB}$ y que contiene al punto M		
El punto O pertenece a la recta $\overleftrightarrow{NB}$		
La semirrecta de origen M que contiene al punto A es opuesta a la semirrecta de origen M que contiene al punto O		
La semirrecta de origen N que contiene al punto O es opuesta a la semirrecta de origen B que contiene al punto O		
El segmento que tiene por extremos los puntos N y O está incluido en la recta $\overleftrightarrow{t}$		

3) Marca un punto P sobre un plano α. Traza varias rectas que pasen por el punto P, y nómbralas. Responde: ¿Cuántas rectas se pueden trazar por el punto P?

4) Dibuja dos puntos R y S en un plano β. Responde: ¿Cuántas rectas no coincidentes puedes trazar, que pasen por los dos puntos a la vez?

5) Marca tres puntos A, B, C no alineados en un plano π. Traza todas las rectas que queden determinadas por estos tres puntos, tomándolos de a dos. Menciona los segmentos que quedaron determinados.

6) Sobre una recta s, en un plano μ, marca los puntos A, B, C, D, en ese orden. Escribe todos los segmentos distintos que quedaron determinados por esos cuatro puntos.

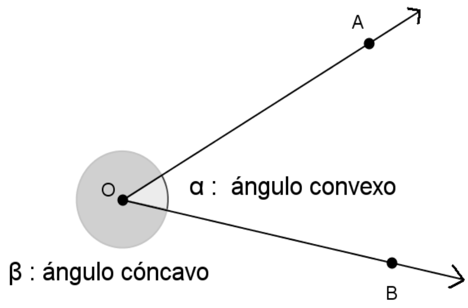
➢ *ÁNGULOS*

Si en un plano consideramos dos semirrectas con el mismo origen, las regiones que quedan determinadas en el plano, incluyendo las semirrectas, se llaman ángulos.

El origen **O** de las semirrectas, se llama **vértice del ángulo** y las semirrectas $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$, **lados del ángulo**.

<ins>Notación</ins>: $A\hat{O}B$ convexo es otra forma de nombrar al ángulo α .

$A\hat{O}B$ cóncavo es otra forma de nombrar al ángulo β .



Se dice que dos ángulos son **consecutivos** cuando tienen un lado en común y ningún otro punto común.
Si la suma de dos ángulos es igual a un ángulo recto, se dice que los ángulos son **complementarios**.
Si la suma de dos ángulos es igual a un ángulo llano, se dice que los ángulos son **suplementarios**.
Se dice que dos ángulos son **adyacentes** cuando tienen un lado en común y los otros dos lados son semirrectas opuestas.
Se dice que dos ángulos son **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

1) Dados los ángulos α y β cuyas amplitudes son, respectivamente, 17º 22´15´´ y 38º20´10´´, calcula las amplitudes de:
   a) La mitad del complemento de $\hat{\beta}$.
   b) El triple de $(\hat{\beta} - \hat{\alpha})$.
   c) El suplemento de la tercera parte de $\hat{\alpha}$.
2) Calcula el suplemento del complemento de un ángulo de 40°.
3) Si sabemos que el ángulo convexo $A\hat{B}C$ mide 65°, responde: ¿cuánto mide el ángulo cóncavo $A\hat{B}C$? Dibuja ambos ángulos.

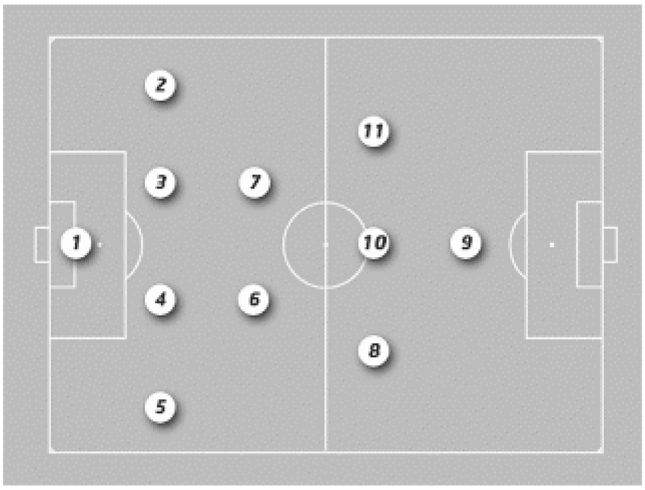
➢ *DISTANCIAS EN EL PLANO*

A continuación se muestra la disposición de los jugadores para un partido de fútbol.

Marca en el gráfico:

a) el segmento que mide la distancia entre los jugadores 7 y 8.

b) el segmento que mide la distancia del jugador 9 a una de las líneas laterales.



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Se llama **distancia entre dos puntos** a la medida del segmento que los une.

Completa:

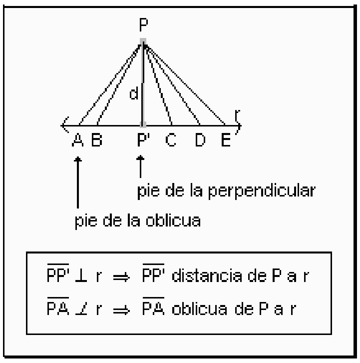
Dados dos puntos A y B.

* Si la unidad de medida es el cm, la distancia entre A y B es...

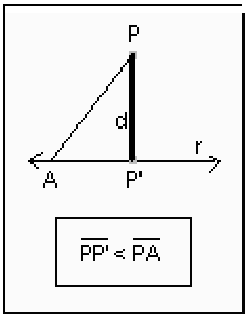
* Si la unidad de medida es  la distancia entre A y B es......... u.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

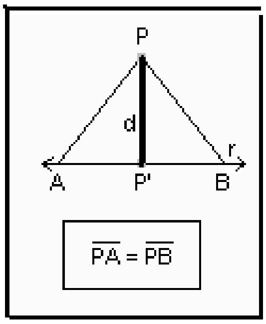
Se llama **distancia de un punto a una recta** a la medida del segmento perpendicular a la recta, cuyos extremos son dicho punto y el pie de la perpendicular (es el punto en común entre el segmento y la recta).



Propiedad 1: La distancia de un punto a una recta es menor a la medida de cualquier otro segmento oblicuo comprendido entre ese punto y la recta.



Propiedad 2: Si dos segmentos oblicuos entre un punto y una recta tienen sus pies equidistantes del pie de la perpendicular, son iguales.



Propiedad 3: Dados dos segmentos oblicuos entre un punto y una recta, el menor será aquel cuyo pie se encuentre más próximo al pie de la perpendicular.

1) Realiza la figura correspondiente a la propiedad 3.
2) Identifica gráfica y coloquialmente los puntos del plano α, que estén a una distancia de 4 cm de una recta s, que está en el mismo plano α.
3) Identifica gráfica y coloquialmente los puntos que estén a 4 cm de distancia de la recta s.

- ***RECTA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA***

Una recta es tangente a una circunferencia cuando tienen uno y sólo un punto en común.

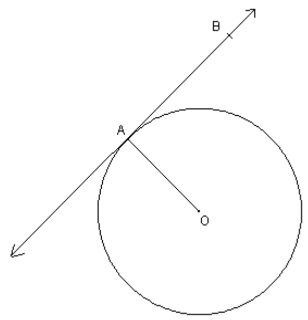
¿Cómo trazar una recta tangente a una circunferencia de 2cm de radio?

1er paso: Trazar $C(O,r)\ con\ r = 2cm$

2do paso: Trazar $\overline{OA}$ con $A \in C$

3er paso: Trazar por A una recta perpendicular a $\overline{OA}$, nombrar a un punto de dicha recta, B

Luego $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente a $C(O,r)\ en\ A$.



Responde: ¿por qué, al trazarla de esa forma, podemos asegurar que la recta y la circunferencia sólo tendrán un punto en común?

Sobre una recta tangente a una circunferencia de centro *O* y radio $r = 3cm$ se marca un punto A, a 4cm del punto de tangencia. Responde: ¿cuál es la distancia del punto A al centro de la circunferencia?

➢ *ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS Y DIAGONALES DE POLÍGONOS CONVEXOS.*

Utiliza la tabla que te proponemos para visualizar mejor las respuestas a cada una de las preguntas planteadas. Registra el procedimiento que justifica tus respuestas. En todos los casos se trata de polígonos convexos.

a) ¿Cuántas diagonales pueden trazarse desde cada vértice, en un triángulo? ¿y en un cuadrilátero? ¿y en un pentágono? ¿y en un hexágono?... ¿y en un polígono de n-lados?

b) ¿Cuántas diagonales tiene un triángulo? ¿y un cuadrilátero? ¿y un pentágono? ¿y un hexágono?... ¿y un polígono de n-lados?

c) ¿Cuántos triángulos quedan determinados en un triángulo al trazar todas las diagonales desde un vértice? ¿y en un cuadrilátero? ¿y en un pentágono? ¿y en un hexágono?... ¿y en un polígono de n-lados?

d) ¿Cuál es la suma de las amplitudes de los ángulos interiores en un triángulo? ¿y en un cuadrilátero? ¿y en un pentágono? ¿y en un hexágono?... ¿y en un polígono de n-lados?

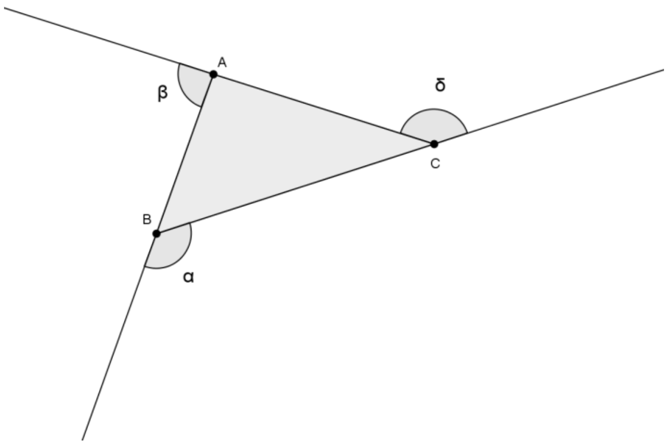
Polígono	Nº de diagonales desde un vértice	Nº de diagonales	Nº de triángulos trazando las diagonales desde un vértice	Suma de las amplitudes de los ángulos interiores	Suma de las amplitudes de los ángulos exteriores
Triángulo					
Cuadrilátero					
Pentágono					
Hexágono					
…..	……..	……..	……	…..	…..
De n-lados					

1) Calcula la suma de los ángulos interiores de un decágono.
2) Calcula la medida de un ángulo interior en un hexágono regular.
3) Responde:
   a) ¿cuánto suman los ángulos interiores en un polígono de 17 lados? ¿y los ángulos exteriores?
   b) ¿Cuánto mide cada ángulo exterior en un polígono regular de 16 lados? ¿y cada ángulo interior?
   c) ¿Cuánto mide cada ángulo interior en un pentágono regular? ¿y cada ángulo exterior del mismo?
4) En un polígono regular la amplitud de cada ángulo exterior es de 24º. Responde: ¿qué polígono es?
5) En un polígono regular la amplitud de cada ángulo interior es de 144º. Responde: ¿de qué polígono se trata?

➢ *TRIÁNGULOS*

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

Un **triángulo** es un polígono convexo que tiene tres lados.



Los puntos A, B, C son los vértices del triángulo.

Los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ son los lados del triángulo.

Los ángulos convexos $A\hat{B}C, B\hat{C}A, C\hat{A}B$ son los ángulos interiores.

Los ángulos $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}$ son ángulos exteriores.

CLASIFICACIÓN

*Según sus ángulos

-Un triángulo es acutángulo si sus tres ángulos interiores son agudos.

- Un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos interiores es recto.

-Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos interiores es obtuso.

*Según sus lados

-Un triángulo es escaleno si todos sus lados son de distinta longitud.

-Un triángulo es isósceles si tiene por lo menos dos lados de igual longitud.

-Un triángulo es equilátero si tiene sus tres lados de igual longitud.

ALGUNAS PROPIEDADES PARA RECORDAR

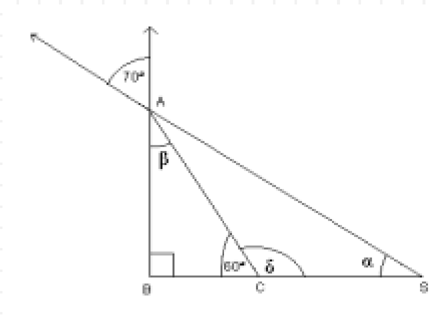
- En todo triángulo la suma de las amplitudes de los ángulos interiores es 180º.
- En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales.
- En los triángulos escalenos, los tres ángulos tienen diferentes amplitudes.
- En los triángulos isósceles, por lo menos dos ángulos tienen la misma amplitud.
- En los triángulos equiláteros, los tres ángulos tienen la misma amplitud.
- En todo triángulo, la suma de las amplitudes de los ángulos exteriores es 360º.
- En todo triángulo, cada ángulo exterior es suplementario con el ángulo interior de igual vértice.
- En todo triángulo, la amplitud de un ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores, no adyacentes con él.
- La medida de cada lado de un triángulo es menor que la suma de las medidas de los otros dos, y mayor que su diferencia (entre la medida del mayor y la del menor).

Completa el siguiente cuadro. Si existe un triángulo que verifique las dos condiciones realiza un gráfico representativo, si no existe dicho triángulo, justifica por qué.

	Acutángulo	Obtusángulo	Rectángulo
Isósceles			
Equilátero			
Escaleno			

1) Si el ángulo exterior de un triángulo isósceles adyacente a uno de los ángulos interiores iguales es de 159º 40’.Responde:¿cuál es la amplitud de los ángulos interiores del triángulo?

2) Determina las amplitudes de los ángulos β, α y δ. Con los datos obtenidos clasifica según sus lados y según sus ángulos al triángulo ACS.



Dos triángulos son iguales si tienen sus tres ángulos y tres lados respectivamente iguales.

3) Construye y clasifica según sus lados y ángulos, el triángulo ABC, donde $\overline{AB} = 2cm$, $C\hat{A}B = 30°$ y $A\hat{B}C = 60°$

4) Construye y clasifica según sus lados y según sus ángulos, el triángulo ABC, donde $\overline{CB} = 4\ cm$, $\overline{BA} = 7\ cm$ y $A\hat{B}C = 115°$

5) Construye y clasifica según sus lados y según sus ángulos, el triángulo CDE, donde $\overline{CD} = 6cm$, $D\hat{E}C = 50°$ y $D\hat{C}E = 100°$

- En todo **triángulo rectángulo**, el cuadrado de la medida de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

  Además se cumple el recíproco: Si los lados de un triángulo cumplen con la condición $a^2 = b^2 + c^2$, dicho triángulo es **rectángulo.**

- En todo triángulo a ángulo mayor se opone lado mayor y recíprocamente a lado mayor se le opone ángulo mayor.

- En consecuencia: La hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre mayor a cada uno de los catetos.

1) Un campo de fútbol mide 90 m de ancho y 120 m de largo, el máximo permitido por el reglamento. Un jugador quiere recorrer la máxima distancia sin cambiar de dirección. Indica cuál es y calcula esa distancia.

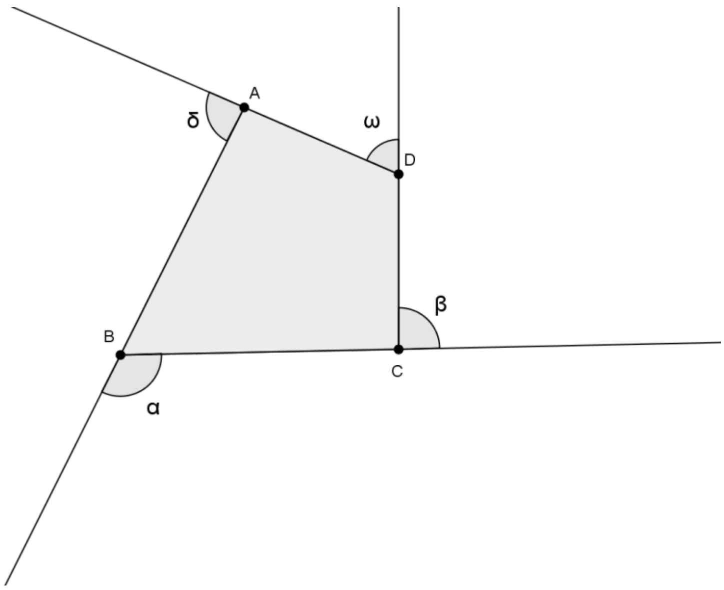
2) Una torre de televisión tiene 40 m de altura hasta el inicio de la antena. Se quiere sujetar al suelo con tres cables de 50 m de longitud. Responde: ¿a qué distancia, de la base de la torre, estarán las fijaciones al suelo de dichos cables?

3) Calcula la medida de una de las diagonales de un cubo cuya arista es de 10cm. Responde: ¿son todas de igual longitud?

➢ *CUADRILÁTEROS CONVEXOS*

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS.

Un **cuadrilátero** convexo es un polígono convexo que tiene cuatro lados.



Los puntos A, B, C y D son los vértices del cuadrilátero

Los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ son los lados del cuadrilátero.

Los ángulos convexos $A\hat{B}C, B\hat{C}D, C\hat{D}A, D\hat{A}B$ son los ángulos interiores.

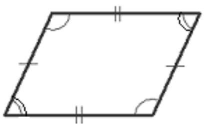
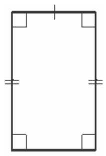
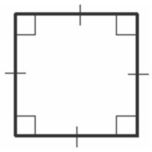
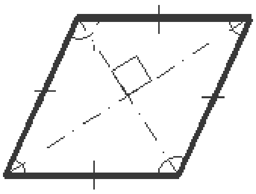
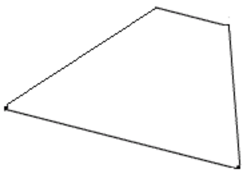
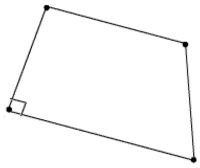
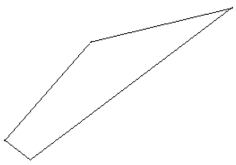
Los ángulos $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\omega}$ son ángulos exteriores.

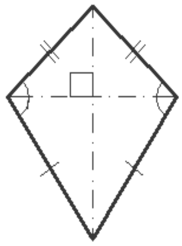
- Dos vértices de un cuadrilátero que son extremos de un mismo lado se llaman **vértices consecutivos**. Nómbralos……………………………………………………………………………………
- Dos vértices de un cuadrilátero que no son extremos de un mismo lado se llaman **vértices opuestos**. Nómbralos…………………………………………………………………………………………
- Los lados de un cuadrilátero que tienen un extremo (vértice) común se llaman **lados consecutivos**. Nómbralos…………………………………………………………………………………..
- Dos lados de un cuadrilátero que no tienen ningún punto en común, son **lados opuestos**. Nómbralos……………………………………………………………………………………………………
- Dos ángulos interiores de un cuadrilátero cuyos vértices son vértices consecutivos del cuadrilátero, se llaman **ángulos consecutivos**. Nómbralos…..............................……………
- Dos ángulos de un cuadrilátero cuyos vértices son vértices opuestos del mismo se llaman **ángulos opuestos** del cuadrilátero. Nómbralos………………………….....................................
- El segmento cuyos extremos son dos vértices opuestos del cuadrilátero, se llama **diagonal** del cuadrilátero. Nómbralas…………………………………………………..................................
- El segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados opuestos del cuadrilátero, se llama **base media**. Trázalas y nómbralas………………..

La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo es 360º.

DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Paralelogramo:

Cuadrilátero con sus lados opuestos paralelos
</td>
<td>Rectángulo:
cuadrilátero con todos sus ángulos iguales
</td>
<td rowspan="2">Cuadrado:
Cuadrilátero con todos sus lados y ángulos iguales
</td>
</tr>
<tr>
<td>Rombo:
cuadrilátero con todos sus lados iguales
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Trapecio:
Cuadrilátero con sólo dos lados paralelos
</td>
<td colspan="2">Trapecio Rectángulo:
Trapecio con un ángulo recto
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Trapecio Isósceles:
Trapecio con lados no paralelos iguales
</td>
</tr>
<tr>
<td>Trapezoide
Cuadrilátero sin lados paralelos
</td>
<td colspan="2">Romboide:

Cuadrilátero con dos lados consecutivos iguales y los otros dos lados también iguales y distintos de los anteriores
</td>
</tr>
</table>

1) Coloca una cruz donde corresponda:

	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Todos los rectángulos son				
Todos los cuadrados son				
Todos los rombos son				

2) Dibuja un cuadrilátero convexo con diagonales perpendiculares. Compara tu construcción con tus compañeros. ¿Qué cuadrilátero obtuviste? ¿Es única la solución?

- ***CÁLCULO DE ÁREA***

Antes de resolver problemas, veamos una forma diferente de calcular el área de un triángulo conociendo los tres lados.

¿Cómo podemos calcular el área de un triángulo ABC sabiendo que sus lados miden $\overline{AB} = 5\ cm$; $\overline{AC} = 7\ cm$ y $\overline{BC} = 6cm$?

Analicemos dos posibilidades:

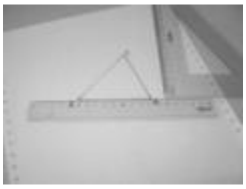
Primera posibilidad: Conociendo la medida de un lado y la medida de la altura correspondiente a dicho lado.

A través de la fórmula que ya conocemos $A = \dfrac{b.h}{2}$, donde A es el área del triángulo, b una base del mismo y h la altura correspondiente.

Construye el triángulo, traza sus tres alturas, registra las medidas de las mismas y verifica que el área determinada por cada una de ellas con sus respectivas bases es aproximadamente la misma.

Trazado de la altura de un triángulo: Altura del triángulo ABC, correspondiente al lado $\overline{AB}$

Ubicamos la regla paralelamente al lado $\overline{AB}$



Colocamos la escuadra para lograr la perpendicularidad buscada.

Desplazamos la escuadra sobre la regla hasta encontrar el vértice opuesto al lado $\overline{AB}$, en este caso es el punto C.

Trazamos el segmento que une C con el pie de la perpendicular sobre el lado $\overline{AB}$.

Queda trazada una de las tres alturas del triángulo ABC, correspondiente al lado $\overline{AB}$.

De igual manera se realiza el procedimiento para trazar las alturas correspondientes a los otros dos lados.

Segunda posibilidad: Conociendo la medida de los tres lados.

En Alejandría, durante el siglo I antes de nuestra era, vivió un famoso matemático llamado Herón. Entre sus descubrimientos figura la fórmula siguiente, que permite calcular el área de un triángulo conocidas las longitudes a, b, c de sus lados. Sabiendo que:

$$A = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$ Fórmula de Herón

semiperímetro: $s = (a + b + c) : 2$

A través de esta fórmula podemos conocer el área del triángulo ABC sin necesidad de construirlo y tener errores de medición.

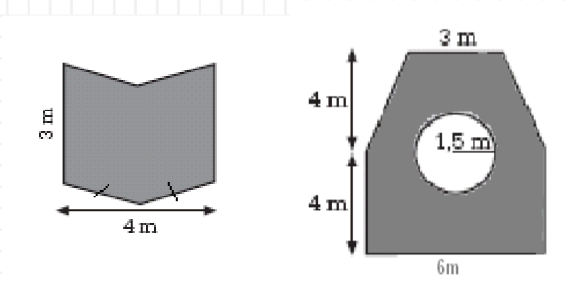
$s = \frac{5+6+7}{2}$ luego

$$A = \sqrt{9.(9-5).(9-6).(9-7)} = \sqrt{9.4.3.2} = \sqrt{216} = 14{,}7 cm^2$$

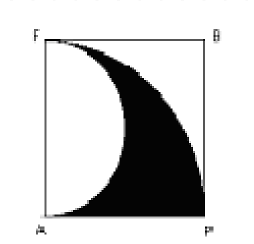
Por lo que podemos asegurar que exactamente el área de ABC es $\sqrt{216}\,cm^2$ y aproximadamente $14{,}7cm^2$.

1) Considera:
a) el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 unidades, halla su área de dos maneras distintas (sin realizar ninguna medición).
b) todos los triángulos isósceles de perímetro 12 unidades y lados enteros, ¿cuál será el de mayor área?

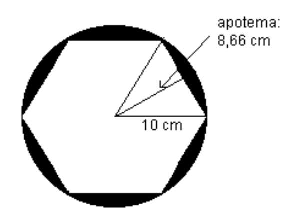
2) Calcula el área sombreada:



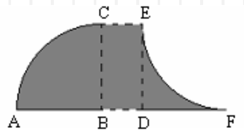
3) Una placa metálica cuadrada de 8 cm de lado es pintada por dentro (parte sombreada de la figura siguiente). Para proteger las otras zonas se la bordeará con cinta de enmascarar. ¿Cuántos cm de cinta se usarán y cuál es el área de la zona pintada?



4) Calcular el área de la zona pintada. El hexágono es regular y está inscripto en una circunferencia cuyo radio mide 10 cm.



5) El perímetro del rectángulo $BCED$ es 12 m y el lado mayor mide el doble del menor. Calcula el perímetro y el área de la región sombreada, si $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DF}$



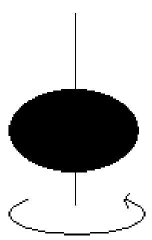
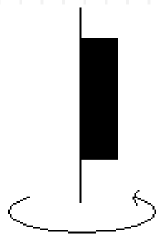
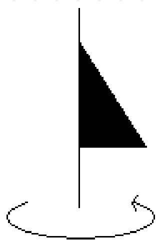
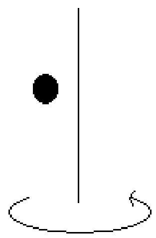
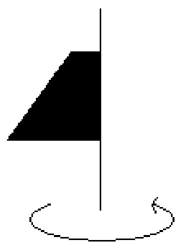
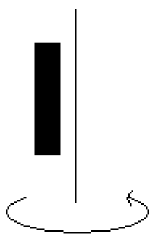
6) Dado un rectángulo $ABCD$ cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden a unidades y b unidades respectivamente.
Teniendo como datos las dimensiones del rectángulo, realiza la deducción de la fórmula del área del rombo $MNFK$ sabiendo además que M es el punto medio del $\overline{AB}$, N es el punto medio de $\overline{BC}$, F es el punto medio de $\overline{CD}$ y K es el punto medio de $\overline{AD}$.

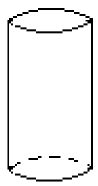
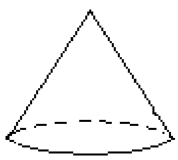
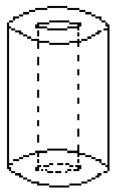
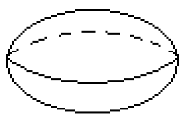
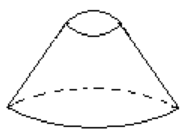
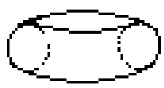
➢ *CUERPOS GEOMÉTRICOS*

En el espacio en que nos movemos estamos rodeados y en contacto continuo con cuerpos. Lo que caracteriza a un cuerpo es que ocupa un lugar en el espacio tridimensional. Algunos de ellos tienen nombre, otros no. Seguro conoces cuerpos geométricos como las pirámides, los conos, cilindros y prismas.

Las esferas, los cilindros rectos y los conos rectos son **sólidos de revolución**; se obtienen al hacer girar una figura plana alrededor de un eje.

Hay muchas otras formas conocidas que son sólidos de revolución. Indica cuál de los cuerpos de la tercera fila se obtienen al hacer girar las figuras de la primera y segunda fila

a) 	b) 	c) 	d) 
e) 	f) 		

1) 	2) 	3) 	4) 	5) 	6) 

Los **poliedros** (del griego *poli,* muchos y *edro,* caras) son cuerpos formados por regiones poligonales, que llamamos caras; los lados y vértices de estas regiones poligonales son las aristas y vértices del poliedro, respectivamente. Pueden ser convexos o no convexos.

La Fórmula de Euler

Indica que si C representa el número de caras de un poliedro convexo, A representa el número de aristas y V representa el número de vértices del poliedro entonces se cumple que $C + V - A = 2$

Se dice que un cuerpo es ***convexo*** cuando todo par de puntos del mismo determina un segmento incluido en él. Cuando un cuerpo no es convexo se dice que es ***cóncavo.***

Prismas: Son poliedros que tienen, por lo menos, un par de caras iguales y paralelas, llamadas bases. Las otras caras, llamadas laterales, son paralelogramos.

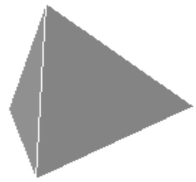
Prismas rectos: Son aquellos prismas cuyas caras laterales son rectángulos. Cuando las caras laterales son otro tipo de paralelogramo, se les llama prismas oblicuos.

Paralelepípedos: Son aquellos prismas cuyas caras son paralelogramos.

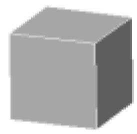
Pirámides: Son poliedros que tienen una sola base y sus caras laterales son triángulos que tienen un vértice en común, llamado cúspide. La base es la única cara que no contiene a la cúspide.

Un poliedro cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada uno de sus vértices concurre el mismo número de caras, se llama **poliedro regular**.

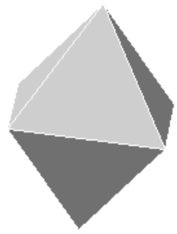
Existen cinco poliedros regulares:



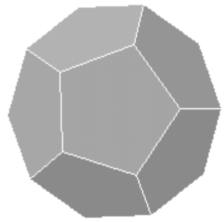
Tetraedro: 4 caras triangulares regulares que concurren 3 en cada vértice, tiene 4 vértices y 6 aristas.



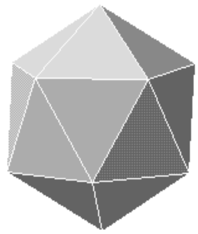
Cubo: 6 caras cuadradas que concurren tres en cada vértice, tiene 8 vértices y 12 aristas



Octaedro: 8 caras triangulares regulares que concurren cuatro en cada vértice, tiene 6 vértices y 12 aristas.

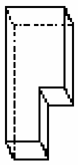
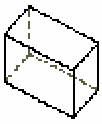
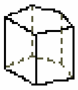
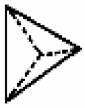


Dodecaedro: 12 caras pentagonales regulares que concurren 3 en cada vértice, tiene 20 vértices y 30 aristas.

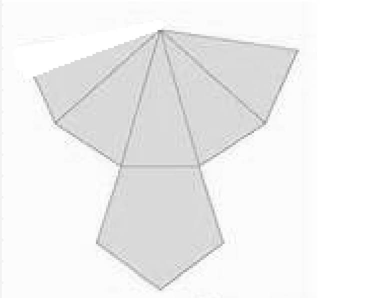


Icosaedro: Veinte caras triangulares regulares que concurren 5 en cada vértice, tiene 12 vértices y 30 aristas.

Completa la siguiente tabla

	Cóncavo o convexo	Nombre	Cantidad de caras	Figuras que corresponden a las caras	Cantidad de vértices	Cantidad de aristas
						
						
						
						
						

1) Realiza todos los posibles desarrollos planos de un cubo.
2) Responde: ¿puede ser el siguiente, el desarrollo plano de un cuerpo?

a)	b)
	

3) Construye un octaedro de 5 cm de arista.
4) En un prisma recto rectangular, la altura es la cuarta parte del largo, el largo es de 20cm y el ancho es el 75% del largo:
   a) expresa el volumen del prisma en dm^3.
   b) dibuja a escala, el desarrollo plano del prisma colocando las medidas correspondientes.
   c) calcula el área total del prisma.
5) Dada la siguiente figura, calcula utilizando los datos indicados en ella:
   a) el área de la parte sombreada.
   b) el volumen del cuerpo que se obtiene cuando la figura sombreada gira 360º alrededor del eje.

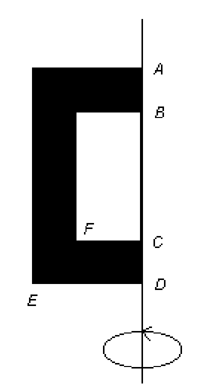
<u>Datos:</u>

$$\overline{AD} = 10\ cm$$

$$\overline{ED} = \frac{1}{2}\ de\ \overline{AD}$$

$$\overline{FC} = 3\ cm$$

$$\overline{BC} = \frac{3}{5}\ de\ \overline{AD}$$



6) Dada la siguiente figura, calcula utilizando los datos indicados en ella:

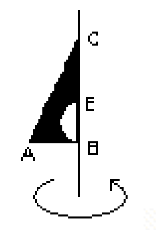
Datos:

ABC triángulo rectángulo en B

$\overline{EB} = 4cm$; es el diámetro del semicírculo.

$\overline{BC} = 9cm$

$\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{BC}$



a) el área de la figura sombreada.

b) el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar la figura sombreada sobre el eje de rotación.

6) El agua al congelarse aumenta su volumen 1/10 del mismo. Responde: ¿qué volumen ocuparán 500 litros de agua después de helarse?

7) Nicolás y Sebastián quieren saber cuántos litros de agua son necesarios para llenar el piletín de Sebastián. Lo primero que hicieron fue buscar una cinta métrica para medir sus dimensiones (largo, ancho y alto). Luego establecieron hasta donde la llenarían. Nicolás que es muy detallista consideró los centímetros en la medición y registró: 3,01m de largo, 2,01 m de ancho y 80 cm de alto.

Sebastián que es más práctico midió: 3m de largo, 2 m de ancho y 80 cm de alto. Una vez que terminaron de medir, calcularon la cantidad de litros que necesitarían para llenar la pileta.

Completa: Nicolás calculó ………litros

Sebastián calculó ………litros.

Como observarán un margen de error de 1 cm puede ser muy importante, piensen que la Organización de las Naciones Unidas señala que cada persona necesita un mínimo de 50 litros diarios para beber, bañarse, cocinar y otros menesteres.

Imaginemos algo más… si estuviéramos en una tarde calurosa de verano, de las que hay de sobra en Santa Fe y los 40 litros del problema, se transformaran en un fresco jugo, puesto en botellas de 250 ml tendríamos para beber… 160 BOTELLAS!!, demasiado no?

En el problema, observa como los centímetros que consideró Nicolás en las mediciones influyeron en el resultado.

Capítulo 2
Número enteros

MENOS QUE CERO

Si restamos cinco de siete, quedan dos, si restamos siete de siete queda cero. Pero, ¿qué queda si restamos ocho de siete?

En un principio se pensó que tal operación no era posible, pues su resultado sería menos que nada.

El concepto de “número” se desarrolló muy lentamente a lo largo de la historia y de las diferentes civilizaciones, estaba íntimamente ligado a las necesidades de la vida diaria. Cada una de estas civilizaciones formalizó la acción de contar creando sistemas de numeración distintos que se fueron desarrollando, perpetuándose algunos y perdiéndose otros.

Las primeras manifestaciones del uso de los números negativos, antiguamente conocidos como “números deudos” o “números absurdos”, se remontan al siglo V en oriente (China). Estos números se representaban, no como se hace en la actualidad (+ y -), sino con bolas de diferentes colores y también con varillas rojas (negativos) y negras (positivo).

Recién en el siglo XVI se formaliza la utilización en la matemática de los números positivos y negativos debido a que esta idea planteaba más dificultades a la mente humana que los números trabajados hasta ese momento, los racionales positivos.

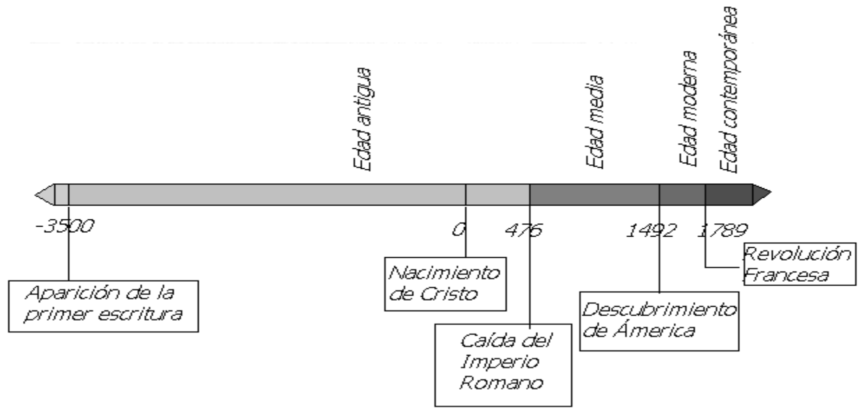
Debemos tener siempre en cuenta que los conceptos matemáticos no se constituyen fácilmente, sino que son el resultado de un largo proceso.

En la actualidad ya es usual escuchar situaciones como la siguiente: si disponemos de $7 para pagar una deuda de $8, al entregar todo nuestro dinero nos quedaremos aún con una deuda de $1. Es decir, si restamos ocho de siete, resulta uno menos que cero.

Muchas veces encontramos los números negativos en tablas o en gráficos de los diarios (variación en el nivel o altura de los ríos, la diferencia de goles en las tabla de posiciones de los equipos que participan en competencias deportivas), en los libros de estudio (líneas históricas, mapas con referencias a los relieves en relación al nivel del mar), en ticket de compras (descuentos por promociones), entre otros.

➢ ***ALGUNOS EJEMPLOS***

1) Un ejemplo donde se utilizan números enteros positivos y negativos, es la representación de distintos acontecimientos en una línea de tiempo.



2) Alturas Hidrométricas de la Cuenca del Salado-Lunes 19 de Noviembre de 2012

Estación	**Río**	**Altura**	**Variación**	**Cambio**	**Altura Ant.**	**Alerta**	**Evacuación**
Tostado (R.N. 95)	Río Salado	337	3	↑	334	400	---
Calchaquí (R.P. 38)	Río Calchaquí	---	---	✕	---	350	---
San Justo (R.P. 2)	Río Salado	431	6	↑	425	900	950
Emilia (R.P. 62)	Río Salado	---	---	✕	---	450	---
Recreo (R.P. 70)	Río Salado	96	-3	↓	99	470	570
Santo Tomé (INALI)	Río Salado	288	-4	↓	292	470	570
Cululú (R.P. 50-s)	Arroyo Cululú	28	-1	↓	29	400	---

Leyenda: ↓ Baja - ↑ Crece - − Estacionario - ✕ Sin Datos

Observación: Los datos fueron modificados, pasando los valores originales en metros a centímetros. Fuente: http://fich.unl.edu.ar/cim/alturas-salado/

3) A continuación se muestra un fragmento de la tabla histórica correspondiente a la Primera División de fútbol de Argentina. Para su confección usamos como base la Guía Olé Torneo Clausura 2012. Tomamos los primeros 51 clubes que alguna vez participaron en los torneos e instancias de la Primera División en los 80 años de profesionalismo, desde 1931 con sus reclasificatorios (1967/1972), desempates, Liguillas y Promociones hasta la fecha n° 19 del último Torneo Apertura.

POS	CLUB	PTS	PJ	G	E	P	GF	GC	DIF
18	Colón	1510	1328	447	401	480	1737	1858	-121
19	Atlanta	1357	1575	476	405	694	2247	2832	-585
20	Unión de Santa Fe	1190	1167	363	384	420	1411	1480	-69
21	Talleres (Cba.)	1080	999	334	313	352	1339	1382	-43
22	Quilmes	913	1016	295	274	447	1212	1641	-429
23	Tigre	775	1043	255	199	589	1338	2005	-667

Fuente:http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Estad%C3%ADsticas_de_la_primera_divisi%C3%B3n_del_f%C3%BAtbol_argentino 14 de noviembre 2012

1) Busca una situación en la realidad donde se usen los números negativos e indica cual es el “cero” de referencia. Describe la situación.
2) El siguiente mapa muestra las temperaturas máximas y mínimas pronosticadas para un día determinado.
   a) Completa la segunda y tercera columna de la tabla:

Ciudad	Máx.	Mín.	Amplitud térmica
La Rioja			
San Luis			
Rawson			
Córdoba			
Santa Fe			
San Juan			

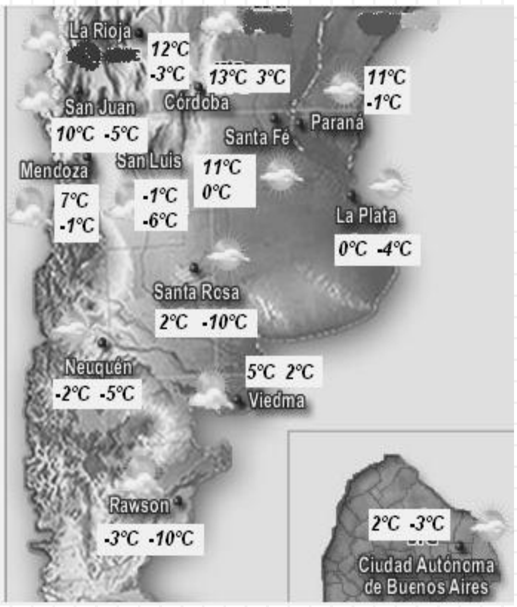


Imagen extraída y modificada de: http://www.smn.gov.ar/

En base a lo registrado en la tabla:

i) Responde: ¿en qué ciudad se registró la menor temperatura?

ii) Indica: ¿en qué ciudad se registró la mayor temperatura?

iii) Nombra dos ciudades cuyas temperaturas fueron, en algún momento del día, 0°C

iv) Nombra una ciudad en donde la temperatura del día siempre fue sobre cero y otra en donde fue siempre bajo cero.

b) Se llama amplitud térmica a la diferencia que hay entre la temperatura máxima y mínima o a la distancia que hay entre ellas.

i) Completa la cuarta columna de la tabla.

ii) Responde: ¿en qué ciudad la amplitud térmica fue menor?

- ***NÚMEROS ENTEROS***

Con los números naturales podemos contar, pero como se ve en los ejemplos anteriores, éstos no alcanzan para describir, registrar y/o comunicar lo que sucede en muchas situaciones.

Los objetos matemáticos, en este caso “los números”, una vez inventados y fijadas unas primeras relaciones entre ellos, adquieren vida propia y plantean nuevos problemas internos a la matemática, distintos de los problemas que motivaron su introducción. Como respuesta se inventan nuevos objetos matemáticos que son conectados de manera consistente con todo el sistema ya construido. Así sucede con los números con signo (positivo y negativo).

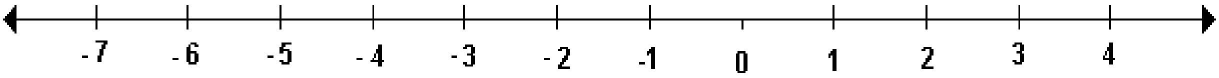
Esta construcción no se debe tanto a la necesidad de modelizar matemáticamente situaciones reales sino como de dar respuesta a la problemática que plantea el desarrollo de una rama de la matemática: *el álgebra*.

Consideremos entonces, el conjunto de números denominado “conjunto de números enteros”, simbolizado con la letra Z.

Enteros positivos (Z^+)	21 ,1, 105, 2169, …	Números Enteros (Z)
Cero	0	
Enteros negativos (Z^-)	-102, -21, -2, -113, …	

➢ ***RECTA NUMÉRICA***

Para representar los números enteros dibujamos una recta. En un punto de ella indicamos el 0 a partir de allí marcamos, a igual distancia uno de otro, los números enteros positivos hacia la derecha (1, 2, 3, ...) y hacia la izquierda los enteros negativos (-1, -2, -3, ...).



Por lo tanto, podemos escribir:
El conjunto de números enteros: Z = { …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …}
El conjunto de números enteros positivos: Z^+ = {1, 2, 3,…}
El conjunto de números enteros negativos: Z^- = {…-3, -2, -1}

➢ ***ORDEN EN Z***

En distintas ciudades del mundo se registraron las siguientes temperaturas –10°, 5°, 7°, -1°, -5°, 0°, 15°. Ordénalas de menor a mayor:
....…………
Responde: ¿cuál fue la mayor y la menor temperatura registrada?..

> Un número es mayor que otro si el punto que lo representa en la recta numérica horizontal está a la derecha de aquel.

Por ejemplo, decimos que: 4 < 8 -3 < 7 -4 > -10 0 > -9

a < **b** Se lee: **a** es menor que **b** o **b** es mayor que **a**
a < b ≤ c Se lee: **b** es mayor que **a** y menor o igual que **c**

Todo número negativo es menor que cualquier número positivo.
El cero es menor que todo entero positivo y mayor que todo entero negativo.

➢ **OPUESTO DE UN NÚMERO ENTERO**

¿Cuáles son los números enteros que están a 3 unidades de distancia del cero, en la recta numérica?

....

A estos números los llamamos números enteros opuestos.

Dos números enteros distintos son opuestos si están a la misma distancia del 0, en la recta numérica. El 0 es opuesto de sí mismo.

Si a es un número entero cualquiera, representamos a su opuesto como $-a$.

Completa:

Si $a = 3 \Rightarrow -a = -3$ Si $a = -2 \Rightarrow -a = \ldots$

Si $a = -102 \Rightarrow -a = \ldots$ Si $a = 0 \Rightarrow -a = \ldots.$

Si $a = \ldots \Rightarrow -a = -45$ Si $a = \ldots. \Rightarrow -a = 50$

Si $a = -4 \Rightarrow -a =$..... y $-(-a) =$ ......

podemos concluir que $-(-a) =$ .....

No podemos afirmar que **–a** es un número negativo, esto dependerá del valor de **a**.

*Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ * Si $a > 0 \Rightarrow -a < 0$

➢ *MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO*

El módulo o valor absoluto de un número entero es la **distancia** de dicho número al cero.

En símbolos: Si $a \in Z$, $|a|$ indica la distancia de a al 0.

|-3| = 3 pues la distancia de –3 al 0 es 3 unidades.

|4| = … pues la distancia de 4 al 0 es … unidades.

|0| = … pues la distancia de 0 al 0 es … unidades.

¿Cómo son los módulos de dos números opuestos? ¿Por qué?

....

En símbolos: ....

Como el módulo o valor absoluto es una distancia, éste siempre es mayor o igual a cero.

➢ *ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS*

Operación: Adición
a + b = C
a y *b*: sumandos
c: suma

A la adición de números enteros se la puede interpretar de diferentes formas.

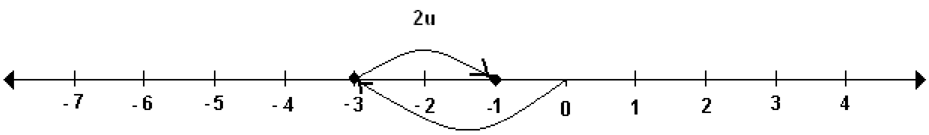
Como los saldos de una cuenta bancaria.

Por ejemplo: se tienen \$400 y se gastan \$50 entonces quedan \$350 en la cuenta.

Adición	Saldo Inicial	Movimiento	Saldo Final
400 + (-50) = 350	\$400	\$-50	\$350
30 + 500 =	\$	\$	\$
-48 + (-50) =	\$	\$	\$
-80 + 20 =	\$	\$	\$
50 +(-50) =	\$	\$	\$
-4 + 0 =	\$	\$	\$

Con los movimientos en la recta numérica.

-3 + 2 = -1



1) Traza en cada caso una recta numérica con los movimientos que correspondan:
   100 + (-3) =...

   - 5 + (-3) =...

2) Calcula:
   -380 + 500 =…………... 650 + (- 80)=....................

   -208 + (-312) =………… 715 + 325 =......................

- ***PROPIEDADES DE LA ADICIÓN***

Sumemos varios números enteros:

4 + (-25) + 16 + 23 + (-75) + (-16) + 16 =..........................

Analiza los distintos procedimientos con tus compañeros.

¿Cómo podemos justificar los procedimientos utilizados?

En lenguaje coloquial	En lenguaje simbólico
LEY DE CIERRE La adición de números enteros es otro número entero	$a \in Z \wedge b \in Z \Longrightarrow (a+b) \in Z$ Ej. -2+3 = 1
PROPIEDAD ASOCIATIVA La suma es la misma si se agrupan los sumandos de distintas maneras.	$a \in Z \wedge b \in Z \wedge c \in Z \Rightarrow$ $(a+b)+c = a+(b+c)$ Ej. (-2+3) +5 = -2+ (3+5)
PROPIEDAD CONMUTATIVA La suma de dos o más números enteros no se altera si cambiamos el orden de los sumandos.	$a \in Z \wedge b \in Z \Rightarrow a+b=b+a$ Ej. -2+3 = 3+(-2)
ELEMENTO NEUTRO Si a un número entero le sumamos a derecha o a izquierda el número cero, obtenemos el mismo número. Por lo tanto, el número “0” es el elemento neutro en la adición.	$0 \in Z \wedge b \in Z \Rightarrow 0+b=b+0=b$ Ej. 0+(-2) = -2+0=-2
ELEMENTO OPUESTO Para todo número entero, existe otro número entero, llamado opuesto o inverso aditivo, tal que la suma entre ellos es el elemento neutro de la adición.	$\forall a \in Z, \exists (-a) \in Z$ / $a+(-a) = (-a)+a = 0$ Ej. -2+2=2+(-2) = 0

1) Resuelve:

   a) -7 + 2 + 9 + (-7) + 7 + (-9) + 10 =

   b) 7 + 15 + (-10) + (-13) + 12 + (-10) + 25 + (-32) =

2) Responde: ¿todas las propiedades antes enunciadas se cumplen en el conjunto de los números naturales? Justifica tu respuesta.

➢ *SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS*

Retomando la información del cuadro de temperaturas máximas y mínimas dado en la actividad 2 del inicio de este capítulo, podemos registrar el cálculo de las amplitudes térmicas como una sustracción de números enteros.

Por ejemplo: La amplitud térmica en Córdoba fue 13°-3°=10°

La amplitud térmica en La Rioja fue 12° - (-3°) = 15°

Sean a y b números enteros, entonces:
$a - b = c$ si y sólo si $c + b = a$

Operación: Sustracción
$a - b = c$

a: minuendo
b: sustraendo
c: diferencia

Observemos:

13 – 3 = 10 pues 10 + 3 = 13, pero también 13 + (- 3) = 10

12 – (-3) = 15 pues 15 +(-3) = 12, pero también 12 + 3 = 15

Para restar dos números enteros, sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo.
Si a y b son números enteros, $a - b = a + (-b)$

1) Indica en cuáles de los siguientes casos conviene escribir las restas como sumas con el opuesto y resuelve:

   a) 12 – 5 = b) –13 – (-6) =

   c) 8 – (-4) = d) –7 – 9 =

   Nota: podemos anticipar si el resultado de la resta será positivo, negativo o cero observando si el minuendo es mayor, menor o igual que el sustraendo. Esto puede servirnos para controlar nuestro cálculo.

2) Sin calcular, completa con <, > o = según corresponda. Justifica tu respuesta.

   16-20 …….. 0

   -10 - (-10)…… 0

   -8 - (-12)……. 0

   -16 – (-20)…… 0

3) Verifica con números enteros la siguiente afirmación: “La distancia entre dos puntos en la recta numérica, es el módulo de la diferencia entre los números que le corresponden en la recta numérica”.

➢ ***PROPIEDADES DE LA SUSTRACCIÓN***

En lenguaje coloquial	En lenguaje simbólico
LEY DE CIERRE La sustracción de números enteros es otro número entero	$a \in Z \wedge b \in Z \Rightarrow (a - b) \in Z$

Demuestra que la sustracción en Z no verifica la propiedad asociativa ni la propiedad conmutativa.

➢ *OPERACIONES COMBINADAS*

Calcula:

a) -36 + 27 – (-16) +(-18) – 10 + (-2) =

b) 16 – 12 –7 + 3 –20 =

c) 3 – (7+ 2) + (-9 +1) – (-3 - 4) - (-2) =

d) 1 – [20 – (-5 + 4)] =

➢ *MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS*

Al multiplicar números enteros se verifican las mismas propiedades que al multiplicar números naturales.

Pensemos a la multiplicación como la forma simplificada de la adición de números iguales.

Operación: Multiplicación

$$a \, . \, b \;=\; c$$

a y b : factores

c**:** producto

2 **.**3 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2 = 6

“Al multiplicar un número positivo por otro positivo nos da por resultado un número positivo ya que, en definitiva, lo que estamos haciendo es sumar números positivos”

2. (-3) = (-3) + (-3) = -6

“Al multiplicar un número positivo por otro negativo el resultado es negativo, pues en definitiva, estamos sumando tantas veces, un mismo número negativo”.

(-3). 2 = 2.(-3)

“Al multiplicar un número negativo por otro positivo el resultado será un número negativo, ya que se cumple la propiedad conmutativa en la multiplicación de números enteros y razonamos como en el ejemplo anterior”

(-3).(-2) = ?

En este caso consideremos que (-3) .0 = 0, como cero es el elemento neutro de la suma, puede expresarse como suma de dos opuestos, por ejemplo (-2) y 2.

Entonces el cálculo anterior puede resolverse así:

(-3) . 0	=	(-3). [2 + (-2)]	=	aplicando la propiedad distributiva
	=	(-3) . 2 + (-3). (-2)	=	
	=	-6 + ...	=	0

Observa que la única posibilidad es que el resultado del segundo término sea 6

Por lo tanto (-3) .(-2) = 6

Regla de los signos:	+ . +	=	+
	- . -	=	+
	- . +	=	-
	+ . -	=	-

- ***PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN***

En lenguaje coloquial	En lenguaje simbólico
LEY DE CIERRE La multiplicación de números enteros es otro número entero	$a,b \in Z \Rightarrow (a.b) \in Z$ Ej: (-2) . 5= -10
PROPIEDAD ASOCIATIVA El producto es el mismo si se agrupan los factores de distintas maneras.	$a,b,c \in Z \Rightarrow (a.b).c = a.(b.c)$ Ej: (-4.5). 2= (-4). (5.2)
PROPIEDAD CONMUTATIVA El producto de dos o más números enteros no se altera si cambiamos el orden de los factores.	$a,b \in Z \Rightarrow a.b = b.a$ Ej: (-6). 4 = 4 .(-6)
ELEMENTO NEUTRO Si a un número entero lo multiplicamos a derecha y a izquierda por el número uno, obtenemos el mismo número. Por lo tanto, el número “1” es el elemento neutro en la multiplicación.	$a \in Z \Rightarrow 1.a = a.1 = a$ Ej: 1. (-3) = (-3).1= -3
ELEMENTO ABSORBENTE La multiplicación de un número entero a derecha y a izquierda por cero, da como resultado cero.	$a \in Z \Rightarrow a.0 = 0.a = 0$ Ej: (-5).0=0.(-5)=0

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO A LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN. Dada una suma algebraica multiplicada por un factor, éste multiplica a cada uno de los términos.  La propiedad distributiva nos permite también hacer la lectura en el sentido contrario, es decir: $a.d + b.d - c.d \;=\; (a + b - c).d$ En este sentido decimos que **extraemos el factor común *d*.**	$a, b, c, d \in Z \Rightarrow$ $(a + b - c).\, d = a.\, d + b.\, d - c.\, d = d.\, (a + b - c)$ Ej: (-2+3-1). 4= -2.4+3.4-1.4=4.(-2+3-1) Ej: 7.**4** -2.**4** +5.**4**= (7-2+5). **4**

- ***OPERACIONES COMBINADAS***

Calcula:

a) (-2) . (-3) – (-2) . (-5- 1) =

b) (-6) .0. 4 + (-2. 10 – 4 . 2) =

c) -10 . 2. [3. (-1) + (-10)] =

- ***DIVISIÓN EN NÚMEROS ENTEROS***

Recordemos que 10 : 5 = 2 ya que 2. 5 = 10

Operación: División
$a : b \;=\; c$

a: dividendo
b: divisor distinto de cero
c: cociente

Si a y b son números enteros con $b \neq 0$,
$a : b \;=\; c$ si y solo si $c.\, b = a$

Cuando escribamos una división podemos hacerlo así:

$$a : b \text{ ó } \frac{a}{b} \text{ ó } a/b$$

Completa:

- 25 : 5	=	.....	ya que 5	=	-25
-26 : (-2)	=	.....	ya que –2	=	-26
0: (-10)	=	...	ya que -10....	=	0
-10 : 0	=	....			
0 : 0	=	....			

¿Se verifica la ley de cierre para la división de números enteros?

……………………………………………………………………………………………………

CUIDADO

* 0 dividido cualquier número distinto de 0, es **0**.
* 0 : 0 es **indeterminado.**
* La división de cualquier número (distinto de cero) dividido 0, **no tiene solución**.

1) Investiga qué propiedades se verifican para la división de números enteros.
2) Calcula en Z. En los casos que no sea posible la división, explica por qué:

a) -12: 6 =	b) 5: (-25) =	c) -144: (-3) =	d) (-2+4):(-2)=
e) 5: (1-1) =	f) (1-1) : (-1-1) =	g) 6: (2+3) =	h) 0: 0 =

- ***OPERACIONES COMBINADAS***

Calcula:

a) (-2 + 8) . (-3) – (-4) : (-1- 1) =

b) (-16): 2. 4 – (10 – 4 : 2) : (-2) =

c) 10 - 2. [36: (-9) + (-10)] =

➢ *POTENCIACIÓN CON EXPONENTE ENTERO NO NEGATIVO*

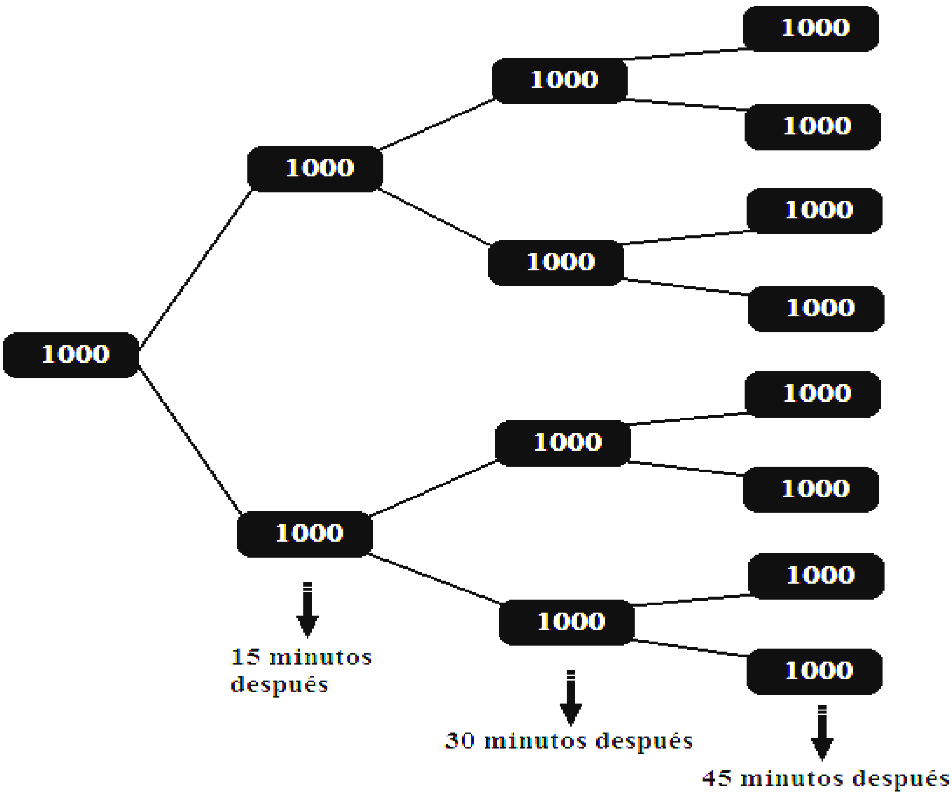
El crecimiento de poblaciones de algunos tipos de bacterias es muy rápido. Por ejemplo, la bacteria *Escherichiacoli* puede duplicar su población cada 15 minutos.

Supongamos que se hace un cultivo en el que inicialmente hay 1000 bacterias, y se necesita encontrar la cantidad de bacterias que habrá a las 2 horas. Completa la tabla:

Tiempo (minutos)	Cantidad de bacterias
0	1000
15	1000 . 2
30	1000 .2 . 2
45	1000 .2 .2 . 2 = 1000 . 2^3

Responde: ¿qué cantidad de bacterias hay después de 2 hs?……………………………….

Podemos pensar en un diagrama de árbol para representar la situación



La potenciación con exponente entero no negativo, es una forma abreviada de expresar un producto de factores iguales.

$$a^n = \underbrace{a.a.a....a.a}_{n \text{ veces}} \quad (\text{si } n > 1)$$

Operación: Potenciación

$a^n = b$

n: exponente

a**:** base

b**:** potencia

Potencias especiales

Exponente 1: $b^1 = b$	Exponente 0: $b^0 = 1 \ (b \neq 0)$	Base 0: $0^n = 0 \ (con\ n \neq 0)$	0^0 no se define

1) Calcula:

a)7^2 =7.7

b)9^2 =

c)$(-9)^2$ =

d)10^3 =

e)$(-10)^3$ =

f)$(-2)^6$ =

g)$(-1)^7$ =

h)0^{30} =

i)$(-5)^3$ =

j)$(-12)^2$ =

2) Extrae conclusiones sobre el signo que tiene la potencia dependiendo si el exponente es par o impar. Justifica.

$(-2)^4$ = 16 $\qquad -2^4$ = -16

➢ *PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN*

En lenguaje coloquial	En lenguaje simbólico
PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE El producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base que las potencias dadas y cuyo exponente es la suma de los exponentes dados.	$a \in Z \wedge m,t \in Z_0^+ \Rightarrow a^m.a^t = a^{m+t}$ Ej : $(-3)^5.(-3)^8 = (-3)^{13}$
COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE El cociente de potencias de igual base es otra potencia de la misma base que las potencias dadas y cuyo exponente es la resta de los exponentes dados.	$a \in Z, a \neq 0 \wedge m,t \in Z_0^+, m \geq t \Rightarrow a^m : a^t = a^{m-t}$ Ej: $5^8 : 5^6 = 5^2$
POTENCIA DE POTENCIA La potencia de otra potencia es otra potencia de la misma base cuyo exponente es el producto de los exponentes dados.	$a \in Z \wedge m,t \in Z_0^+ \Rightarrow (a^m)^t = a^{m.t}$ Ej: $((-4)^5)^3 = (-4)^{15}$
PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA POTENCIACIÓN CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN La potencia enésima de una multiplicación es igual al producto de las potencias enésimas de cada factor.	$a,b \in Z \wedge n \in Z_0^+ \Rightarrow (a.b)^n = a^n.b^n$ Ej: $(2.5)^{10} = 2^{10}.5^{10}$
PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA POTENCIACIÓN CON RESPECTO A LA DIVISIÓN La potencia enésima de una división es igual a la división entre la potencia enésima del dividendo y la potencia enésima del divisor.	$a,b \in Z, b \neq 0 \wedge n \in Z_0^+ \Rightarrow (a:b)^n = a^n : b^n$ $(a:b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n}$ Ej: $\left(\frac{10}{2}\right)^5 = \frac{10^5}{2^5}$
EL CERO COMO EXPONENTE Todo número entero, distinto de cero, elevado a la cero es 1.	$a \in Z, a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1$ Ej:$(-70)^0 = 1$
EL CERO COMO BASE El cero elevado a cualquier número entero positivo, es cero.	$n \in Z^+ \Rightarrow 0^n = 0$

Responde:

1) ¿Se cumple la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la adición y a la resta de números enteros?

2) ¿Son iguales las expresiones $\left(2^2\right)^3$ y $2^{\left(2^3\right)}$? ¿Por qué?

- ***RADICACIÓN EN EL CONJUNTO DE NÚMEROS ENTEROS.***

¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado de 16cm^2 de área?

....

¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo de 27cm^3 de volumen?

....

Al contestar ambas preguntas lo que estamos haciendo es resolver las siguientes operaciones:

$\sqrt{16\text{cm}^2} = 4\text{cm}$ ya que $(4\text{cm})^2$ = 16cm^2

$\sqrt[3]{27\text{cm}^3} = 3\text{cm}$ ya que $(3\text{cm})^3$ = 27cm^3

Otros ejemplos:

* $\sqrt[3]{-125}$ = -5 ya que $(-5)^3$ = -125
* $\sqrt[3]{8}$ = ….. ya que $(....)^3$ = …….
* $\sqrt[3]{9}$ = ... ya que …………………….………………………………………………...
* $\sqrt{-25}$ = ….. ya que ………………………………..…………………………………..
* $\sqrt{4}$ = ... ya que $(....)^2$ = ………..pero también podríamos afirmar que $(....)^2$ = 4

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Por lo tanto, permite hallar la base desconocida de una potencia con determinado exponente, aunque no siempre es un número entero.

Para conservar la unicidad de resultados en la radicación de enteros convenimos:

Para **n** natural e impar y mayor a uno: la raíz enésima de un entero **a** es el número entero **b** que elevado a la enésima potencia da como resultado el número **a**.

Para **n** natural y par: la raíz enésima de un entero **a** es el número entero <u>no negativo</u> **b** que elevado a la enésima potencia da como resultado el número **a**.

Operación: Radicación

$\sqrt[n]{a} = b$

n: índice

a: radicando

b: raíz

		Radicando	
		Positivo	Negativo
Índice	Par	Si existe, la raíz es positiva.	No tiene solución en Z
	Impar	Si existe, la raíz es positiva.	Si existe, la raíz es negativa.

- ***PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN***

En lenguaje coloquial	En lenguaje simbólico
SIMPLIFICACIÓN DE ÍNDICES	Si n es impar $\sqrt[n]{a^n} = a$ Ej: $\sqrt[5]{2^5} = 2$
	Si n es par $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ Ej: $\sqrt[10]{(-2)^{10}} = \lvert -2 \rvert = 2$
DISTRIBUTIVA DE LA RADICACIÓN CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN La raíz enésima de una división es igual a la multiplicación (división) de las raíces enésimas del dividendo y el divisor.	$a,b \in Z \wedge b \neq 0 \wedge n \in Z_0^+ \Rightarrow$ $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ Ej: $\sqrt[3]{-8.27} = \sqrt[3]{-8}.\sqrt[3]{27}$ $\sqrt{81:9} = \sqrt{81}:\sqrt{9}$

Estas dos últimas propiedades, en Z, pueden usarse sólo cuando los números tienen raíces enteras.

CUIDADO

La radicación no es distributiva con respecto a la adición ni a la sustracción. Por ejemplo:

$$\sqrt{100-64} \neq \sqrt{100}-\sqrt{64}$$

$$\sqrt{36} \neq 10-8$$

$$6 \neq 2$$

Resuelve cuando sea posible. Explica el procedimiento que te lleva al resultado.

a)$\sqrt{16}$	e)$\sqrt[4]{-10000}$	j)$\sqrt[3]{-125}$
b)$\sqrt[3]{-27}$	f)$\sqrt[6]{4}$	k)$\sqrt{144}$
c)$\sqrt[5]{32}$	g)$\sqrt{36}$	l)$\sqrt[10]{-1}$
d)$\sqrt{-49}$	h)$\sqrt{100}$	m)$\sqrt[11]{-1}$
	i)$\sqrt[3]{-1000}$	n)$\sqrt[15]{0}$

- ***OPERACIONES COMBINADAS***

Calcula:

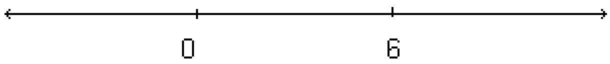
a) $[(-3)^7:(-3)^5+2^3.5^3-1]:(-9)=$ b)$\sqrt[3]{-8}+[(-3)^2+6\,]:5-5^2.4=$

NÚMEROS ENTEROS + ACTIVIDADES

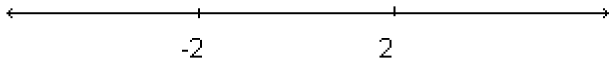
"Cuando me lo dijeron, lo olvidé.
cuando lo vi, pude entenderlo.
cuando lo hice lo aprendí".
Kung-Tsé (Confucio) 551-479 a.c.

1) Ordena de menor a mayor el siguiente conjunto de números enteros:
   32, 28, -5, -8,-10, 0, 10, -11, -20.
2) En cada recta numérica ubica los números que se indican. Utiliza solamente compás y regla no graduada. Detalla el procedimiento que utilizas.

   a) 3; 9



   b) 0; 1; -4; 6



3) Completa el cuadro con los números correspondientes:

Número n	Opuesto de n	Módulo de n	Anterior de n	Siguiente de n
8				
	6			
			-16	
				-1
x				

4) Representa, en cada caso, la recta numérica y los números enteros que cumplen cada condición:

a) $-3 \leq x < 4$
b) los números mayores que –2 y menores que 4.
c) su valor absoluto es menor a 5
d) $|p| = 5$
e) los números mayores que 102 y menores que 105
f) su módulo es 4.
g) su distancia al 0 es 8
h) $|x| < 3$

5) Alexis y Nicolás, para viajar juntos a Córdoba, quedan en encontrarse a 3 km de la estación de peaje que está en el acceso a Frank, en la autovía 19 (une Santa Fe con Córdoba). Cuando están llegando Nicolás se da cuenta que no está claro el lugar de encuentro. Responde: ¿por qué?

6) Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. En todos los casos justifica tu respuesta.
   a) El número –c pertenece al conjunto de los enteros negativos.
   b) Un número es mayor que otro si su distancia al cero es mayor.
   c) El módulo de cualquier número entero siempre es un valor positivo.
   d) Si q es un número entero, -q es negativo.
   e) No hay ningún número entero con módulo -2.
   f) Si dos números tienen igual módulo son iguales.

Responde:

a) cuando Sofía salió de su casa para ir al colegio la temperatura era –2ºC, para el mediodía había subido 15ºC. ¿cuál era la temperatura al mediodía?
b) ¿cuál es el menor número entero mayor que –426?
c) ¿cuál es el mayor número entero menor que –19?
d) si a y b son dos números enteros y a < b, ¿qué ubicación tienen en la recta los puntos que los representan?

7) Indica mediante una adición las siguientes situaciones y responde:
   a) durante un experimento, la temperatura de un compuesto químico subió desde 0ºC hasta 10ºC en la primera hora, subió 23ºC más en la segunda hora y bajó 41ºC en la tercera hora. ¿Qué temperatura tenía en la 3° hora?
   b) un avión salió de la pista y en su primera hora de vuelo subió 3.200m, bajó 50m y luego subió 500m. ¿A qué altura se encuentra?
   c) el ascensor va al piso –3 y sigue bajando 2 pisos más. ¿En qué piso está al final del viaje?

8) Calcula mentalmente el valor de cada letra, para que se verifique la igualdad dada:

a) $5 + h = 0$	d) $r + 2 = -1$
b) $m + 3 = -4$	e) $-4 + z = -4$
c) $q + (-3) = 10$	f) $-2 + (-2) = w$

9) Siendo $m + p = -8$, calcula $5 + m + (-2) + p$. Indica las propiedades que aplicas para resolver.

10) Si m = 5, p = -15, - k = 9 y w = m + k
   a) Ordena m, p, k, w de mayor a menor.
   b) Calcula | p |+ | k | + | w|
   c) Establece cuál, de los anteriores números (m, p, k, w), tiene mayor módulo.

11) Señala con una cruz la opción correcta:

* (-24) + 43 es igual a   a) 19 …   b) –19 …   c) – 67 …

* Si $a \in Z$ y $-a > 0$, entonces   a) $\boldsymbol{a}$ se encuentra a la derecha de $-\boldsymbol{a}$…

b) $\boldsymbol{a}$ se encuentra a la izquierda de $-\boldsymbol{a}$…

* Si $x \in Z$ y $|x| < 3$, entonces: a) $x = \{0,1,2\}$…   b) $x = \{-2,-1,0,1,2\}$ …

* $5 + (-3) + 1 = 5 + 1 + (-3)$ pues se aplica la propiedad:

a) conmutativa en la adición de números enteros …

b) asociativa en la suma de números enteros …

c) ninguna de las anteriores …

12) Indica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, en ambos casos justifica tu respuesta para que se la considere válida.
   a) Si p es un número entero entonces p + 2 es entero.
   b) Si a y b son números enteros entonces $|a + b| = |a| + |b|$
   c) Si p y q son números enteros y p > q entonces $|p| > |q|$
   d) Si sumamos dos números enteros siempre la suma será mayor que cada uno de los sumandos.

13) Completa con números enteros el siguiente cuadrado mágico, si la suma de sus filas, columnas y diagonales es –10

5	-9	…..	2
…..	0	…..	-3
-2	-4	…..	…..
-7	…..	…..	-10

a) Aplica las propiedades de las operaciones para resolver mentalmente.

$-3 + 5 + (-5) + 3 =$ $-99 + (-104) + (-1) + (-16) =$

$16 + (-3) + 4 =$ $-2 + 6 + 4 + (-8) =$

b) Responde: ¿Cuál es el menor valor entero que puede tomar p, tal que p + 5 sea un número positivo?

c) Aristóteles, célebre filósofo griego, nació en el año 384 A.C. Si vivió 62 años, indica en qué año murió.

14) Completa la siguiente tabla, compara los resultados de las columnas y luego extrae conclusiones.

p	q	p-q	q-p
-2	-2		
-12	12		
12	5		
5	-12		
-15	12		

15) Si $a = -5$, $b = -7$ y $c = 2$, calcula el resultado de:

a) $a + (-b) - (-c) =$ c) $-a - (b + c) =$

b) $-a - b - c =$ d) $a - (-b - c) =$

16) Resuelve:

a) $-3 - (-2 + 4) + (-5 + 6 - 6 - 4) - (-3 + 4) =$

b) $-(3 + 7) + 6 + (-1) =$

c) $8 - \{-5 - [2 + 3 + (-6 + 2 - 5)]\} + (1 - 8) =$

d) $-10 + \{5 - [-2 + 3 + (-6 + 2 - 5)]\} - (1 - 10) =$

Al resolver, conviene:

* Sumar números opuestos. Por ejemplo: $(-16) + 7 + 16 = 0 + 7 = 7$

* Llegar a resultados que sean múltiplos de 10.
Por ejemplo: $-17 + 5 + (-3) = -20 + 5 = -15$

* Conmutar y asociar.
Por ejemplo:
$103 + 54 + (-3) = [103 + (-3)] + 54 = 100 + 54 = 154$

a) $-3 + 40 =$

b) $48 - 24 =$

c) $-9 + 9 =$

d) $-9 - 8 =$

e) $-9 - (-8) =$

f) $10 - (-2) =$

17) Encuentra, si es posible, el valor entero de la letra que verifica la igualdad.

a) $w.(-7) = 84$

b) $m.1 = 1$

c) $2.k.12 = k.(-6).(-4)$

d) $b.(-1) = b$

e) $5.(-2).p = 70$

f) $c.0 = -4$

g) $q.3 = -3$

h) $t.(-8) = 0$

18) Elige, si es posible, tres números enteros consecutivos cuyo producto sea:

a) positivo.

b) negativo.

c) impar.

d) cero.

19) Resuelve los siguientes cálculos:

a) -7.1000 + 3 =

b) $-15.(-2) - 30 =$

c) $-25.2.(-1000) =$

d) $100 - (-3).10 =$

e) $-80 + 40.(-2) =$

f) $800 - (-100) + 50.2 =$

g) $-100 + (-1).(-4).0 =$

h) $-[-3 + (-4 + 1)].(-10) =$

i) $(-73).(-21).(-14).0 - (-1) =$

j) $33 - \{-[-(-4)]\}.(-1) =$

Responde:

a) ¿de qué signo es el producto de seis números negativos?

b) ¿de qué signo es el producto de siete números negativos?

c) ¿de qué signo es el producto de una cantidad par de números negativos?

d) ¿de qué signo es el producto de una cantidad impar de números negativos?

20) Determina el valor entero de la letra, si existe, que verifica la igualdad:

a) $-36 : a = 2$ d) $w : (-12) = 3$

b) $5 / (-5) = p$ e) $0 : 30 = b$

c) $15 : 0 = m$ f) $\frac{7}{-q} = -1$

21) Resuelve los siguientes cálculos aplicando la propiedad distributiva cuando sea posible:

a) $(-6 + 8 - 10) : (-2) =$ b) $-30 : (-2 + 5) =$ c) $(-11 + 7 - 6) : (-5) =$

Observa los resultados y decide cuando la división de números enteros es una operación distributiva respecto de la adición y sustracción.

22) Averigua el valor entero de la letra, si es que existe, para que se cumpla la igualdad:

a) $w . 8 - (-9) . w = -17$ c) $(m - 9) : (-3) = 6$

b) $\frac{-8+1}{k} = 14$ d) $\frac{100}{[-1-(2-3)]} = m$

23) Resuelve:

a) $(-2 + 8) . (-3) - (-4) : (-1 - 1) + (-6) - (-7 + 3) : (-2) =$

b) $(-8) : (-2) + (-6) . (-7 + 3 - 9) - (-2) . (-1) =$

c) $(-9 + 6 - 5) . (-1) - (-3) . (-2 + 6 + 10) =$

d) $[36 : (-9) + (-10)] : 7 - [3 + (-2) . 3] =$

e) $-16 : (-2) + 8 . (-5) : 10 - 3 . (4 - 5 . 3) =$

f) $4 : (-2) - (-3) . 5 + (3 + 4 : 2) . (-3) =$

g) $36 : [-4 . (-2 - 1)] + [-5 + 6 : (-2)] =$

h) $1 - 2 . (-3 + 1) + (-1) - (-10 - 1) - (-11) =$

Determina los posibles valores enteros de a y b :

a) $a : b = 1$ b) $a . b = 0$

c) $a : b =$ indeterminado d) $a : b =$ no tiene solución

24) Indica el valor de n (entero) para que se verifique la igualdad:

a) $4^n = 1$ c) $(-1)^n = -1$ e) $0^n = 0$

b) $3^n = 3$ d) $(-1)^n = 1$ f) $(-4)^n = 1$

25) Resuelve:

a)$-(-2)^3 =$ b) $-10^7 =$ c)$(-3)^4 =$ d)$4.\, 2^3 =$

e)$-10.\, 3^3 =$ f)$15^1 . 2^0 =$ g)$(12.\,(-3))^0 =$ h)$(-200)^0 . 20^2 =$

26) Calcula aplicando las propiedades de la potenciación:

a) $(4^5 . 4^4) : 4^6 =$

b) $(-1)^3 . (-1)^7 =$

c) $(203)^4 : (203)^3 =$

d) $4^2 : 2^4 =$

27) Completa según corresponda con > , < o =

a) -500^{500}……..0 b) 124^0…….0 c) $-(-300)^{10}$………0

d) $(-506)^{13}$…….0 e) $(-200)^1$…...0 f) $-(-201)^7$………..0

28) Resuelve aplicando propiedades y justificando cada paso:

a)$(-15)^4 . (-15) : (-15)^5 =$ b)$(2^7 . 2^{11} : 2^{15})^0 =$

29) Resuelve:

a) $(-2)^4 + (3 - 2 : 2) : (-1) =$

b) $(-1)^{23} + 0^{42} + (-2) =$

c) $-[-3 : 3 - (-1)] . (-3)^2 =$

e) $(-4) + (-4) - 4^2 =$

f) $6 - 3.(-2-3) + (-10) + (-1)^0 \;=$

g) $(-1)^{41} + (-2) : (-1-1) + 3^2 \;=$

h) $-\{4 - [-3 - (-1+2^2) + 4] - 3\} + (-1) =$

i) $-18 : 3 + 5.(-7+3) + 2^0.(8 - 4.3) \;=$

RAPIDITOS

a) Resuelve: I) $(-2)^3 =$ II) $-(-2)^3 =$ III) $(2^9)^0 =$ IV) $-2^2 \;=$

b) Calcula mentalmente en cada caso, todos los valores posibles de n para que se cumpla la igualdad:

I) $(n+6)^1 = 10$ II) $(n+1)^3 = 1$ III) $(6+n)^2 = 25$ IV) $(n-10)^2 = 4$

30) Jusifica si el enunciado es verdadero o falso:

a) $\sqrt[10]{(-3)^{10}} = 3$

b) $\sqrt[5]{(-1)^5} = |-1|$

c) $\sqrt{25-16} = \sqrt{16-25}$

31) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 1225? Para averiguarlo podemos pensar a 1225 como $5^2.7^2$, luego aplicando la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación obtenemos:

$\sqrt{1225} = \sqrt{5^2.7^2} = \sqrt{5^2}.\sqrt{7^2} = 5.7 = 35$

De la misma forma $\sqrt[3]{-3375} = \sqrt[3]{-5^3.3^3} = -5.3 = -15$

Ahora calcula:

$\sqrt{2916} =$ $\sqrt[3]{-5832} =$ $\sqrt[5]{7776}$

¿Puedes proponer algunas raíces que tengan solución en los números enteros? ¿Qué condiciones deben cumplir?

32) Justifica si el enunciado es verdadero o falso:.

a) Si $a \in Z, n \in Z_0^+$ n es par, $-a^n \geq 0$

b) Si $a \in Z$, $n \in Z \wedge n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \in Z$

c) Si $a \in Z$, n par y positivo, $a^n < a^{(n+1)}$

d) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27}$

33) Resuelve:

a) $\sqrt[3]{-27}.\sqrt{25} - (-9)^{15}:(-9)^{13} + [(-4)^0]^7 - (-2)^5 =$

b) $1 - 1.\sqrt{16+9}.(-2)^8.(-5+3)^2:(-2)^{10} + 3 - (-5) =$

c) $\sqrt{25-9} + 1 + (-1)^3.2^7:2^7 - (5-8) =$

d) $(-1)^{15} - \sqrt[3]{-27}.2 + (-5)^{11}.(-5)^2:(-5)^{13} =$

e) $(2^3)^5:2^7 - \sqrt[10]{(-5)^{10}}.2 - (-3)^1 =$

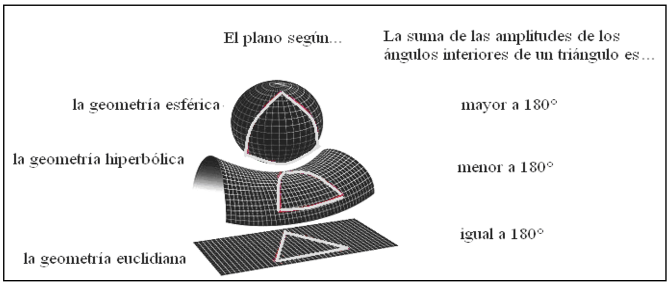
f) $\frac{13^5.2^2}{2.13^4} - (-7^{14} - 2)^0 - (-1)^{100} =$

Responde:

a) ¿cuáles son los cubos perfectos entre -30 y 30?

b) ¿cuáles son los números enteros negativos que tienen raíz cuadrada entera?

c) ¿cuáles de los números entre el –9 y el 40 tienen raíz cuadrada entera?



Capítulo 3 Geometría
Segunda parte

¿Siempre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180°?

En la geometría euclidiana la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es siempre 180º. Esta propiedad no se verifica en general en las geometrías no euclidianas.

Todo surge en el siglo VII a.C. cuando el griego Thales de Mileto introduce la noción de demostración en geometría. En base a ello, Euclides (SIII a.C.) reunió y ordenó con criterio didáctico todos los conocimientos geométricos estudiados hasta entonces en su obra "Elementos" que se consideró durante varios siglos el mejor texto para la enseñanza de la geometría en las escuelas.

En los Elementos se reconocen dos tipos de proposiciones:

- Aquellas que son aceptadas sin demostración, como son los principios o definiciones (por ejemplo: un punto es lo que no tiene partes) y postulados o axiomas (verdades sobre las propiedades geométricas de los objetos físicos, tan claros y evidentes que no violentan el sentido común ordinario, por ejemplo: por dos puntos distintos pasa solo una línea recta).

-Aquellas que son demostradas deductivamente de los principios o axiomas, llamadas teoremas (Ejemplo: los ángulos opuestos por el vértice son iguales).

Es de especial interés (por la controversia que originó en épocas posteriores) el quinto postulado de Euclides, denominado "el de las paralelas" que fue reformulado como: *por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.*

Muchos creyeron ver en él un teorema, e intentaron demostrarlo pero fracasaron por completo.

Los matemáticos del siglo XIX buscaron un postulado que reemplazara al de las paralelas de Euclides, como consecuencia de ello, surgieron dos nuevas geometrías llamadas **geometrías no euclídeas: la elíptica**, también llamada geometría de Riemann (dada una recta y un punto exterior a ella, no existe ninguna recta que pase por el punto y sea paralela a la recta dada) y **la hiperbólica** o de Lobachevsky (existen varias rectas paralelas que pasen por un punto exterior a una dada)

Fue de tal importancia el surgimiento de nuevas geometrías que a partir de la tesis doctoral de Riemann (matemático alemán), en 1854, Albert Einstein pudo sustentar a través de su sistema geométrico, en 1917 la Teoría de la Relatividad.

El surgimiento de geometrías diferentes a la de Euclides, amplió el concepto de geometría. Actualmente las geometrías no euclidianas son aplicables al mundo físico y tan válidas como la geometría de Euclides.

RECORDAMOS PROPIEDADES DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

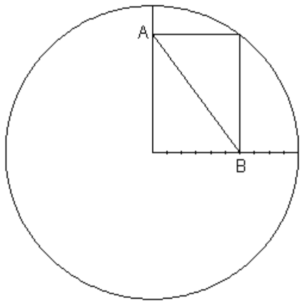
1) Se desea hacer una pileta triangular y sobre cada uno de sus bordes realizar plataformas cuadradas de 16m^2, 9m^2 y 25m^2. Calcula el área del terreno que ocupará la pileta.
2) Sea D un punto interior del triángulo ABC tal que $B\hat{D}C = 123°$ $A\hat{B}D = 15°$ $A\hat{C}D = 21°$

   Calcula la medida del ángulo $B\hat{A}C$.
3) Se tiene el triángulo ABC y un punto interior P tal que $\overline{AP} = \overline{BC}$, $P\hat{B}C = P\hat{C}B$ y $P\hat{A}C = P\hat{C}A = 20°$

   Calcula la medida de los ángulos interiores del triángulo ABC.
4) Enuncia las propiedades utilizadas para resolver los problemas anteriores.

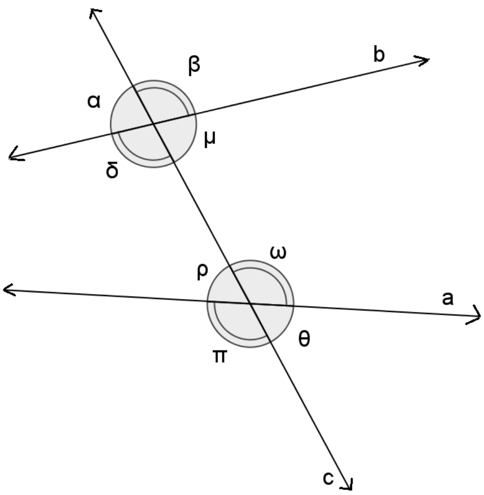
¿Ves una anciana o una joven?

A veces un problema puede ser muy difícil si lo enfocamos de una manera no adecuada... ¿Cuál es la longitud de la diagonal $\overline{AB}$ del rectángulo?

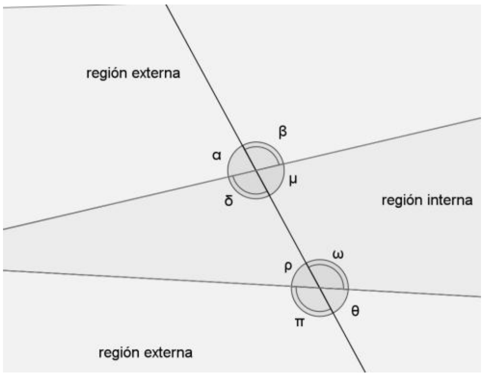


➢ ÁNGULOS DETERMINADOS POR DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.

Dos rectas coplanares a y b, cortadas ambas por una tercera recta c, llamada transversal o secante, determinan entre otros, los ángulos indicados en la figura.



En el plano podemos considerar dos regiones, considerando las rectas a y b, una interior y otra exterior.

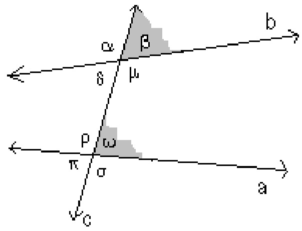


Por esto los ángulos $\hat{\delta}, \hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{\omega}$son llamados ángulos internos. Los ángulos $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\pi}, \hat{\sigma}$ son llamados ángulos externos.

Además podemos decir que $\hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\rho}, \hat{\pi}$ están en el mismo semiplano respecto de la transversal c
También están $\hat{\beta}, \hat{\sigma}, \hat{\mu}, \hat{\omega}$ en el mismo semiplano con respecto a la transversal c.

CLASIFICACIÓN DE LOS OCHO ÁNGULOS INDICADOS EN LA FIGURA

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES

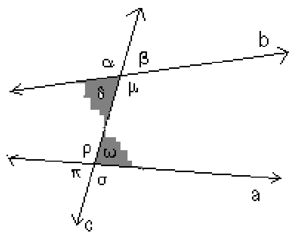


Es el par de ángulos que verifica:

* uno es interno y el otro es externo
* están en el mismo semiplano respecto de la transversal
* no son adyacentes

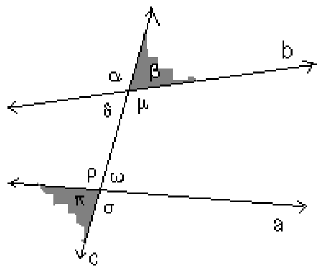
Determina todos los pares de ángulos que sean correspondientes……………………………….

ÁNGULOS ALTERNOS



INTERNOS:
Es el par de ángulos que verifica:

* ambos son internos
* están en distintos semiplanos respecto de la transversal
* no son adyacentes

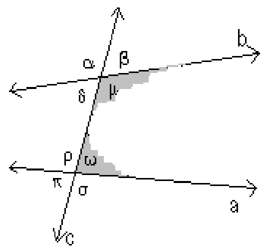


EXTERNOS:
Es el par de ángulos que verifica:

* ambos son externos
* están en distintos semiplanos respecto de la transversal
* no son adyacentes

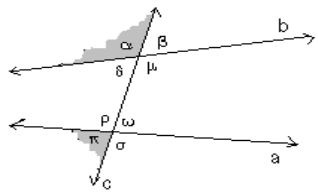
Determina todos los pares de ángulos que sean alternos internos.......................................
Determina todos los pares de ángulos que sean alternos externos......................................

ÁNGULOS CONJUGADOS



INTERNOS:
Es el par de ángulos que verifica:

* ambos son internos
* están en el mismo semiplano respecto de la transversal



EXTERNOS:
Es el par de ángulos que verifica:

* ambos son externos
* están en el mismo semiplano respecto de la transversal

a) Determina todos los pares de ángulos que sean conjugados internos……………
....

b) Determina todos los pares de ángulos que sean conjugados externos………………………..
....

c) Determina las amplitudes de los ángulos señalados en la figura si se sabe que $\hat{\beta} = 68°32'$ y su correspondiente tiene una amplitud de $70°20'$. Justifica tus respuestas.

- ***ÁNGULOS DETERMINADOS POR DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.***

PROPIEDAD DE LOS ÁNGULOS CORRESPONDIENTES ENTRE PARALELAS

Los ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma amplitud.

PROPIEDAD DE LOS ÁNGULOS ALTERNOS ENTRE PARALELAS

Los ángulos alternos entre paralelas tienen la misma amplitud.

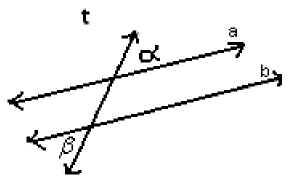
PROPIEDAD DE LOS ÁNGULOS CONJUGADOS ENTRE PARALELAS

Los ángulos conjugados entre paralelas son suplementarios.

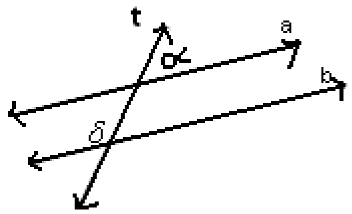
Para expresar simbólicamente que dos ángulos cualesquiera $\hat{\beta}$ y $\hat{\omega}$, tienen la misma amplitud, podemos escribir $\hat{\beta} = \hat{\omega}$	Para expresar simbólicamente que $\hat{\sigma}$ y $\hat{\mu}$ son suplementarios, podemos escribir $\hat{\sigma} + \hat{\mu} = 180°$

1) Sea $a//b$ y t secante. Sabiendo que el ángulo $\hat{\alpha}$ tiene una amplitud de $36º\ 20'$

   a) Calcula la amplitud del ángulo $\hat{\beta}$. Justifica.



   b) Calcula la amplitud del ángulo $\hat{\delta}$. Justifica.



2) Sea $t//m$ y s secante. Sabiendo que el ángulo $\hat{\delta}$ tiene una amplitud de $121º\ 20''$, determina la amplitud de los siete ángulos restantes. Realiza un gráfico. Justifica cada paso.
3) Aceptando que los ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma amplitud, demuestra que:
   a) "Los ángulos alternos externos entre paralelas tienen la misma amplitud".
   b) "Los ángulos conjugados internos entre paralelas son suplementarios".

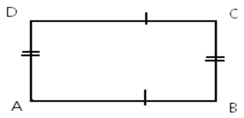
➢ *IGUALDAD DE TRIÁNGULOS*

Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados y sus tres ángulos respectivamente iguales.

Podemos pensar que si son iguales es posible superponerlos mediante un movimiento rígido (piensa en que calcas uno de ellos, mueves el papel de calcar y puedes superponerlo perfectamente con el otro); los lados que coinciden se llaman correspondientes u homólogos, análogamente ocurre con los ángulos.

En general, hablaremos indistintamente de figuras iguales o congruentes. Los matemáticos hacen la distinción entre figuras iguales (una figura sólo puede ser igual a sí misma) y figuras congruentes (cuando por algún movimiento rígido se puede hacer coincidir exactamente una con la otra).

Convenio de notación:
Si dos segmentos tienen la misma cantidad de marcas, tienen la misma medida.



$$\overline{DA} = \overline{CB}$$
$$\overline{DC} = \overline{AB}$$

1) Construye un triángulo ABC donde $\overline{AB} = 3cm$ y $\overline{AC} = 6cm$

2) Construye un triángulo ABC donde $\overline{AB} = 3cm$, $\overline{AC} = 6cm$ y $\overline{BC} = 5cm$

3) Construye un triángulo ABC, $\overline{AB} = 5cm$ y los ángulos $CAB = 47°$ y $A\hat{B}C = 70°$

4) Construye un triángulo ABC donde $\overline{AB} = 7cm, A\hat{B}C = 30° y\ B\hat{C}A = 100°$

5) Construye un triángulo ABC donde $\overline{AB} = 7cm$,$\overline{CB} = 5{,}5cm$ y $A\hat{B}C = 65°$

6) Construye un triángulo ABC donde $\overline{AB} = 7cm$, $\overline{CB} = 3cm$ y $B\hat{A}C = 20°$

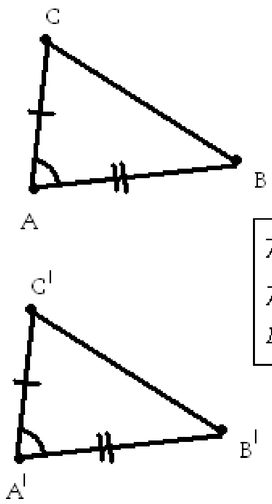
7) Construye un triángulo ABC donde $\overline{AB} = 7cm$, $\overline{CB} = 5{,}5cm$ y $B\hat{A}C = 60°$

En cada caso, compara tu construcción con la de tus compañeros con la ayuda de un papel de calcar y analiza cuántos triángulos distintos pueden construirse.

En muchas oportunidades es necesario construir un triángulo igual a otro dado. En otras situaciones necesitamos determinar si dos triángulos dados, son iguales. Para ello, no es necesario verificar que son respectivamente iguales los tres lados y los tres ángulos, es suficiente con determinar la igualdad de tres elementos convenientemente elegidos.
Estas condiciones suficientes se enuncian como: **criterios de igualdad de triángulos**.

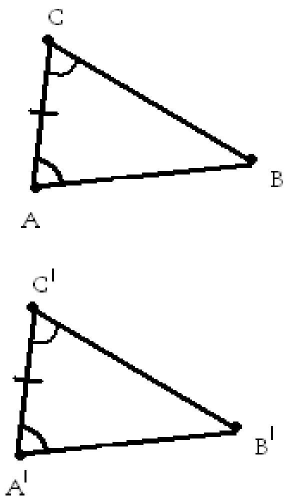
ALGUNOS CRITERIOS DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

* **Primer criterio:** Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, son iguales. Por ejemplo:



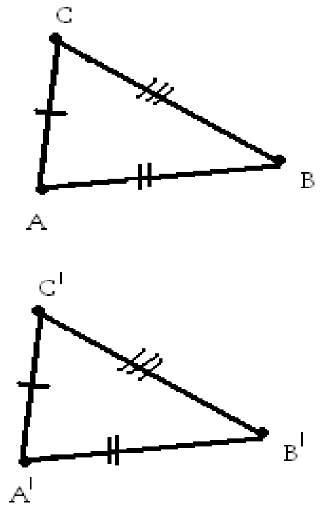
$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ B\hat{A}C = B'\hat{A}'C' \end{array}} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

* **Segundo criterio:** Dos triángulos que tienen dos ángulos y un lado respectivamente iguales, son iguales. Por ejemplo:



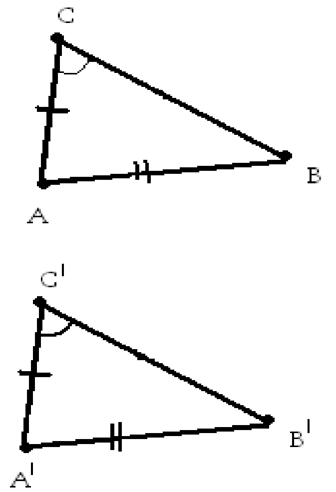
$$\boxed{\begin{array}{l} A\hat{C}B = A'\hat{C}'B' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ B\hat{A}C = B'\hat{A}'C' \end{array}} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

* **Tercer criterio:** Dos triángulos que tienen sus tres lados respectivamente iguales, son iguales. Por ejemplo:



$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{B}C=A'\hat{B}'C'$$

* **Cuarto criterio:** Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de esos lados respectivamente iguales, son iguales. Por ejemplo:



$$\left.\begin{array}{l}A\hat{C}B=A'\hat{C}'B'\\ \overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{B}C=A'\hat{B}'C'$$

1) Los criterios anteriores pueden reformularse si hablamos de triángulos rectángulos. Enuncia los criterios de igualdad de triángulos rectángulos.
2) Explica por qué no son criterios de igualdad de triángulos los siguientes:
a) si dos triángulos tienen los tres ángulos respectivamente iguales, son iguales.
b) dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo opuesto al menor de esos lados respectivamente iguales, son iguales.

➢ ***DOS LUGARES GEOMÉTRICOS***

Dado el punto O en un plano, marca todos los puntos del mismo plano que están a una distancia de 4cm del mismo.

¿Cómo se denomina la figura que obtuviste?..

Observa que todos los puntos del plano que cumplen la propiedad pedida pertenecen a la circunferencia y todos los puntos de la circunferencia cumplen con la propiedad pedida. Es por ello que se dice que dicha circunferencia es el **lugar geométrico** de los puntos del plano que distan 4cm de O.

> Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que cumplen determinada propiedad. Esto implica que si los puntos pertenecen al lugar geométrico cumplen la propiedad y si un punto cumple la propiedad entonces éste pertenece al lugar geométrico.

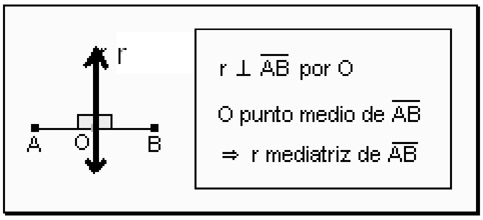
MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Se desea colocar postes para sostener un cable de alta tensión de forma tal que cada uno de ellos esté a la misma distancia de las ciudades A y B, ¿en qué lugar los podrías situar?

¿Cómo se denomina el lugar geométrico encontrado? …...

Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular que lo divide en dos segmentos de igual longitud.

La mediatriz de un segmento es el **lugar geométrico** de los puntos que equidistan de los extremos del segmento. En consecuencia, todo punto que pertenece a la mediatriz equidista de los extremos del segmento y todo punto del plano que equidista de los extremos del segmento pertenece a la mediatriz.

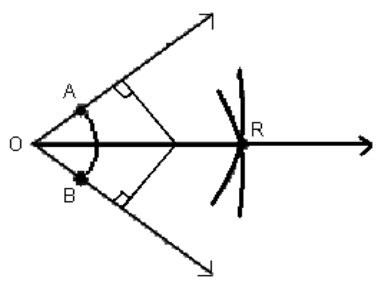


Justifica el procedimiento utilizado para trazar la mediatriz de un segmento.

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Se llama bisectriz de un ángulo a la semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos de igual amplitud. La bisectriz de un ángulo es el **lugar geométrico** de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

Todo punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo y todo punto que equidista de los lados del ángulo pertenece a la bisectriz.



$A\hat{O}R = R\hat{O}B \Leftrightarrow \overrightarrow{OR}$ es bisectriz de $A\hat{O}B$

Justifica el procedimiento utilizado para trazar la bisectriz de un ángulo.

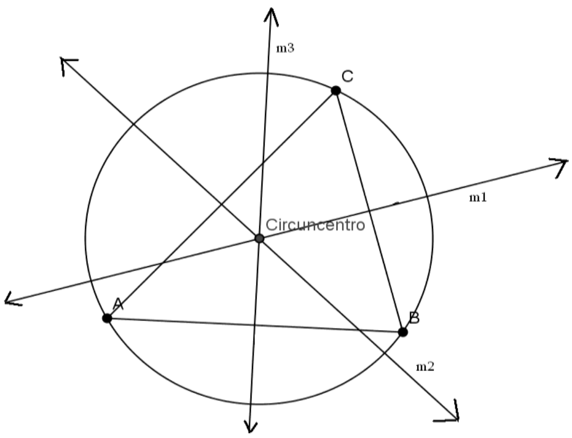
PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

Las **mediatrices** de un triángulo son las mediatrices de sus lados.

El **circuncentro (C)** de un triángulo es el punto en el que se cortan sus tres mediatrices.

El circuncentro es el centro de la **circunferencia circunscrita** al triángulo.

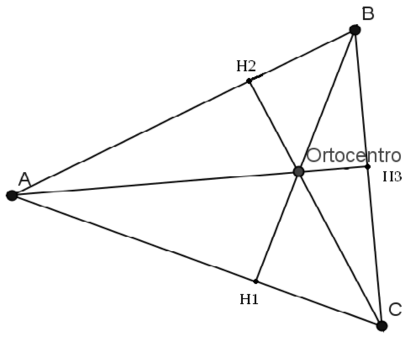
Explica por qué C es el centro de la circunferenci circunscripta al triángulo.



Construye tres triángulos, uno acutángulo, uno rectángulo y otro obtusángulo, traza el circuncentro y la circunferencia circunscripta correspondiente. Extrae conclusiones en relación a la posición del circuncentro de acuerdo al tipo de triángulo.

La **altura** de un triángulo correspondiente a un lado, es el segmento de la recta perpendicular a dicho lado trazada por el vértice opuesto, cuyos extremos son el pie de la perpendicular y dicho vértice.

El **ortocentro (O)** de un triángulo es el punto en el que se cortan las rectas que contienen las tres alturas.



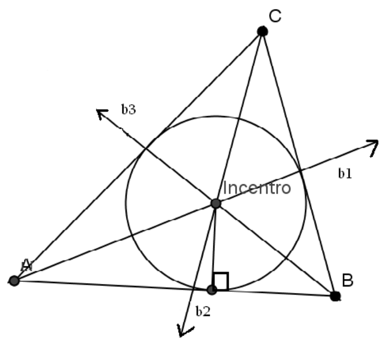
Construye tres triángulos, uno acutángulo, uno rectángulo y otro obtusángulo, traza el ortocentro. Extrae conclusiones en relación a la posición del ortocentro de acuerdo al tipo de triángulo.

Las **bisectrices** de un triángulo son las bisectrices de cada uno de sus ángulos.

El **incentro (I)** de un triángulo es el punto en el que se cortan sus tres bisectrices.

El **incentro** es el centro de la **circunferencia inscripta** en el triángulo.

Explica por qué I es el centro de la circunferencia inscripta al triángulo.



CUIDADO

Para trazar la circunferencia inscripta al triángulo debes determinar el centro de la misma (incentro) y su radio (distancia del incentro a uno de los lados del triángulo).

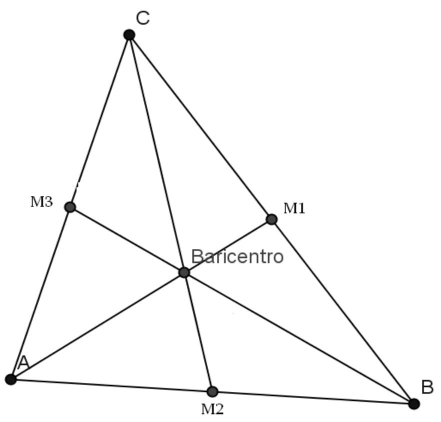
Construye tres triángulos, uno acutángulo, uno rectángulo y otro obtusángulo, traza el incentro y la circunferencia inscripta correspondiente.

Las **medianas** de un triángulo son los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de sus respectivos lados opuestos.

El **baricentro (B)** de un triángulo es el punto en el que se cortan las tres medianas.

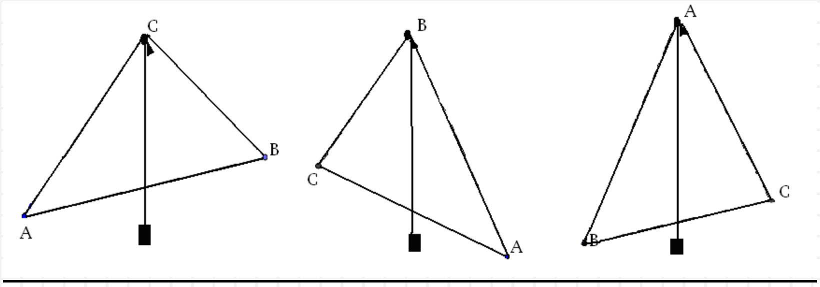
El baricentro es el **centro de gravedad** del triángulo.

El **baricentro** está a una distancia de cada uno de los vértices del triángulo igual a los dos tercios de la medida de la mediana a la que pertenece cada vértice.



1) Construye tres triángulos, uno acutángulo, uno rectángulo y otro obtusángulo, traza el baricentro. Extrae conclusiones en relación a la posición del baricentro de acuerdo al tipo de triángulo y comprueba midiendo, que está a una distancia de cada uno de los vértices del triángulo igual a los dos tercios de la medida de la mediana a la que pertenece cada vértice.

2) Ata una plomada a un alfiler y pincha el triángulo por cada una de sus esquinas. El hilo define tres rectas que son las medianas.



Traza el baricentro del triángulo y subtiende desde él, a través de un hilo, el triángulo. Comprueba que el baricentro es el centro de gravedad del mismo.

3) Existen triángulos cuyos puntos notables coinciden. ¿Qué tipo de triángulos son?

4) En un triángulo cualquiera, no equilátero, traza la recta de Euler.

> La recta de Euler de un triángulo no equilátero es aquella que contiene al ortocentro, al circuncentro y al baricentro del mismo. Se llama así en honor al matemático suizo Leonhard Euler, quien demostró este hecho a mediados del siglo XVIII.

➢ *PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS*

Algunas propiedades de los Paralelogramos

En todo paralelogramo:

* Los ángulos interiores opuestos son iguales.
* Los ángulos interiores consecutivos son suplementarios.
* Los lados opuestos son iguales.
* Las diagonales se intersecan en su punto medio.
* Cada base media es paralela e igual a los lados que no interseca.

Algunas propiedades de los Trapecios

Actividad previa: Busca la definición y propiedad de la base media de un triángulo.

La base media de un trapecio que une los puntos medios de los lados no paralelos, se llama base media principal.

La base media principal de un trapecio es paralela a los lados que no interseca e igual a la semisuma de las longitudes de los mismos.

1) Completa las siguientes tablas de doble entrada, señalándo con una cruz si el cuadrilátero verifica la propiedad que se indica.

2) Demuestra las siguientes propiedades:

*Los paralelogramos tienen ángulos consecutivos suplementarios.

*****Los rectángulos tienen las diagonales iguales.

Propiedades de los lados

Propiedades	Trapezoide	Romboide	trapecio	Trapecio rectángulo	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Sólo un par de lados paralelos									
Dos pares de lados paralelos									
Dos pares de lados consecutivos iguales									
Cuatro lados iguales									

Propiedades de los ángulos interiores

Propiedades	Trapezoide	Romboide	trapecio	Trapecio rectángulo	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Sólo un par de ángulos opuestos iguales									
Dos pares de ángulos opuestos iguales									
Sólo un par de ángulos consecutivos iguales									
Cuatro ángulos iguales									

Propiedades de las diagonales

Propiedades	Trapezoide	Romboide	trapecio	Trapecio rectángulo	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Sólo una diagonal interseca a la otra en su punto medio									
Cada diagonal interseca a la otra en su punto medio									
Una diagonal está incluida en las bisectrices de un par de ángulos opuestos									
Las diagonales son perpendiculares									
Las diagonales son iguales									
Una diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos iguales									
Cada diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos iguales									

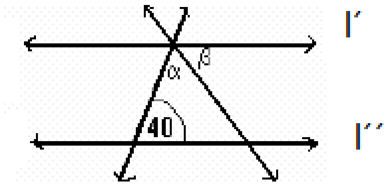
Propiedades de las bases medias

Propiedades	Trapezoide	Romboide	trapecio	Trapecio rectángulo	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Cada base media interseca a la otra en partes iguales									
Las bases medias son iguales									
Una base media es paralela a un par de lados opuestos e igual a su semisuma									
Cada base media es paralela e igual a un par de lados opuestos									

GEOMETRÍA + ACTIVIDADES

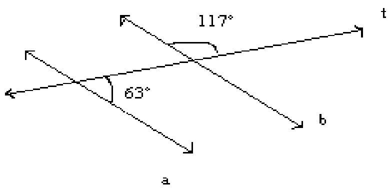
"Nunca he encontrado una persona
tan ignorante que no pueda aprender
algo de ella". Galileo Galilei

1) En la figura, calcula $\hat{\alpha}$ sabiendo que $\hat{\alpha} = \frac{2}{5}\,\hat{\beta}$ y siendo $L'//L''$. Enuncia las propiedades aplicadas.



2) ¡Por fin! lograste los conocimientos necesarios para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º. Demuéstralo.

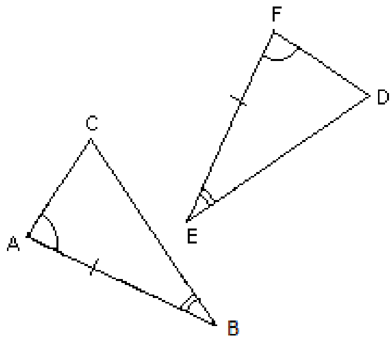
Responde:



a) ¿Cómo son entre sí los ángulos opuestos de un paralelogramo? ¿Por qué?

b) En el gráfico de la derecha, ¿son paralelas las rectas a y b? Justifica.

3) Un compañero dibujó un triángulo con un lado de 7cm. Responde: ¿Qué otra información debes solicitarle para determinar con seguridad un triángulo igual al suyo?

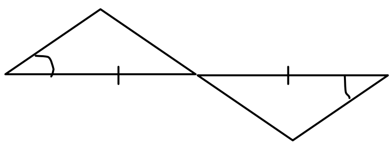


4) Los triángulos ABC y DEF son iguales, identifica el criterio que te permite afirmarlo sabiendo que los elementos marcados de igual manera son iguales; luego escribe todas las igualdades correspondientes.

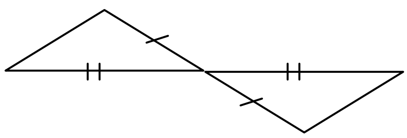
$A\hat{B}C$......	$B\hat{A}C$......	$B\hat{C}A$......
$\overline{AB} =$.......	$\overline{AC} =$.......	$\overline{CB}$.......

5) Los elementos marcados de igual forma en el gráfico son iguales. ¿Puedes afirmar que son iguales los triángulos que allí aparecen? ¿Por qué? Enuncia el criterio correspondiente en forma completa:

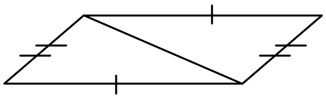
a)



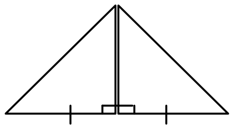
b)



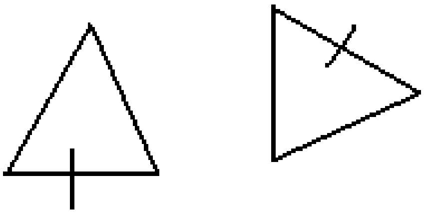
c)



d)

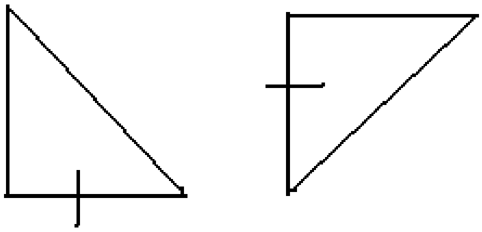


e)



Ambos triángulos equiláteros

f)



Ambos triángulos rectángulos isósceles

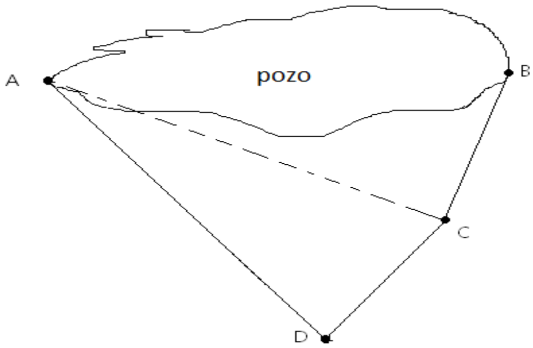
6) Justifica el siguiente procedimiento utilizado para medir la distancia entre dos puntos A y B, separados por un pozo inaccesible.

a) Se plantan unas estacas en A, B y C.

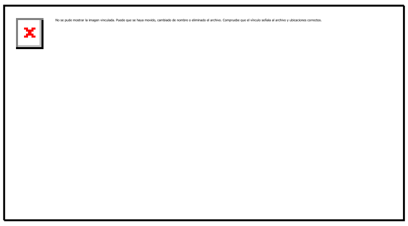
b) Se mide el ángulo $A\hat{C}B$ con un teodolito

c) Se planta otra estaca D de forma tal que $A\hat{C}D = A\hat{C}B$ y $\overline{BC} = \overline{CD}$

d) Se mide $\overline{AD}$ y se afirma: "La distancia entre A y B es la medida de $\overline{AD}$".

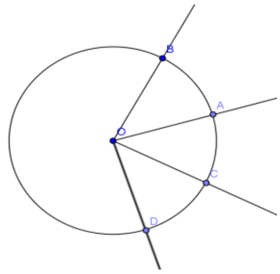


El **teodolito** es un instrumento óptico (puede ser mecánico o electrónico) que sirve para medir ángulos verticales y horizontales. Hay diferentes clases. Está hecho para fines topográficos. Con ayuda de una mira y mediante la taquimetría puede medir distancias.



Actualmente hay celulares o tabletas que tienen aplicaciones con las que se puede medir alturas, distancias y ángulos. Aunque es utilizada principalmente por geólogos, arqueólogos, ingenieros, topógrafos, arquitectos y otros profesionales, el dispositivo puede ser muy útil para excursionistas y ciclistas, golfistas tratando de determinar las distancias a los hoyos, entre otros.

7) Si los ángulos $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$ tienen la misma amplitud, responde:
¿cómo son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$? ¿por qué?
Nota: O es el centro de la circunferencia.

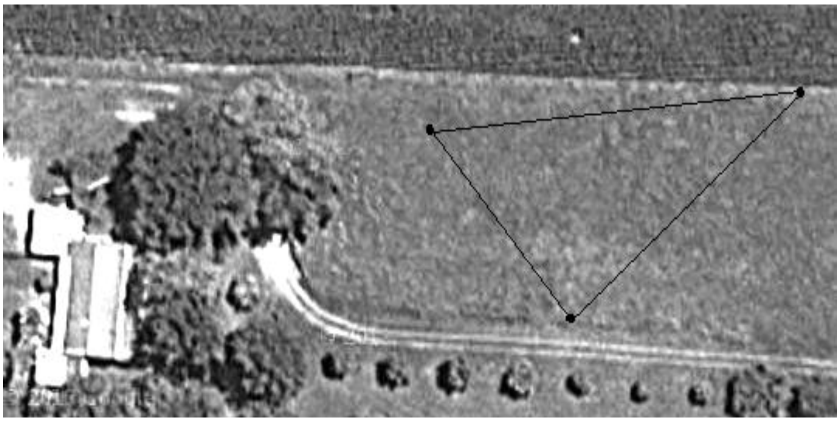


Responde:

a) ¿Si dos triángulos tienen igual área, puedes afirmar que son iguales?

b) ¿Si dos triángulos tienen igual perímetro, puedes afirmar que son iguales?

8) Un club desea construir una pileta circular lo más grande posible y dispone del siguiente espacio triangular, representado en el gráfico. Determina en dicho gráfico la ubicación de la pileta.



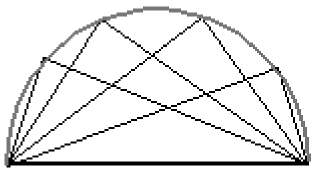
9) Se desea colocar una ducha en un complejo termal, de tal manera que al terminar de ducharse los visitantes recorran la misma distancia al borde de cualquiera de las tres piletas.
a) Determina en el dibujo en qué punto del plano debe situarse (señálalo con un punto denominado
b) Justifica el procedimiento empleado.

10) Determina en el plano, la posición de una antena parabólica que debe estar a la misma distancia de Esperanza, San Carlos Centro y Sauce Viejo. Justifica.

Imagen extraída de www.maps.google.com.ar

11) Demuestra la siguiente afirmación: "Si en un triángulo se trazan las medianas, éste queda dividido en 6 triángulos de igual área y ésta es igual a la sexta parte del área del triángulo dado".
12) Dado el triángulo BAD, isósceles y rectángulo en A, E es el punto medio de $\overline{AD}$ y F es el punto medio de la hipotenusa. Traza los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$. Calcula el área de cada una de las regiones en que quedó dividido el triángulo, sabiendo que los catetos miden 12 unidades.
13) Dibuja tres puntos no alineados y construye una circunferencia que pase por ellos.
14) Dado el siguiente arco de circunferencia, completa el trazado de la misma.

a) En la figura adjunta, se ha tomado como lado común de todos los triángulos un diámetro de la circunferencia circunscrita a ellos. Justiica qué tipo de triángulos son.



b) Traza una circunferencia, sólo con regla traza un ángulo recto cuyo vértice pertenezca a la circunferencia y sus lados sean secantes a la misma. Justifica el procedimiento.

15) Completa: Sabiendo que en un cuadrilátero
   a) hay dos ángulos consecutivos iguales y los otros distintos entre sí, podemos afirmar que es un……………………………………………………………...
   b) los lados opuestos son iguales, podemos afirmar que es un……………………………………………………………….
   c) hay un sólo par de ángulos opuestos iguales, podemos afirmar que es un……………………………………………………………….
   d) todos los ángulos son iguales, podemos afirmar que es un……………………......…………………………………..

16) Los siguientes enunciados son falsos, explica por qué.
   a) No hay rombos que sean rectángulos.
   b) Hay romboides con lados paralelos.
   c) No hay trapezoides con dos ángulos iguales.

17) Construye un rombo de 4,5cm de lado, sabiendo que uno de sus ángulos interiores tiene 60° de amplitud.

18) Construye un rombo cuyas diagonales tengan 4cm de longitud. ¿Cómo son sus ángulos? Justifica tu respuesta.

19) Construye un romboide con los siguientes datos:

$\overline{AC} = 5cm$ (diagonal principal)

$\overline{BD} = 4cm$ (diagonal)

$\overline{AD} = 2{,}5cm$ (lado)

20) Construye un trapecio $ABCD$ con $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ bases. Teniendo en cuenta que:

$\overline{AB} = 5cm$ $\quad \overline{DC} = 3cm$ $\quad \overline{BC} = 2cm$ $\quad \overline{DA} = 2{,}2cm$

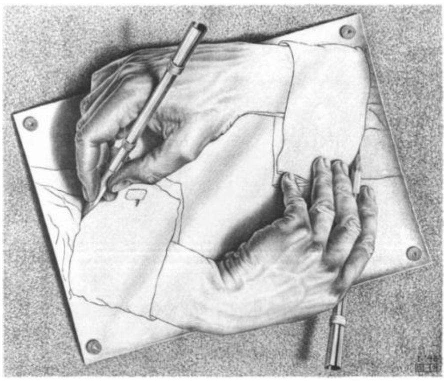
21) Dibuja un cuadrilátero cualquiera $POSF$. Marca los puntos medios de cada lado. Determinar un cuadrilátero convexo con ellos. Justifica qué tipo de cuadrilátero es.

22) Responde: ¿Cómo debería ser el cuadrilátero $ABCD$ para que al unir los puntos medios de sus lados resulte un rombo? ¿Y un romboide? ¿Y un rectángulo? ¿Y un cuadrado?

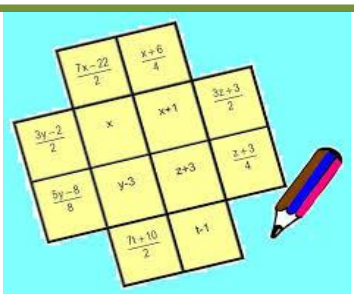
23) Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ de distinta longitud, indica cómo debes disponerlos para que sean diagonales de un:
   a) romboide
   b) rombo
   c) paralelogramo

24) Calcula el área de un cuadrilátero cuyos lados miden 10cm respectivamente y una de sus diagonales 16cm.

El arte y la matemática. Maurits Cornelis Escher nació en 1898 en Leeuwarden (Holanda). No fue precisamente un estudiante brillante, y sólo llegó a destacarse en las clases de dibujo. En 1919 empezó los estudios de arquitectura en la Escuela de Arquitectura y Artes Decorativas de Haarlem, estudios que abandonó poco después para pasar como discípulo de un profesor de artes gráficas. Escher fue un artista inusual, decidido a resolver problemas que parecían interesar más a los matemáticos que a los artistas. Tenía el deseo de romper las limitaciones que impone el plano al arte, de mostrar como nunca antes se había visto que una superficie bidimensional es capaz de ilusiones ópticas de gran profundidad. Estos son algunas de sus obras:


Si querés ver más podés visitar la página : http://www.uv.es/~buso/escher/escher.html



Capítulo 4 Expresiones Algebraicas

Si bien la palabra Álgebra puede sonarte algo extraña, ya desde algunos años vienes trabajando con esta rama de la matemática, casi sin saberlo.

Las fórmulas en geometría, por ejemplo, vienen dadas con letras (que representan mediciones) y operaciones aritméticas (adiciones, sustracciones, multiplicaciones, etc). La fórmula para calcular el área de un rectángulo viene dada por la expresión: b.h, donde b es la medida de la base del rectángulo y h la medida de su altura. Expresar el cálculo del área a través de operaciones con letras, posibilita la generalización de dicho cálculo, sólo debemos preguntarnos en el caso particular que tengamos, cuáles son las dimensiones de nuestro rectángulo y así al aplicar la fórmula podemos obtener su área. De eso justamente se trata el álgebra, relacionar letras que representan números con operaciones aritméticas.

Al-Khowarizmi matemático y astrónomo árabe, vivió en Bagdad alrededor del año 800 D.C., en la edad de oro de la ciencia islámica. Su principal aporte fue introducir a los matemáticos europeos en los numerales indoarábigos y en los principios fundamentales del álgebra.

Su obra más importante Al-jabr wa' al-muqābalah fue traducida al latín en el siglo XII dando origen al término "álgebra". En ella se compilan una serie de reglas para obtener las soluciones aritméticas de las ecuaciones. El método de resolución de tales ecuaciones no difiere en esencia del empleado en nuestros días.

No sabemos con toda seguridad lo que significaban los términos árabes aljabr y muqābalah pero aljabr significaba probablemente algo así como restauración o completación y parece querer referirse a la transposición de términos que están restados al otro miembro de la ecuación, sumándolos; la palabra muqābalah parece referirse a la reducción o compensación es decir la cancelación de términos iguales en los dos miembros de la ecuación.

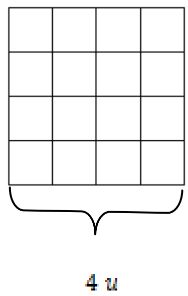
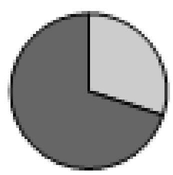
➢ *LENGUAJES MATEMÁTICOS*

Cuando en la vida diaria nos comunicamos, utilizamos en general el lenguaje oral o escrito. En matemática también utilizamos distintos lenguajes:

Algunos ejemplos de lenguajes matemáticos son:

* Lenguaje coloquial: ésta formado por las palabras del idioma que hablamos.
* Lenguaje simbólico o algebraico: ésta formado por símbolos matemáticos y letras que se utilizan para representar números o expresiones desconocidas.
* Lenguaje gráfico: ésta formado por esquemas o gráficos que brindan información, sobre una situación en particular, con sólo observarlos.

Algunos ejemplos:

<table>
<tr><th>Lenguaje coloquial</th><th>Lenguaje simbólico o algebraico</th><th>Lenguaje gráfico</th></tr>
<tr><td>“El área de un cuadrado cuyo lado mide cuatro unidades, es de dieciseis unidades cuadradas”.</td><td>$A = L^2 = 16u^2$
Siendo L la medida del lado de un cuadrado y A su área.</td><td></td></tr>
<tr><td>“El treinta por ciento de los integrantes de un curso son mujeres”</td><td>$M = \frac{30}{100}x$
Siendo **x** la cantidad de integrantes de un curso y **M** la cantidad de mujeres.</td><td></td></tr>
<tr><td>“El triple de un número entero”</td><td>$3.n$ Siendo n un número entero</td><td><table><tr><td>Nº entero</td><td>-1</td><td>-2</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>Su triple</td><td>-3</td><td>-6</td><td>0</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
</table>

Completa el siguiente cuadro

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico o algebraico
El doble de un número c	
	$\frac{p}{2}$
	$\frac{b.h}{2}$
	$w < z$
El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos	
El área de un rombo es igual a la diagonal mayor por la diagonal menor dividido dos.	
Un número par	
	$2n + 1$
Un número entero negativo	
	$\|a\| = 4$
El módulo de un número entero es mayor que diez	
El siguiente de un número entero	
La diferencia entre los cuadrados de dos números	
	$-2 \leq x < 5$
Dos números enteros consecutivos	

Como se observa en los ejemplos anteriores, el lenguaje simbólico nos permite expresar de forma algebraica las situaciones presentadas en forma coloquial.

Las expresiones algebraicas son combinaciones entre letras y números donde intervienen operaciones aritméticas.

Las letras que intervienen en una expresión algebraica se llaman **variables** y representan distintos números o expresiones, según el problema.

Cuando en la expresión algebraica reemplazamos la variable por un número y resolvemos las operaciones indicadas, obtenemos el **valor numérico** de la misma.

Ejemplos:

a) La expresión algebraica del perímetro de un cuadrado cuyo lado mide x unidades puede ser: $x.4$

$*$ Si $x = 8$ el valor numérico de la expresión algebraica es $8.4 = 32$ entonces, 32 unidades es el perímetro del cuadrado.

b) La expresión algebraica del perímetro de un rectángulo cuyos lados miden a y b unidades, puede ser: $2.a + 2.b$

$*$ Si $a = 2$ y $b = 3$ el valor numérico de la expresión algebraica es $2.2 + 2.3 = 10$ y entonces, 10 unidades es el perímetro del rectángulo.

$*$ Si $a = 10$ y $b = 5$ el valor numérico de la expresión algebraica es........................

c) La expresión algebraica que representa el 40% del precio x de cierto artículo puede ser: $\frac{40}{100}x$ ó $0{,}4x$ ó $\frac{4}{10}x$

$*$ Si x es 50 el valor numérico de la expresión algebraica es $\frac{40}{100}.50 = 20$

$*$ Si x es 20 el valor numérico de la expresión algebraica es.....................................

1) Halla el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones algebraicas para x = -2 e y = 5

a) $7x^2 + 2y$ b) $(10x + 30): 5$ c) $x.(y - 1)$

2) Escribe la expresión algebraica que permite calcular:

El perímetro de un triángulo isósceles donde el lado desigual mide dos unidades más que los otros dos lados.

El área de un rectángulo donde su base es el doble, de su altura disminuida en 1 unidad.

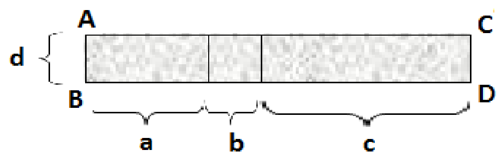
3) Calcula lo planteado en los incisos anteriores, sabiendo que:

a) en el triángulo, los lados iguales miden 3cm.

b) en el rectángulo, la altura mide 7 unidades.

➢ *OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS*

Sofía y Sebastián expresaron el área del rectángulo $ABDC$



Sofía lo expresó de la siguiente manera: $a.d + b.d + c.d$

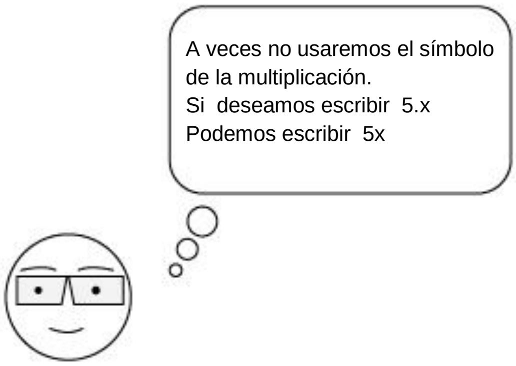
Sebastián sin embargo lo expresó así: $(a + b + c).d$

¿Quién está en lo cierto?

....

Como en las expresiones algebraicas, los números y las letras (que representan números), se relacionan a través de operaciones aritméticas, en ellas se cumplen las mismas propiedades que en las operaciones con números.

Será de gran utilidad saber operar con expresiones algebraicas.



TEN EN CUENTA

En la práctica para operar con expresiones algebraicas aplicamos las propiedades de la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

RECUERDA

a= 1.a

-a = (-1).a

a + a = 2.a =a.2

a.a = a^2

Ejemplos:

2 a + 4 + 5 a = (a + a) + 4 +(a + a + a + a + a) = (a + a + a + a + a + a + a)+ 4 = 7 a + 4

2 a + 4 + 5 a = 2 a + 5 a+ 4 = (2 + 5) a + 4 = 7 a + 4

4 a^2 a^3 = 4 (a a) (a a a) = 4 (a a a a a) = 4 a^5

4 a^2 a^3 = 4 a^{2+3} = 4 a^5

Observa que la última expresión algebraica en cada uno de los ejemplos anteriores, resulta ser la más reducida.

CUIDADO

$x^2 = x.x \neq 2x$ $\qquad 2 + x \neq 2x$ $\qquad -(x-1) = -x+1 \neq -x-1$

Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

a) $7w - 2w =$ b) $a + 3 - 2a =$ c) $16t - (-t) =$ d) $8w + w =$

e) $2x.\,x =$ f) $g.\,5g + g =$ g) $7(q + 3) =$ h) $(16 - 4z): 2 =$

i) $7.\,(2h + 3) =$ j) $\dfrac{10z-30}{5} =$ k) $\dfrac{9(x-2)}{3} =$ l) $\dfrac{15x-9}{-3} =$

m) $2(m-1) + 3(m+1) =$ n) $1 - (d+3) =$ o) $2 - (x+4) =$ p) $-(x+3) + (x+8) =$

q) $5 - 3(2x+1) =$ r) $2x - 3(x+4) =$

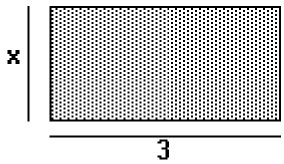
➢ *INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE ALGUNAS OPERACIONES ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.*

Algunas operaciones, como la multiplicación, la adición y la potenciación, podemos analizarlas de la siguiente manera:

Ejemplo 1

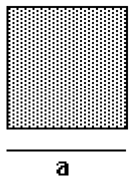
El resultado de la multiplicación **3.x** se puede interpretar como el área de un rectángulo donde el largo mide 3 unidades y el ancho x unidades.

Área del rectángulo $= 3.x = x.3 = 3x$



Ejemplo 2

El resultado de **a²** puede interpretarse como el área de un cuadrado cuyo lado mide a unidades.



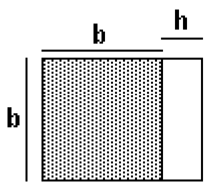
Área del cuadrado = $a.a = a^2$

Ejemplo 3

El rectángulo de largo $(b + h)$ unidades y de ancho b unidades es subdividido en dos partes, una cuadrada y otra rectangular.

Área del cuadrado = $b.b$

Área del rectángulo = b.h

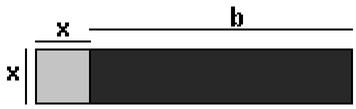


Área del rectángulo mayor = $bb + bh = b^2 + bh = b.(b + h)$

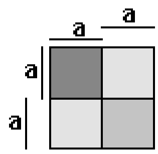
Podemos concluir que: $(b + h).b = b^2 + bh$

Escribe el área de la figura mayor, en cada caso, de diferentes maneras.

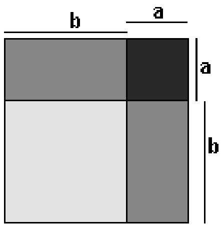
* Área del rectángulo mayor = ……………………………………………………



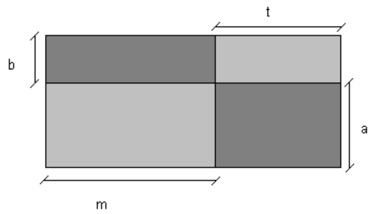
* Área del cuadrado mayor = …………………………..........................



* Área del cuadrado mayor = …………………………………………………..

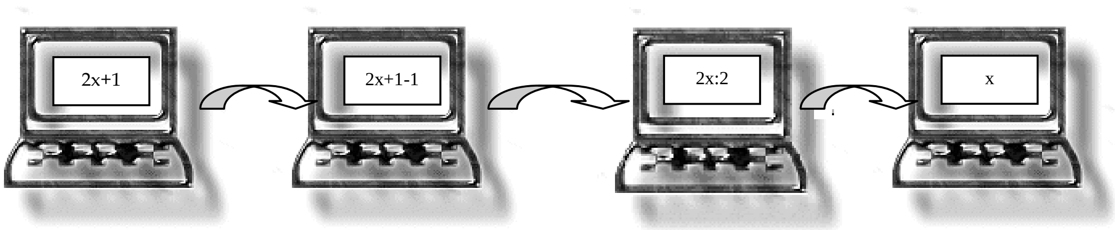


* Área del rectángulo mayor = ……………………………………………..



- ***UNA MÁQUINA DESCOMPUESTA***

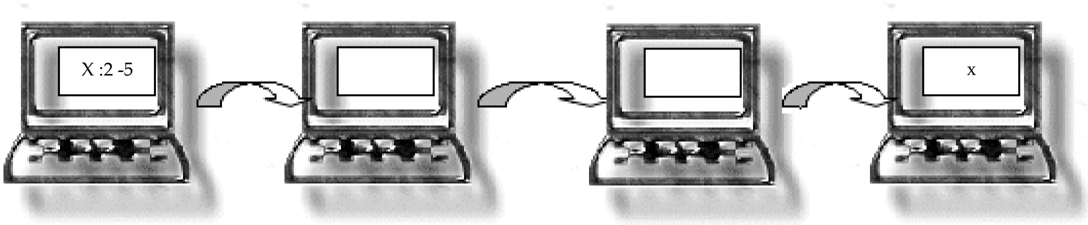
La siguiente máquina deshace cualquier expresión algebraica hasta obtener su variable, como muestra el ejemplo siguiente:



¿Qué operaciones sucesivas le hace la máquina, a la expresión algebraica para obtener x?
....

....
Las operaciones que se pueden realizar en la máquina son +, - , . , :, y éstas se les aplica a toda la expresión.

Pon a funcionar nuevamente la máquina



Más adelante veremos que realizar este proceso resulta de mucha importancia.

Para deshacer las operaciones debes tener en cuenta el orden con que estas se realizan.

Ejemplo: $\frac{x}{5}+3 \Rightarrow \left(\frac{x}{5}+3\right).5 = x+15 \Rightarrow x+15-15 = x$

Otra forma: $\frac{x}{5}+3 \Rightarrow \frac{x}{5}+3-3 = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{x}{5}.5 = x$

Es incorrecto: $\frac{x}{5}+3 \Rightarrow \frac{x}{5}+3.5 \neq x+3$

Realiza operaciones sucesivas a cada expresión algebraica hasta obtener su variable.

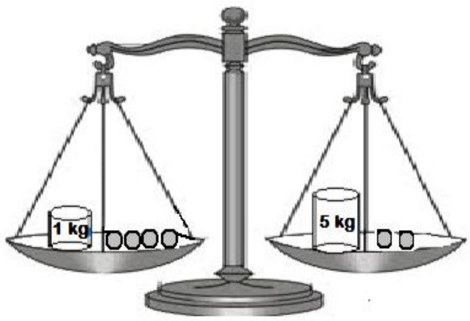
a) 2 + 7x b) 3(w+1) c) $\frac{2x+2}{2}$ d) 7(5 – q) + 3 e) $\frac{5-15z}{5}+2$

- ***AVERIGUANDO PESOS***

Francisco se puso a jugar con los elementos que encontró en el baúl de su abuelo Andrés. Andrés tenía una fiambrería hace muchos años donde utilizaba una balanza de platillos y pesas, para pesar los productos. Las pesas que encontró Francisco, eran una de 1 kg y otra de 5 kg. También encontró una caja con bochines, todos iguales, y se propuso averiguar el peso de cada uno utilizando la balanza, los bochines y las pesas.

El equilibrio de la balanza se logra cuando los dos platillos tienen los mismos pesos.

Después de varios intentos se dio cuenta que la balanza quedaba en equilibrio si ponía los bochines y las pesas como se muestra en la figura:



Si llamamos "B" al peso de cada bochín:

a) Escribe simbólicamente la igualdad entre los platillos de la balanza.
b) Francisco retiró, de cada platillo, todos los bochines que pudo manteniendo el equilibrio. Representa gráfica y simbólicamente la nueva situación de equilibrio de la balanza.
c) Encuentra el peso de cada bochín, por tanteo.

La expresión simbólica que describe la igualdad entre los platillos es una **ecuación**, en ella aparecen elementos desconocidos o incógnitas.
Las **incógnitas** se expresan mediante símbolos arbitrarios, como ♦, ♣, ■, etc., o letras tales como x, y, z, w, … etc.
Resolver una ecuación significa determinar el conjunto de valores de la o las incógnitas, para los cuales la igualdad dada se verifica. Tales valores, se llaman
soluciones o raíces de la ecuación y el conjunto de ellos se denomina **conjunto solución.**

En este capítulo consideraremos sólo las soluciones que pertenezcan al conjunto de números enteros.

- ***ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA***

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.
Para resolver ecuaciones transformamos, la ecuación a resolver, en otras más sencilla que tengan el mismo conjunto solución, estas ecuaciones se dicen **equivalentes**.

Si volvemos al problema donde Francisco quiere calcular el peso de los bochines, observamos que pudo haber planteado la siguiente ecuación:

$4\ B + 1 = 2\ B + 5$

Luego cuando retiró los bochines manteniendo el equilibrio obtuvo la siguiente ecuación:

$2\ B + 1 = 5$

Estas ecuaciones tienen el mismo conjunto solución $S = \{2\}$, podemos decir que las ecuaciones anteriores son **equivalentes.**

A continuación analizamos las propiedades que nos permiten realizar estas transformaciones.

PROPIEDAD UNIFORME

Si en una ecuación se suma o se resta un mismo número o una misma expresión algebraica entera en ambos miembros de la igualdad, se obtiene una ecuación equivalente.

Por ejemplo, en la ecuación: $4 \,.\, B + 1 = 2 \,.\, B + 5$

Sumamos " 6 " en ambos miembros $4 \,.\, B + 1 \mathbf{+ 6} = 2 \,.\, B + 5 \mathbf{+ 6}$

Obtenemos otra ecuación equivalente a la primera.

Pero observa que la ecuación obtenida es más compleja que la original, entonces podemos elegir otra expresión para sumar o restar miembro a miembro para que la ecuación resultante sea más simple.

Nuevamente en la ecuación $4 \,.\, B + 1 = 2 \,.\, B + 5$

Restamos " 1" miembro a miembro $4 \,.\, B + 1 \mathbf{-1} = 2 \,.\, B + 5 \mathbf{-1}$

Como $1 \mathbf{-1 = 0}$ **,** se puede escribir $4 \,.\, B = 2 \,.\, B + 4$

También podemos restar " 2 B" en ambos miembros de la igualdad original $4 \,.\, B + 1 \mathbf{- 2\,B} = 2 \,.\, B + 5 \mathbf{- 2\,B}$

Como $2.\ B - \mathbf{2\,B} \mathbf{= 0}$**,** se puede escribir $2 \,.\, B + 1 = 5$

Luego, podemos restar " 1 " en ambos miembros de la igualdad $2 \,.\, B + 1 \mathbf{- 1} = 5 \mathbf{- 1}$

Obtenemos otra ecuación equivalente $2 \,.\, B = 4$

Si en una ecuación se multiplican o dividen ambos miembros por un mismo número (distinto de cero), se obtiene otra ecuación que es equivalente a la original.

En nuestro ejemplo:

Obtuvimos $2 . B = 4$

Dividimos entre " 5 " miembro a miembro $\frac{2B}{5} = \frac{4}{5}$

La igualdad obtenida no es más simple que la anterior.

Podemos dividir entre " 2 " que es conveniente, en ambos miembros $\frac{2B}{2} = \frac{4}{2}$

Y ahora nos queda

Como 2 : 2 = 1 , entonces $1. B = 2$

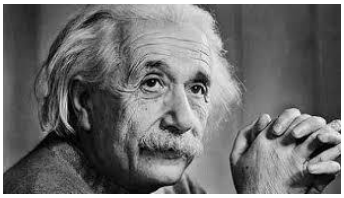
Por la propiedad del elemento neutro de la multiplicación $B = 2$

Y … ¡ Por fin llegamos a la ecuación más sencilla, que indica la solución de la ecuación!

Determina el conjunto solución de la ecuación, aplicando la propiedad uniforme:

a) $7w + 1 = 15$ b) $1- (x+2) = 10$ c) $9 = -3 (w - 4)$

d) $13 = \frac{22 - 121.k}{11}$ e) $1 - (7 + x) = -6$ f) $7(m-1) + 2 = 2 + 6m$



Albert Einstein

1879-1955, Premio Nobel de Física en 1921. Es el científico más conocido e importante del siglo XX. En 1915 presentó la Teoría General de la Relatividad. Probablemente, la ecuación de la física más conocida a nivel popular es la expresión algebraica:

$$E=m.c^2$$

Esta ecuación implica que la energía E de un cuerpo en reposo es igual a su masa multiplicada por la velocidad de la luz al cuadrado.

http://es.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein

➢ *ERRORES FRECUENTES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES*

Muchas veces al resolver una ecuación es conveniente, antes de aplicar la propiedad uniforme, resolver las expresiones algebraicas de cada miembro hasta obtener su mínima expresión.

Ejemplo: $3(a + 1) - 9 = (5a + 10): 5$

$3a+3 - 9 = a + 2$

$3a - 6 = a + 2$ y ahora sí aplicando la propiedad uniforme

$3a-6 + 6 = a+2+6$

$3a = a+8$

$3a-a = a+8-a$

$2a = 8$

$2a:2 = 8:2$

$a = 4$

Si no prestamos atención a los diferentes pasos que seguimos para resolver una ecuación podemos cometer errores que nos llevarán a un conjunto solución erróneo.

Los siguientes procedimientos de resolución son erróneos. Encuentra los errores cometidos.

<table>
<tr><td>$-3x = 9$
$-3x:3 = 9:3$
$x = 3$</td><td>$3-q = 7$
$3-q -3 = 7-3$
$q = 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$6z+10 = 2z$
$6z+10 :2 = 2z : 2$
$6z +5 = z$
$6z+5-6z = z-6z$
$5= -5z$
$5: (-5) = -5z: (-5)$
$-1 = z$</td></tr>
</table>

- ***CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES SEGÚN EL CONJUNTO SOLUCIÓN***

Algunas ecuaciones tienen una sola solución.
En la ecuación planteada para el peso de los bochines, la única solución de la ecuación es $B = 2$

Resolución	Verificación
$4 \cdot B + 1 = 2 \cdot B + 5$	
$4. B+ 1-1 = 2. B+ 5 -1$	$4B +1 = 2B +5$
$4B = 2B + 4$	Si $B = 2$; $4.2 +1 = 2.2 +5$
$4B-2B = 2B+4-2B$	$9 = 9$
$2B = 4$	
$2B : 2 = 4: 2$	
$B = 2$	

El conjunto solución lo expresamos: $S = \{B \in Z / B = 2\} = \{2\}$

Otras ecuaciones tienen más de una solución.

La ecuación $\|W\|= 5$ tiene dos soluciones	Verificación
	$\|w\|=5$
$w =- 5$ y $w = 5$	Si $w = 5$; $\|5\|=5$
	Si $w = -5$; $\|-5\|=5$

$$S = \{w \in Z / \ w = -5 \text{ o } w = 5\} = \{-5; 5\}$$

Otras ecuaciones tienen infinitas soluciones.

La ecuación $2w - 3 = 2 (w - 2) + 1$ tiene infinitas soluciones, pues cualquier número entero w la verifica.

$$2w-3= 2w-4 +1$$
$$2w-3 = 2w-3$$
$$2w-2w = -3+3$$
$$0 w = 0$$ **Identidad**

Cualquier número entero verifica la ecuación. Entonces, $S = \{w / w \in Z\}$

Otras ecuaciones no tienen solución.

Ejemplos:

- La ecuación |q + 2| = -2 no tiene solución.
- La ecuación 3x = 7 no tiene solución en los números enteros.
- La ecuación x+2 –5 = x –1

x-3 = x-1

x-3+3 = x-1+3

x = x+2

x-x = x+2-x

0 = 2 **Absurdo**

No hay ningún número entero que satisfaga la ecuación. Entonces, S={}.

En este capítulo consideraremos sólo las soluciones que pertenezcan al conjunto de números enteros.

- ***OTRAS ECUACIONES PARTICULARES QUE PODEMOS RESOLVER***

I) Resolvamos la ecuación $\sqrt[3]{x+2}=-1$

Primero, elevamos miembro a miembro al cubo $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3=(-1)^3$

Aplicamos propiedades de la radicación $x+2=-1$

Restamos miembro a miembro 2 $x+2-2=-1-2$

Y obtenemos una posible solución x = -3

Ahora, verificamos $\sqrt[3]{-3+2}=\sqrt[3]{-1}=-1$

Entonces, el conjunto solución es S= {-3}

II) Resolvamos la ecuación $x^3+5=13$

Primero, restamos miembro a miembro 5 $x^3+5-5=13-5$

$x^3=8$

Aplicamos miembro a miembro la raíz cúbica $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$

Y obtenemos, aplicando propiedades de la radicación x = 2

Ahora, verificamos $2^3 + 5 = 8 + 5 = 13$

Entonces, el conjunto solución es S= {2}

III) Otro ejemplo, resolvamos la ecuación $x^2 - 3 = 6$

Primero, sumamos miembro a miembro 3 $x^2 - 3 + 3 = 6 + 3$

$$x^2 = 9$$

Aplicamos miembro a miembro la raíz cuadrada $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

Por propiedades de la radicación (índice par) $|x| = 3$

Entonces, obtenemos $x = 3 \vee x = -3$

Ahora, verificamos

Si x = 3 , reemplazamos en la ecuación original

$3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$ (verifica)

Si x = -3 , reemplazamos en la ecuación original

$(-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$ (verifica)

Entonces, el conjunto solución es S= {3, -3}

IV) Resolvamos la ecuación $\sqrt{x+2} = 1$

Primero, elevamos miembro a miembro al cuadrado $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = 1^2$

Aplicamos propiedades de la radicación $|x+2| = 1$

Y obtenemos la solución x= -1 o x = -3

Ahora, verificamos,

si x = -1: $\sqrt{-1+2} = 1$

si x = -3: $\sqrt{-3+2} = \sqrt{-1} \neq 1$

Entonces, el conjunto solución es: S= { -1}

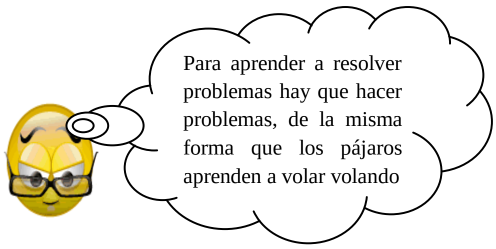
Determina el conjuno solución de:

a) $\sqrt[3]{x-3}=1$ b) $x^3+8=0$ c) $w^5-35=-3$ d) $3.x^2=300$

e) $\left(p^2+3\right):2=14$ f) $3\left(b^3-1\right)=-27$ g) $2\sqrt[3]{x-5}=-1$ h) $2.\sqrt[3]{g+2}=-4$

i) $|a|+5=7$ j) $(-2)^5-2=|w|$ k) $|x+1|=3$

- ***RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS***



La matemática ha crecido y crece como ciencia, sólo por la necesidad de resolver problemas de la realidad y aquellos que les son propios. Por ello es impensado pretender entender y aprender matemática si no somos capaces de resolver problemas o por lo menos intentarlo. En esta sección te propondremos algunas cuestiones que siempre debes tener presente a la hora de resolver un problema de matemática y lo haremos basándonos en la resolución del siguiente problema:

¿Cuál es el área de un triángulo isósceles si su perímetro es 16 cm y el lado desigual mide 1 cm más que cada uno de los otros dos lados iguales?

Leer y entender

Por supuesto lo primero que debemos hacer ante un problema es leer detenidamente su enunciado, pero además es necesario, para saber que lo has entendido, responder a las siguientes preguntas:

-¿Entendí todas las palabras del enunciado? ¿Comprendo su significado?

-¿Cuáles son las palabras que tienen algún significado matemático?

-¿Cuáles son los datos?

-¿Soy capaz de explicar con mis palabras este problema?

* Sé que se trata de un triángulo isósceles
* Conozco el perímetro del triángulo isósceles
* Sé también que el lado desigual es 1 cm más que los otros lados
* Me interesa saber su área

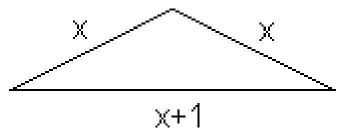
Hacer un gráfico de la situación y expresar en lenguaje simbólico, mientras sea posible

-Debes imaginarte y realizar posteriormente un gráfico que interprete el problema.

-Expresa en lenguaje simbólico las cuestiones destacadas en el apartado anterior, siempre definiendo claramente qué representa cada incógnita.

-Incorpora a la figura de análisis las incógnitas que correspondan.

Figura de análisis



Llamo “x” a la medida de los lados iguales del triángulo isósceles.

Llamo “x+1” a la medida del lado desigual.

Llamo “A” al área que estoy por averiguar.

Llamo “P” al perímetro de éste triángulo y sé que $P = 16$ cm

Decidir el procedimiento a seguir.

-Piensa en los datos que da el enunciado y lo que necesitas averiguar

-Escribe fórmulas o propiedades que relacionen los datos con lo que deseas averiguar.

-Describe cuidadosamente cada paso que sigues para resolver, de esa forma si te equivocas en alguno de ellos, podrás encontrar más fácilmente el error.

Lo que debo averiguar es el área del triángulo pero primero debo encontrar la medida de los lados del triángulo.

Puedo usar el dato que es el perímetro, entonces:

P= x + x + (x+1) pero P=16

Luego,

16 = x + x + (x+1)

Resuelvo esta ecuación

$$16 = x + x + x + 1$$
$$16 = 3x + 1$$
$$16 - 1 = 3x + 1 - 1$$
$$\frac{15}{3} = \frac{3x}{3}$$
$$5 = x$$

Este valor no resuelve el problema pues es la medida de los lados iguales.

Ahora debo calcular el área del triángulo. Cómo conozco la medida de los tres lados pues si hallé el valor de x ya sé que los lados iguale miden 5 cm y el lado desigual 6 cm, puedo hallar el área del triángulo utilizando la fórmula de Herón.

$$A = \sqrt{s(s-5).(s-5).(s-6)}$$
$$siendo$$
$$s = \frac{5+5+6}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Luego:

$$A = \sqrt{8(8-5).(8-5).(8-6)} = \sqrt{8.3.3.2} = \sqrt{144} = 12$$

Siempre repasa cada paso, verifica y critica la solución.

Una vez que crees haber alcanzado la solución debes preguntarte:

-¿He resuelto el problema?

-¿Estará bien?

-¿El resultado obtenido es lógico, en el contexto del problema?. ¿Contradice en algo lo expresado en el enunciado?

Leo otra vez el problema y me fijo que se pedía el área, por lo tanto, he resuelto el problema.

Me fijo si lo que obtuve no contradice el problema, pero no encuentro contradicciones pues los valores son positivos y posibles.

Me falta verificar la ecuación que resolví usando el perímetro, lo hago ahora:

$16 = 5+5+6$

$16=16$

Reviso la fórmula de Herón por si la copié mal.

Hago otra vez los cálculos que resuelven el área y todo está bien.

Entonces la respuesta sería:

"El área del triángulo isósceles dado es 12 cm^2"

Ahora resuelve el siguiente problema.

Se quiere averiguar cuántos años tienen Camila y Sofía. Lo único que se sabe es que Sofía le lleva 10 años a Camila y que la suma de sus edades es 80 años. Responde: ¿cuál es la edad de cada una de ellas?

EXPRESIONES ALGEBRAICAS + ACTIVIDADES

*"La mejor forma de no aprender matemática
es esquivar las dificultades cada
vez que se presentan".*

1) Expresa en lenguaje simbólico los siguientes enunciados:
   a) La mitad de la diferencia de un número y otro.
   b) El perímetro de un hexágono regular.
   c) El área de un triángulo de lados x, y, z.
   d) El cuadrado de un número, aumentado en 2.
   e) El cuadrado, de un número aumentado en 2.

2) Escribe al menos tres expresiones equivalentes a las dadas.

a) m + a =	c) a (m + c) =	e) m + 2 m =
b) t =	d) b : a =	f) x + x =

3)

a) Escribe la expresión algebraica que corresponde al perímetro de un cuadrado de lado 7y + 2. Responde: ¿cuánto vale el perímetro si y = 2?

b) Escribe la expresión algebraica que corresponde a la mitad de la diferencia entre el doble de un número x y 10. Determina el valor numérico de la expresión algebraica si x = 4.

c) Escribe la expresión algebraica que corresponde a la amplitud del ángulo interior desigual de un triángulo isósceles sabiendo que los otros dos miden w. Contesta: ¿cuál sería la amplitud del ángulo interior desigual cuando w es igual 22°15´?.

a) Responde:

i) ¿cuál es el menor valor numérico que puede tener la expresión |2w + 10| y para qué valor de w?

ii) ¿cómo serán todos los valores numéricos de la expresión – t^2? ¿Por qué?

b) Escribe tres expresiones equivalentes a: 0,25x

c) Enuncia tres expresiones coloquiales que se correspondan con la expresión algebraica dada en el inciso anterior.

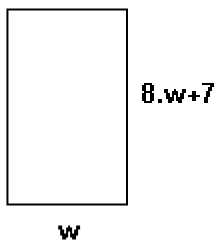
4) Reduce las siguientes expresiones algebraicas:

a) $7s - s =$ b) $5(w-1) + 5w=$ c) $8q - 16:2 - 4q + 2 =$ d) $2s-1+6s-3=$

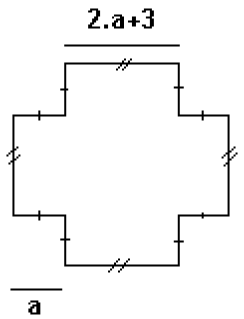
e) $5x^3.x^5 =$ f) $3(x + x + x) =$ g) $\frac{14-7x}{7} = \; =$ h) $\frac{8x-10}{2} + 3 - 2x =$

5) Escribe las expresiones algebraicas correspondientes al perímetro y al área de cada una de las siguientes figuras (todos los ángulos convexos determinados en los vértices de las figuras son rectos):

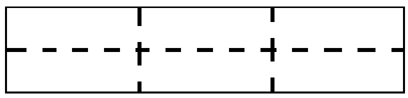
a)



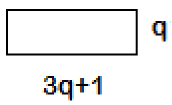
b)



c)



sabiendo que



6) Coloca una cruz en ☐ para indicar cuál es la expresión simbólica que corresponde al enunciado (puede haber más de una):

a) La suma entre un número y su cuádruplo

☐ $x + 4$ ☐ $x + x^4$ ☐ $x + 4x$ ☐ $5x$

b) El producto de dos enteros consecutivos

☐ $x. x$ ☐ $x(x + 1)$ ☐ $x . x + 1$ ☐ $x^2 + x$

c) La diferencia entre la mitad de un número y 8

☐ $x:2 + 8$ ☐ $x:2 - 8$ ☐ $(x - 8):2$ ☐ $8 - x:2$

7) Sabiendo que :

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + a.b + b.a + b^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$

podemos calcular fácilmente algunos cuadrados, observa:

52^2 = (50 + 2). (50 + 2) = 50. 50 +2. 50+ 50 . 2 + 2. 2 = 2500+100+100+4 = 2704.

Halla tú mismo: 1010^2.

8) Dibuja una figura geométrica que sirva para interpretar cada igualdad, explica con tus palabras la relación entre la figura y la expresión algebraica.

a) $2w \,.\, w = 2w^2$ b) $5.(x+1) = 5x + 5$ c) $2q + 2(q-1) = 4q-2$

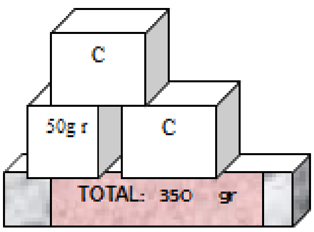
Responde:

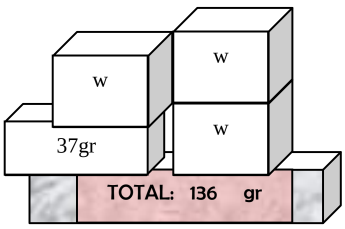
a) ¿podemos asegurar que la expresión algebraica x^3 para cualquier valor de x es siempre mayor que cero?, ¿y con respecto a x^2 , se puede asegurar que para cualquier valor de x, es siempre mayor que cero?
b) ¿podemos asegurar que la expresión algebraica x^3 para cualquier valor de x es siempre mayor que x^2?
c) ¿cuántos valores numéricos se pueden hallar en la expresión algebraica 6.x + x?

9) Realiza operaciones sucesivas, a cada expresión algebraica, hasta obtener la variable correspondiente.

a) $7(y+1)$ b) $8-(w-1)$ c) $6-3x+2$ d) $9-2(d-1)$ e) $\dfrac{4q-16}{4}$ f) $1+\dfrac{25a-15}{5}$

10) Averigua el peso de cada paquete.

a) 

b) 

11) a) Verifica que x = -7 es solución de la ecuación $-5.(x+3) + 2.(x-4) = -2x - 16$

b) Verifica que x = -7 es solución de la ecuación $2x - 2(x - 4) + 12 = 5.(-3 - x)$

c) Responde, ¿cómo son ambas ecuaciones? Demuestra por qué.

12) Halla el conjunto solución en Z de cada ecuación y verifica, cuando sea posible:

a) $13 = 2a + 7$

b) $2(e + 4) = 4(e-3)$

c) $5-d = -(d+5)$

d) $2 - (7 - z) = 10$

e) $(30 - 15q):5 = 3q$

f) $(4x-6): 2 = x - 3$

g) $2m+1=3(m+3)-8-m$

h) $6x-2(x+1)=4x$

i) $-5.(x+2) + \sqrt[3]{-8} = 2(x+1)$

j) $5^{36}:\left(5^{7}\right)^{5} = \frac{3b-12}{3}$

k) $\frac{6-x}{-5} = 0$

l) $2.(m+3) - 3m = -m-5$

m) $-w-w-3^{2} = 1-2(w+5)$

n) $\frac{7-x}{-2} = 0$

o) $-3.(x-2) + 6 = 2(x+1)$

p) $\frac{5b-10}{5} = 8^{36}:\left(8^{7}\right)^{5}$

q) $4.(m+3) - 3m = m-5$

r) $-3^{2} - 2(a-3) = -a-a-3$

s) $|x| + 8 = 10$

t) $7+|a| = 3$

u) $|x-1| = -4$

v) $\sqrt[3]{\frac{1-k}{5}} = 0$

w) $\frac{\sqrt{x+3}}{4} = -2$

x) $(x+3)^{3} + 3 = -5$

y) $32 = 2x^{4}$

z) $\sqrt[5]{a-5} + 6 = 5$

13) Despeja la letra indicada en cada expresión.

a) $a . x = b$	despejar x
b) $x + m = b$	despejar m
c) $3(x + m) = -9$	despejar x
d) $a . x + 5b = b$	despejar x
e) $3x + m : 4 = b$	despejar m
f) $3(2x + m) = 9$	despejar x
g) $e : t = v$	despejar t

RAPIDITOS

Escribe una ecuación que:

a) no tenga solución.
b) tenga infinitas soluciones.
c) tenga solución en el conjunto de los números enteros.
d) tenga dos soluciones.

RECREO

¡Papá, papá!, ¿me haces el problema de matemáticas?

-No hijo, no estaría bien.

-Bueno, inténtalo de todas formas.

14) Una pieza de tubería de 12 cm. Se corta en dos tramos. Uno de ellos es 4 cm más largo que el otro. Determina la longitud que tiene cada tramo.

15) En un paralelogramo un lado supera en 1 cm al doble del lado consecutivo. Si el perímetro del paralelogramo es 20 cm, responde: ¿cuánto mide cada lado?

16) Por las últimas lluvias se inundaron los campos vecinos a un pueblo. Para hacer frente al desastre, los vecinos aportaron las bombas de achique de sus botes para extraer el agua acumulada; se armaron tres grupos que trabajaron en total 540 hs. El primer grupo trabajó todo lo que pudo, el segundo trabajó el triple de tiempo que el primero, y el tercero, el doble de los otros dos juntos. Constesta: ¿cuánto tiempo trabajó cada uno de los grupos?

17) La suma de tres números consecutivos es igual a la suma del doble del menor de esos números y 20. Determina esos tres números.

18) Encuentra tres enteros impares consecutivos tales que la suma del primero más dos veces el segundo más tres veces el tercero sea 82.

19) En una universidad, el costo total de la matrícula más hospedaje es \$ 350. La matrícula cuesta \$70 más que el hospedaje. Responde: ¿cuál es el valor de la matrícula?

Dile a tu compañero que sume tres números encolumnados en casilleros contiguos, de la siguiente hoja de un almanaque cualquiera y que te diga el resultado.

Hay estrategias para determinar con certeza qué números ha elegido. Trata de encontrar un procedimiento para esto.

20) En un triángulo ABC, $ACB = 2CAB + 12^{o}$ y $ABC = 35^{o}$.

a) Halla la amplitud de BAC y de BCA.

b) Clasifica al triángulo ABC según sus lados y según sus ángulos.

21) Un padre de 42 años tiene tres hijos, de 9, 11 y 14 años. Responde:

a) ¿al cabo de cuánto tiempo la edad del padre será igual a la suma de las edades de sus hijos?

b) ¿cuánto tiempo tendrá que pasar para que la suma de las edades de los hijos dupliquen a la edad del padre?

22) El costo de un curso privado de avión cuesta \$ 950. El adiestramiento en el manejo de la aeronave cuesta \$ 350 más que la instrucción en tierra. Constesta: ¿cuánto cuesta cada uno de los adiestramientos?

Responde

a) Dos ángulos complementarios, son uno el triple del otro, ¿cuál es la amplitud de cada uno de ellos?

b) ¿Cuánto mide cada ángulo interior en un pentágono regular? ¿y cada ángulo exterior del mismo?

c) ¿Existe un número que al multiplicarlo por 4 y restarle 12 de lo mismo que primero restarle cuatro y luego multiplicarlo por 3?

23) Al sumar los años de nacimiento de Alberto, Bernardo, Claudia y Daniela se obtuvo 7925. Alberto y Bernardo nacieron el mismo año, Claudia es dos años menor que Alberto y Daniela es un año más pequeña que Claudia. Responde,¿en qué año nació cada uno y qué edad tendrán el 31 de diciembre del presente año?

24) Calcula los cinco números múltiplos de nueve consecutivos que al ser sumados dan como resultado 4905.

25) Camila pesaba 6kg más que Julia. Después de la dieta pesan 2kg menos cada una. Ahora juntas pesan 94kg. Determina el peso de cada una antes de comenzar la dieta.

26) El perímetro de un triángulo isósceles es de 42cm. Calcula la longitud de cada lado, si el lado desigual es el triple de la diferencia entre la medida del otro lado y 6cm.

27) Juan y Rodrigo deciden ahorrar para comprarse una guitarra eléctrica. Si Juan reunió el triple de dinero que Rodrigo, y entre los dos reunieron $2040, contesta: ¿cuál es el aporte de cada uno?

28) En una reciente elección entre cuatro candidatos hubo 7219 votos. El ganador superó a sus rivales por 37, 41 y 63 votos. Determina cuántos votos obtuvo cada candidato.

29) Calcula tres números múltiplos de ocho consecutivos, tal que al ser sumados dan como resultado el número 384.

30) Un padre tiene 45 años y el hijo 15años. Contesta: ¿al cabo de cuántos años la edad del padre será igual a dos veces la del hijo?

31) En un cuadrilátero ABCD, los ángulos interiores miden:

$D\hat{A}B$ = x+20 $A\hat{B}C$ = x + 50 $B\hat{C}D$ =2x+60 y $C\hat{D}A$ = x + 70

a) Calcula el valor de x

b) Calcula la amplitud de cada ángulo

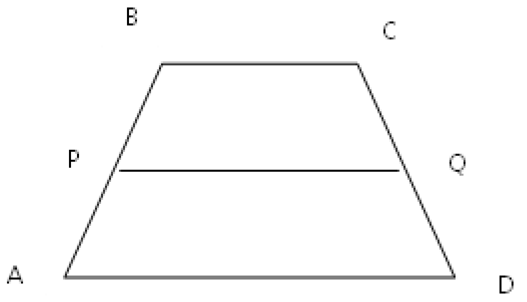
c) Responde: ¿de qué cuadrilátero se trata?

32) Si ABCD es un romboide y $\overline{AB}$ =2x-8cm ; $\overline{CB}$ =x+2cm ; $\overline{CD} = \overline{AB} + 3cm$, encuentra las medidas de sus lados y su perímetro.

Plantea todas las posibilidades.

33) En el paralelogramo ABCD $\overline{AB} = x + 2\ cm$, $\overline{BC} = 2x + 4\ cm$, $\overline{CD} = 2x - 3\ cm$. Calcula su perímetro.

34) Sabiendo que:



$\overline{AB} = x$

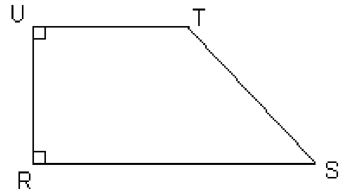
$\overline{CD} = x5$

$\overline{PQ} = 2x$(base media)

Calcula $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{PQ}$

35) Resuelve planteando una ecuación y justifica cada paso:

Datos:



Amplitud $R\hat{S}T = X + 10^{\circ}$

Amplitud $S\hat{T}U = 2X + 20^{\circ}$

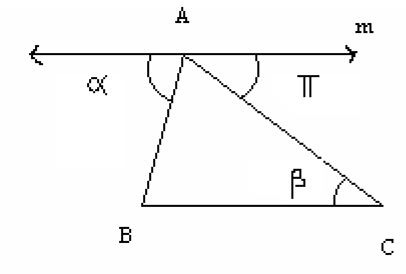
$\overline{UR} = \overline{UT}$ = 3 cm

a) Halla la amplitud de los ángulos interiores $S\hat{T}U$ y $R\hat{S}T$, del trapecio rectángulo URST.

b) Calcula aproximadamente la medida de $\overline{RT}$.

c) Halla la amplitud de los ángulos interiores del triángulo RTS.

36) Halla la amplitud de los ángulos interiores del triángulo ABC. Justifica cada paso.



Datos:

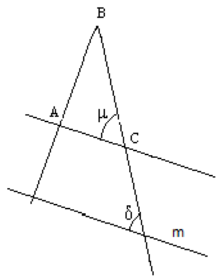
$\hat{\alpha}$ = 2 x – 7º

$\hat{\pi}$ = x + 22º

$\hat{\beta}$ = 42º 36´

m // $\overline{BC}$

37) Halla la amplitud de los ángulos interiores y el perímetro del triángulo ABC. Justifica cada paso.



Datos:

*El triángulo ABC es isósceles.

* $\overleftrightarrow{m}$ // $\overline{AC}$

*La medida del lado desigual $\overline{AC}$ es 5 cm.

* $\hat{\delta}$ = 2x+5º

* $\hat{\mu}$ = 3x-15º

38) En un polígono regular se sabe que un ángulo interior tiene una amplitud de 135°, responde ¿cuántos lados tiene?

39) En un heptágono se sabe que tres ángulos tienen la misma amplitud, y los otros cuatro tienen la amplitud de los anteriores aumentada en 1°. Determina la amplitud de cada ángulo.

Capítulo 5 Números Racionales

Los números han surgido a lo largo de la historia por la necesidad que ha tenido el hombre de contar, de medir y de repartir, entre otras. Los primeros números que se utilizaron fueron los naturales, sin embargo, estos números no son suficientes para representar todas las situaciones cotidianas. Por ello, se dio el surgimiento de otros números como los enteros, los racionales, etc.

Por ejemplo, la necesidad de utilizar fracciones al querer representar que la cantidad de grano de una producción llenó la mitad del granero; es muy difícil expresarlo si sólo se pueden utilizar números naturales, lo mejor es expresarlo como ½ .

Para repartir y medir, fue necesario que el hombre creara los números racionales. En la antigüedad se usó el concepto de fracción en diversas culturas.

Los egipcios, usaban fracciones con numerador uno. Cuando necesitaban fracciones con numerador distinto de 1, lo expresaban "combinando" dos fracciones de este tipo; por lo tanto, si querían expresar un número como ¾, escribían ½ y ¼.

Como este tipo de problemas se les presentaba con frecuencia, existían unas tablas de consulta, en las cuales los resultados ya estaban calculados.

El registro más antiguo y el mejor texto escrito en el que se revelan los conocimientos matemáticos, es el Papiro Rhind. En 1858 un escocés, A. Rhind visitó Egipto por motivos de salud y compró en Luxor el papiro que actualmente se conoce como papiro Rhind o de Ahmes, encontrado en las ruinas de un antiguo edificio de Tebas. Actualmente se conserva en el Museo Británico de la ciudad de Londres. Consiste en series de problemas y de ejemplos con sus soluciones en donde una de las cuestiones son las operaciones con fracciones. El papiro mide unos 6 metros de largo y 33 cm de ancho. Representa la mejor fuente de información sobre matemática egipcia que se conoce. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en el año 1650 a.C. Se ha indicado que podría ser un documento con claras intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno.
http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

➢ *NÚMEROS RACIONALES*

El conjunto Q de los números racionales, está formado por todos aquellos números que se pueden expresar como fracción.

$\frac{a}{b}$ es una fracción sí y solo sí $a \in Z \wedge b \in Z \wedge b \neq 0$

Ejemplos:

1,6 es un número racional porque 1,6 = 8:5 = $\frac{8}{5}$

4 es un número racional porque 4 = 4:1 = 8:2 = (-16):(-4)

-½ es un número racional porque -½ = 1: (-2) = (-1): 2

0 es un número racional porque 0 = 0 : 8 =0 : (-15) = $\frac{0}{5}$

Recuerda:

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción:

a es el numerador y
b es el denominador.

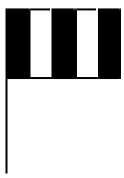
Busca un recorte periodístico donde aparezca el uso de los números racionales. Describe la situación.

➢ *APLICACIONES DE UNA MISMA FRACCIÓN EN DISTINTOS CONTEXTOS*

Una fracción representa un número racional, y éste puede aparecer en diferentes contextos. Veamos algunos de ellos, asociados al número racional $\frac{3}{5}$.

Ejemplo 1:

Las $\frac{3}{5}$ partes del banderín son negras.



El “ todo ” que se fracciona es la unidad o entero.

Ejemplo 2:

$\frac{3}{5}$ de los alumnos de 1er año aprobaron matemática, es decir: 3 de cada 5, o bien, 6 de cada 10 o 60 de cada 100 alumnos de 1er año, aprobaron matemática. Es decir el 60% de los alumnos de 1er año, aprobaron matemática.

Ejemplo 3:

Juan recorrió $\frac{3}{5}$ de un camino de 60km de longitud. Por lo tanto, Juan recorrió 36Km.

$\frac{3}{5}$ del camino = 36 km, pero $\frac{3}{5} \neq 36$

Ejemplo 4:

$\frac{3}{5}$ es la probabilidad de extraer un caramelo de menta de una bolsa donde hay, 3 caramelos de menta y 2 de chocolate.

<u>Definición clásica de probabilidad:</u>

La probabilidad de que un determinado suceso ocurra se puede definir como:

Probabilidad de un suceso = $\frac{\text{N° de casos favorables}}{\text{N° de casos posibles}}$

Ejemplo 5:

$\frac{3}{5}$ es el resultado de la división –3: (-5)

Ejemplo 6:

$\frac{3}{5}$ es la expresión fraccionaria del número decimal 0,6.

Enrique caminó 1/5 del camino a su casa en diez minutos y 2/5 más del camino en 15 minutos. Teresa su compañera de colegio, en cambio, caminó 2/5 del camino a su casa en diez minutos y 1/5 más del camino en 15 minutos. Responde: ¿puedes concluir que ambos recorrieron la misma cantidad de metros al cabo de 25 minutos?

....
....
....
....

➢ ***FRACCIONES EQUIVALENTES***

–5 es un número racional porque se lo puede expresar como la división de dos números enteros:

$$-5=\frac{-10}{2}=\frac{40}{-8}=\frac{-15}{3}$$

Observa que:

$$-\frac{7}{3}=\frac{7}{-3}=\frac{-7}{3}$$

$$-\frac{7}{3}\neq\frac{-7}{-3}$$

Observemos que $-\frac{10}{2}$; $-\frac{40}{8}$ y $-\frac{15}{3}$ son algunas fracciones que representan un mismo número racional.

Las fracciones que representan un mismo número racional se llaman **equivalentes**.

Ejemplo:

$\frac{30}{20}=\frac{9}{6}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}=1{,}5$ Son todas fracciones equivalentes porque todas representan el mismo número racional.

➢ *AMPLIFICACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES*

Para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada, se multiplica o divide el numerador y el denominador por un mismo número entero distinto de cero y de uno. En el primer caso, cuando multiplicamos estamos amplificando y en el segundo caso, cuando dividimos, estamos simplificando dicha fracción.

Ejemplos:

Una amplificación de $-\frac{7}{3}$ es $-\frac{14}{6}$ pues $\frac{-7.2}{3.2}=-\frac{14}{6}$

Una simplificación de $\frac{12}{24}$ es $\frac{4}{8}$ ya que $\frac{12:3}{24:3}=\frac{4}{8}$

> Entre todas las fracciones que son equivalentes a un mismo número racional, se distingue, aquella en donde el máximo divisor común entre el numerador y el denominador es 1, es decir, es una fracción que no se puede simplificar. A esta fracción se la llama irreducible.

1) Amplifica para que todas las fracciones tengan el mismo denominador.

$$-\frac{2}{4};\ \frac{5}{2};-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{8}$$

2) Halla la fracción equivalente irreducible a:

a) $\frac{12}{9}$ b) $-\frac{21}{28}$ c) $-\frac{24}{32}$ d) $\frac{100}{25}$

3) Responde: ¿las fracciones $\frac{6}{9}$ y $\frac{8}{12}$ son equivalentes? ¿y las fracciones $-\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$?

➢ *EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL*

Para obtener la expresión decimal de un número racional a partir de su forma fraccionaria, se divide el numerador por el denominador. Por ejemplo:

$\frac{7}{8}$ = 0,875 pues: 70 | 8 60 0,875 40 0	$-\frac{15}{10}$ = -1,5pues: 15 | 10 50 1,5 0	$\frac{5}{3} = 1,66.... = 1,\widehat{6}$ pues: 5 | 3 20 1,666... 20 20 2 ...	$\frac{-13}{30} = -0,433.... = -0,4\widehat{3}$ pues: 130 | 30 100 0,433... 100 10 ...
Expresión decimal finita	Expresión decimal finita	Expresión decimal periódica pura	Expresión decimal periódica mixta

* Si al dividir el numerador por el denominador de una fracción se obtiene resto cero, la expresión decimal del cociente se denomina **expresión decimal finita.**
* Una expresión decimal periódica es aquella que tiene cifras decimales que se repiten indefinidamente. La cifra decimal o el bloque que se repite se llama período. Si todas las cifras decimales se repiten entonces se dice que es una **expresión decimal periódica pura**, de lo contrario se dice **expresión decimal periódica mixta.**

Notación:

1,333... = $1,\widehat{3}$ expresión decimal periódica pura

-12,5363636... = $-12,5\widehat{36}$ expresión decimal periódica mixta

1) Para cada una de las siguientes fracciones, encuentra si es posible, una fracción equivalente cuyo denominador sea una potencia de 10. En todos los casos encuentra la expresión decimal del número racional.

Potencias de 10
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$

a) $\frac{7}{25}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $\frac{4}{20}$ d) $\frac{10}{3}$ e) $-\frac{8}{6}$ f) 0

2) Responde:
a) ¿cómo debe ser el denominador de una fracción irreducible para que pueda obtenerse otra equivalente a ella con denominador que sea potencia de 10?
b) ¿cuál es el período del número racional –2?, ¿ y del número racional 0,15?

> Las fracciones cuyo denominador es una potencia de 10 reciben el nombre de fracciones decimales.
> Sólo las fracciones que son equivalentes a alguna fracción decimal, tienen expresión decimal finita.

Observación:

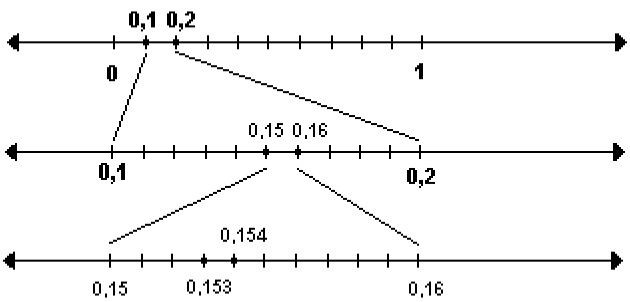
Los números racionales son los números que pueden expresarse como fracción, y en forma decimal, tienen expresión decimal finita o periódica.

Recíprocamente si un número decimal tiene expresión decimal finita o periódica es un número racional, es decir puede expresarse como fracción.

Existen números con infinitas cifras decimales no periódicas, estos números no son racionales, no pueden expresarse como fracción, se llaman **números irracionales**.

- ***DENSIDAD DE “Q”***

¿Cuántos números racionales hay entre 0,1 y 0,2? Observemos:



¿Qué otros números racionales son mayores que 0,1 y menores que 0,2?

……………………………………………………………………………………………

Entre dos números racionales existen infinitos racionales, por eso decimos que es un conjunto **denso**. Como consecuencia de esto no puede hablarse de números racionales consecutivos en una ordenación creciente o decreciente.

Responde: ¿el conjunto de los números enteros es denso?

……

………

➢ *APROXIMACIONES*

En muchas situaciones resulta absurdo, innecesario o poco práctico considerar todas las cifras decimales de un número decimal. En estos casos, se omiten ciertas cifras con determinados criterios y así se hace una aproximación del número.

Ejemplos:

1) Hay 19 personas esperando ser alojadas en un hotel. Si se desocupan 5 habitaciones y se dispone alojarlas de manera que en todas las habitaciones haya la misma cantidad de personas. Contesta: ¿cuántas personas se podrán alojar en cada habitación?
   Respuesta: Si bien 19:5 = 3,8 la respuesta al problema será 3 personas por habitación. Las 4 personas restantes deberán esperar a que se desocupen más habitaciones.

2) Si se desea pintar una pared de 6m de ancho por 3m de alto y se sabe que se necesitan 0,4 litros de pintura por m^2, responde: ¿cuántos litros de pintura se tendrán que comprar si se sabe que ésta viene fraccionada en tarros de 1 (un) litro?
   Respuesta: Como se necesitarán 7,2 litros de pintura, se deberán comprar 8 tarros.

3) Si se desea pagar una compra de \$250 en tres cuotas sin intereses. Determina cuánto se deberá abonar en cada cuota.
   Respuesta: Como 250: 3 = $83,\widehat{3}$ y el dinero se fracciona por centavos, se deberá abonar \$83,33 en cada cuota.

4) Como sabes el número π es irracional y su expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas, esto implica que al operar con él siempre se llegará a un resultado aproximado. ¿Recuerdas qué aproximación hacías del número π cuando debías calcular el perímetro de una circunferencia de radio r?

   ……………………………………………………………………………………………………….

   Si sólo tomaste un dígito detrás de la coma, se dice que es una aproximación a los décimos; si consideraste dos dígitos detrás de la coma es una aproximación a los centésimos y con tres será a los milésimos.

Si se necesita aproximar un número al entero, a la décima, centésima, etc., si el contexto del problema lo permite, se pueden utilizar los siguientes criterios:

Por truncamiento: directamente se eliminan las cifras siguientes a la última que se quiere considerar.

Por redondeo: Si la cifra que se encuentra a la derecha de la posición elegida para aproximar:

* **es mayor que 5** se suma uno a la cifra anterior, y se eliminan todas las cifras siguientes.
* **es menor que 5** queda igual la cifra anterior, eliminándose las siguientes.
* **es igual a 5** debemos observar si la cifra anterior es par o impar, si es par ésta se mantiene igual y si es impar se le suma uno, y en ambos casos se eliminan las cifras siguientes.

Cada vez que se redondea o trunca un número, se está reemplazando el valor de dicho número por otro valor aproximado.

Ejemplos:

	Aproximación a los décimos		Aproximación a los centésimos	
Número	Redondeo	Truncamiento	Redondeo	Truncamiento
3,29	3,3	3,2	3,29	3,29
1,2358	1,2	1,2	1,24	1,23

Completa:

El número 15,3654 truncado a los centésimos es ……………………………………….

El número 15,3654 truncado a los milésimos es ……………………………………….

El número –3,45596 aproximado por redondeo a los centésimos es ………………..

El número –3,45596 aproximado por redondeo a los milésimos es ………………...

El número –3,45596 aproximado por redondeo a los décimos es ……………………

- ***EXPRESIÓN FRACCIONARIA DE UN NÚMERO RACIONAL***

Si bien la expresión decimal y la expresión fraccionaria son igualmente válidas para representar un número racional, en algunas ocasiones resultará conveniente trabajar con una u otra.

¿Cómo hacemos para obtener la expresión fraccionaria de un número racional expresado en forma decimal?

Veamos algunas demostraciones que permiten encontrar la expresión fraccionaria de un número racional, que está expresado en su forma decimal.

Resolución	Justificación
Suponemos que x es la expresión fraccionaria equivalente al número decimal 1,3	
x = 1,3	
10 . x = 10 . 1,3 10x = 13	Multiplicamos ambos miembros por 10
$\frac{10x}{10}=\frac{13}{10}$	Dividimos ambos miembros entre 10.
$x=\frac{13}{10}$	Así obtenemos la fracción equivalente a 1,3

Resolución	Justificación
Suponemos que x es la expresión fraccionaria equivalente al número decimal $0,\widehat{5}$	
x = $0,\widehat{5}$	
10 . x = 10 . $0,\widehat{5}$ 10x = $5,\widehat{5}$	Multiplicamos ambos miembros por 10
10x - x = $5,\widehat{5}$ - $0,\widehat{5}$	A la expresión anterior le restamos miembro a miembro la igualdad original.
9 . x = 5	Se opera cada miembro
$\frac{9x}{9}=\frac{5}{9}$	Dividimos ambos miembros entre 9.
$x=\frac{5}{9}$	Así obtenemos la fracción equivalente a $0,\widehat{5}$

- **Expresión decimal finita a fracción**: la fracción correspondiente tendrá por numerador al número formado por todos los dígitos de la expresión decimal y por denominador a una potencia de 10 cuyo exponente coincide con la cantidad de cifras decimales.
- **Expresión decimal periódica a fracción:** la fracción correspondiente tendrá por numerador la diferencia entre el número formado por los dígitos no periódicos seguidos del período y el número formado por los dígitos no periódicos. Y por denominador, el número formado por tantos nueves como cifras decimales periódicas y tantos ceros como cifras decimales no periódicas tiene la expresión decimal dada.

Ejemplos:

a) $-1,13=-\frac{113}{100}$

b) $0,01=\frac{1}{100}$

c) $0,\widehat{3}=\frac{3}{9}$

d) $1,5\widehat{3}=\frac{153-15}{90}=\frac{138}{90}$

e) $0,10\widehat{21}=\frac{1021-10}{9900}=\frac{1011}{9900}$

f) $-2,1\widehat{26}=-\frac{2126-21}{990}=-\frac{2105}{990}=-\frac{421}{198}$

g) $2,\widehat{536}=\frac{2536-2}{999}=\frac{2534}{999}$

1) Expresa el número racional en su forma fraccionaria irreducible:

a) $0{,}3$ b) $-1{,}41$ c) $0{,}\widehat{2}$ d) $1{,}1\widehat{5}$ e) $4{,}12$

2) Expresa el número racional en su forma fraccionaria irreducible, luego divide el numerador y el denominador.

a) $0{,}\widehat{9}$ b) $-2{,}\widehat{9}$ c) $1{,}3\widehat{9}$ d) $-7{,}2\widehat{9}$ e) $-0{,}10\widehat{9}$

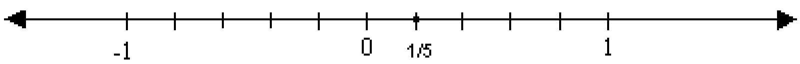
3) Observando los resultados de la actividad 2) extrae conclusiones.

- ***REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES. ORDEN EN Q.***

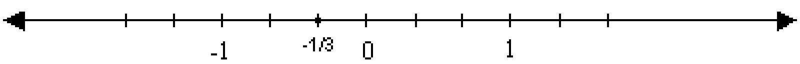
Para representar un número racional en la recta numérica es conveniente, en primera instancia, expresarlo en su forma fraccionaria irreducible o como número mixto, si es posible.
Dicha expresión fraccionaria indica que debemos dividir a la unidad en tantas partes como lo indica el denominador y tomar, a partir del entero, tantas como indica su numerador.

Ejemplos:

a) $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$



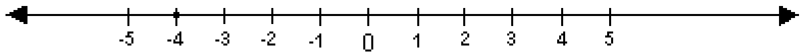
b) $-0{,}\widehat{3} = -\frac{1}{3}$



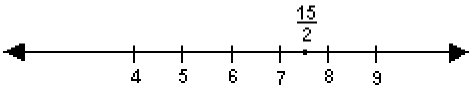
Los números racionales anteriores se encuentran entre 0 y 1 y entre –1 y 0, ya que los numeradores de sus fracciones son menores que sus denominadores, en valor absoluto.
En los casos donde los numeradores de la fracción, superan al denominador, conviene preguntarnos entre qué enteros se encuentra la misma, para responder a esta pregunta es útil expresar a la fracción como número mixto.

Número mixto $1{,}3 = \frac{13}{10} = 1\frac{3}{10}$

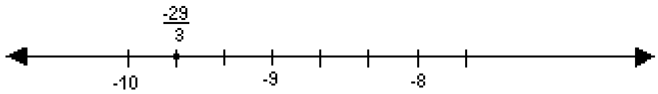
c) $-\frac{8}{2}$ = -4



d) $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$



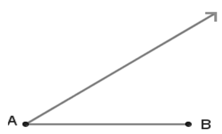
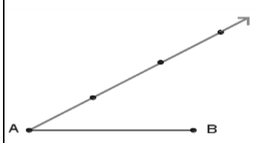
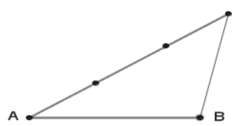
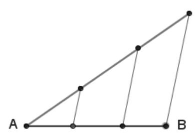
e) $\frac{-29}{3} = -9\frac{2}{3}$



En los ejemplos anteriores tuvimos que subdividir la unidad en partes iguales.
Dado el segmento unidad ¿cómo podemos subdividirlo en partes iguales?

……

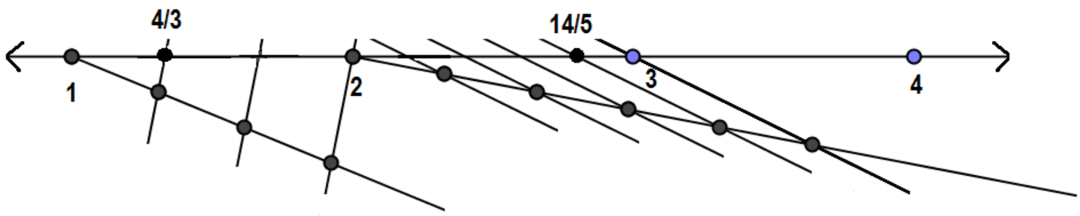
A continuación se presenta un método geométrico con el que podemos subdividir un segmento en la cantidad de partes iguales que necesitemos.
Veamos los pasos del método con un ejemplo:

Dividir el segmento AB en 3 partes iguales.	Con origen en el extremo A del segmento, se traza una semirrecta, en cualquier dirección.	Tomando como unidad <u>cualquier medida</u>, se marcan en la semirrecta 3 de estas unidades a partir del punto A.	Se une el punto B con el último punto marcado sobre la semirrecta.	Por cada uno de los puntos en la semirrecta se trazan rectas paralelas al segmento del paso anterior. Los puntos obtenidos en el segmento AB determinan las 3 partes iguales en que éste se divide.
				

TEN EN CUENTA

Este procedimiento también puede realizarse desde el extremo B del segmento dado.

Apliquemos el método para representar 4/3 y 14/5 en la recta numérica:



1) Representa en la recta numérica:

a) -2/5 b) 3,2 c) 13/3 d) -3/2 e) -4/2 f) $-2,\widehat{3}$ g) $5,\widehat{6}$

2) Ordena de menor a mayor el siguiente conjunto de números racionales:

$\frac{3}{5}$; -0,6 ; -2/3 ; 2,4 ; $2\frac{3}{10}$; -1/2 ; $0,4\widehat{3}$; 5/12

Explica el procedimiento que empleas.

RECUERDA

* El módulo o valor absoluto de un número racional es la distancia de dicho número al cero.
* Dos números racionales distintos son opuestos si están a la misma distancia del 0, en la recta numérica.
* Un número racional es mayor que otro si el punto que lo representa en la recta numérica horizontal está a la derecha de aquél.

➢ ***OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES***

Silvina está diagramando su jardín. Ella pretende que la quinta parte de él, tenga lilas, las dos quintas partes jazmines, la décima parte especias aromáticas y el resto césped. Si dispone de $60m^2$, necesita saber:

-¿Qué parte del jardín destinará a las plantas florales?

-¿Qué parte destinará a las especias y al césped?

Silvina averiguó los siguientes precios en el vivero:

* El metro cuadrado de césped $10

*Cada planta de jazmín cubre ½ m^2 y cuesta $4,5

*Cada plantín de lilas cubre 1/8 m^2 y cuesta $0,7

*Cada plantín de diferentes especias cubre $1/8m^2$ y cuesta $0,8

¿Cuánto le costará armar su jardín?

A resolver estas cuestiones….

Revisa como operabas con racionales positivos

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Ejemplos: a) si los denominadores son iguales $\frac{7}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$ (el denominador se mantiene y se suman y restan los numeradores)

b) si los denominadores son distintos $-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=-\frac{10}{15}+\frac{3}{15}-\frac{1}{15}=-\frac{8}{15}$

(se reemplazan las fracciones, por otras equivalentes, para que todas tengan el mismo denominador y se procede como en el inciso a)

Resuelve:

a) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=$ b) $-\frac{7}{10}-0,1=$ c) $1,\widehat{3}-\left(-\frac{1}{9}\right)=$

d) $0,02-(-3)=$ e) $\frac{5}{3}+0,2=$ f) $1,1\widehat{2}-\left(-\frac{1}{90}\right)+2=$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Ejemplos

a) $\frac{5}{8}.\left(-\frac{4}{6}\right)=-\frac{5.4}{8.6}=-\frac{20}{48}=-\frac{5}{12}$ para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí .

b) $\frac{8}{9}.\frac{27}{16}=\frac{8.27}{9.16}=\frac{1.3}{1.2}=\frac{3}{2}$ en muchos casos antes de multiplicar numeradores y denominadores entre sí es conveniente simplificar, en el caso de ser posible, cualquiera de los numeradores con cualquiera de los denominadores.

Resuelve y expresa el resultado como fracción irreducible:

a) $\frac{3}{8}.0,6=$ b) $-2,\widehat{6}.\frac{3}{2}=$ c) $3.\frac{1}{8}.0,\widehat{5}=$ d) $(3+0,2).\frac{5}{4}=$

- ***INVERSO MULTIPLICATIVO***

Para todo número racional **q** distinto de cero, existe otro número racional, llamado inverso multiplicativo o recíproco de **q,** tal que al ser multiplicado por **q** da por resultado 1.

En símbolos: Si $q \in Q \wedge q \neq 0$; $\frac{1}{q}$ es el inverso multiplicativo de q

Ejemplos:

a) El inverso multiplicativo de 2 es $\frac{1}{2}$ ya que 2.$\frac{1}{2}$ = 1

b) El inverso multiplicativo de $-\frac{5}{4}$ es $-\frac{4}{5}$ ya que $-\frac{5}{4}.\left(-\frac{4}{5}\right)=1$

DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Para dividir un número racional por otro número racional distinto de cero, multiplicamos al dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.
Ejemplos:

a) $\frac{2}{3}:\frac{6}{5}=\frac{2}{3}.\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$

b) $2:\left(-\frac{1}{4}\right)=2.(-4)=-8$

1) Resuelve y expresa el resultado como fracción irreducible:

a) $-\frac{1}{8}:0,25=$ b) $-1,\overset{\frown}{6}:(-0,\overset{\frown}{9})=$ c) 3:(-0,5)= d) $\frac{5}{4}:(-5)=$

2) Verifica que el inverso multiplicativo de un número racional q diferente de cero, puede expresarse como 1/q.

3) Resuelve y expresa el resultado como fracción irreducible:

a) $1,\overset{\frown}{2}\ .\ 9-\left(-\frac{1}{2}\right)=$ b) $\left(\frac{13}{16}.\frac{8}{26}\right):0,25=$ c) $\left(-\frac{1}{3}+0,\overset{\frown}{1}+\frac{3}{36}\right).36=$

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES DE EXPONENTE ENTERO

Al operar con números racionales se mantiene la definición y las propiedades para la potenciación de números enteros.

1) Resuelve aplicando propiedades de la potenciación. Expresa el resultado como una única potencia.

$(-7)^8 . (-7)^2 =$

$\left[(-2)^3\right]^5 =$

$0,2^{10} : 0,2^6 =$

$(-5)^{100} : (-5)^{51} =$

$\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}\right]^2 : (-\frac{1}{3})^{20} =$

$\left[(-0,\overset{\frown}{6}).\left(-0,\overset{\frown}{6}\right)^{13}\right]^2 : (-0,\overset{\frown}{6})^{10} =$

Analicemos ahora el siguiente ejemplo:

$$\frac{5^2}{5^4}=\frac{5.5}{5.5.5.5}=\frac{5}{5}.\frac{5}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}=1.1.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$$

y aplicando la propiedad de división de potencias de igual base

$$\frac{5^2}{5^4}=5^{2-4}=5^{-2}$$

De donde decimos que: $5^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^2$, aquí $\frac{1}{5}$ es el inverso multiplicativo de 5

Una potencia de base racional, distinta de cero, y exponente entero es igual a otra potencia cuya base es el inverso multiplicativo de la base dada y cuyo exponente es el opuesto del exponente dado.

En símbolos: Si $a \in Q \wedge a \neq 0 \wedge n \in Z : a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$

Ejemplos:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{5}{4}\right)^{-3}=\left(-\frac{4}{5}\right)^{3}$	$(-5)^{-1}=-\frac{1}{5}$	$(-3)^2=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{5}=\left(\frac{4}{3}\right)^{-5}$

El signo negativo en el exponente no significa que cambia de signo la base:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}$$

Los paréntesis son importantes:

$$\frac{3^2}{2}\neq\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$-2^4\neq(-2)^4$$

1) Calcula:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$ b) $(1,\overset{\frown}{2})^2 =$ c) $(-0,1).(-0,1)^5 =$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^6 =$

2) Resuelve:

a) $2^{-3} =$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} =$ c) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} =$ d) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2} =$

e) $\left(\frac{9}{5}\right)^{-1} =$ f) $1,2^{-1} =$ g) $0,3^{-3} =$

RADICACIÓN EN Q

La radicación en Q se define del mismo modo que en Z.

Si a $\in Q \wedge n \in N \wedge n > 1;\ \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$
si n es par, se considera $b \geq 0$

1) Calcula si es posible:

a) $\sqrt{\frac{1}{4}} =$ b) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} =$ c) $\sqrt[3]{0,027} =$ d) $\sqrt[3]{-\frac{2}{16}} =$

e) $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} =$ f) $\sqrt{0,\overset{\frown}{1}} =$ g) $\sqrt[4]{-0,0016} =$ h) $\sqrt[3]{-0,064} =$

i) $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

2) Completa el cuadro con las propiedades de las operaciones en Q que se encuentra al finalizar la sección “Nº racionales + actividades”. Escribe un contraejemplo para cada una de las propiedades que no se verifican.

➢ *NOTACIÓN CIENTÍFICA*

La notación científica es muy usada en ciencias como la astronomía, la química, la microbiología, la física, en las cuales se trabaja con números de muchas cifras ya sea porque se trata de números muy grandes o muy pequeños.

> Un número está expresado en notación científica cuando está escrito como el producto, entre un número cuyo módulo es mayor o igual a 1 y menor a 10, por una potencia de 10.

Algunos ejemplos:

Sucesos	En notación científica
Distancia entre la Tierra y el Sol 150.000.000km aproximadamente.	$1{,}5.10^{8}$km
El peso de una molécula de Hidrógeno 0,000000000000000000000348gr	$3{,}48.10^{-22}$gr
Distancia que recorre la luz en un año 9,5billones de km aproximadamente	$9{,}5.10^{12}$km
La masa de un protón es 0,0000000000000000000000000016727kg	$1{,}6727.10^{-27}$kg
La edad de una persona de 13 años en segundos es 4919616000	$4{,}92.10^{9}$seg. aproximadamente
Una hora es la 0,000114155 parte de un año	$1{,}14.10^{-4}$ aproximadamente

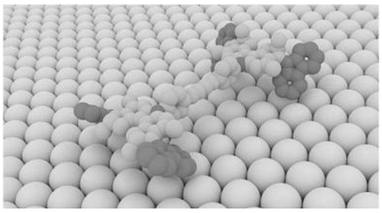
Completa la siguiente tabla:

Medida de:	Nº escrito en notación decimal	Nº escrito en Notación científica
Masa de la Tierra	5.983.000.000.000.000.000.000.000kg.	…........... Kg
Diámetro del Sol	…...............................km.	$1{,}391 \cdot 10^{6}$ km.
Tamaño de un microbio	0,000004 cm.	…....... cm.
Tamaño de un virus	…................... cm.	$2 \cdot 10^{-8}$ cm.

Tamaño de lo glóbulos Rojos	…....................mm.	$7{,}5 \cdot 10^{-6}$ mm.
Tamaño de una bacteria	0,0000002 mm.	…........mm.
Diámetro del ADN	…............................. mm.	$2 \cdot 10^{-9}$ mm.
Diámetro de un Protón	0,000000000000001 mm.	…......... mm.

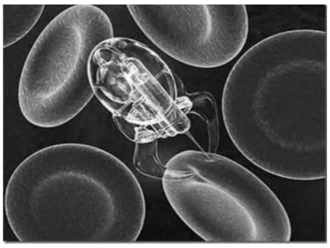
El nanómetro es la unidad de longitud que equivale a una mil millonésima parte de un metro. O equivale a la millonésima parte del milímetro.
El prefijo 'Nano' significa una mil millonésima parte. Recientemente la unidad ha cobrado notoriedad en el estudio de la nanotecnología, área que estudia materiales que poseen dimensiones de unos pocos nanómetros.
El símbolo del nanómetro es nm.

El auto más pequeño del mundo
La nanotecnología impulsa al auto más pequeño del mundo. Investigadores holandeses crearon un coche del tamaño de una molécula (6 nanómetros aproximadamente), que es impulsado mediante un nanomotor.



Fuente: http://mexico.cnn.com/tecnologia/2011/11/20/la-nanotecnologia-impulsa-al-auto-mas-pequeno-del-mundo

Nanorobots
La nanorrobótica se refiere a la ingeniería nanotecnológica del diseño y construcción de nanorobots. Éstos actuarán en distintos escenarios, tanto biomédico como tecnológico. En la nanomedicina se están haciendo prototipos de nanobots que ingresen al cuerpo humano, manipulen nanocomponentes del organismo y que en el futuro prometen ser capaces, por ejemplo, de reconocer células enfermas y aniquilarlas.



Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Nanobot
http://boulevardscience.com/el-meravilloso-mundo-de-los-nanorobots/

➢ *ECUACIONES EN Q*

Como recordarás, en el capítulo IV trabajamos con ecuaciones cuyo conjunto solución estaba definido en los números enteros (los estudiados hasta ese momento), ahora podemos trabajar con ecuaciones donde el conjunto solución está definido en los números racionales.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Para resolver ecuaciones transformamos, la ecuación a resolver, en otras más sencillas que tengan el mismo conjunto solución, estas ecuaciones se dicen equivalentes.

PROPIEDAD UNIFORME:

- Si en una ecuación se suma o se resta un mismo número o una misma expresión algebraica entera en ambos miembros de la igualdad, se obtiene una ecuación equivalente.
- Si en una ecuación se multiplican o dividen ambos miembros por un mismo número (distinto de cero), se obtiene otra ecuación que es equivalente a la original.

1) Halla el conjunto solución y verifica.

a) $a+2=1,\overset{\frown}{2}$ b) $2x-\frac{1}{2}=0,6-x$ c) $\frac{1-x}{3}+1=6$

d) $\frac{1}{2}w+1=0,3+w$ e) $1,\overset{\frown}{3}.(3-d)+3=\frac{d-5}{3}$ f) $\frac{5x+3}{2}-0,5=10.(2+0,25x)$

La propiedad de factor común. Ejemplo: $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)x$

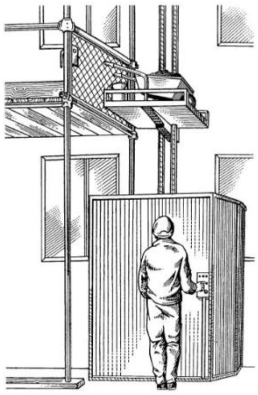
2) Plantea el siguiente problema a través de una ecuación y resuélvelo. Un edificio dedicado a viviendas consta de una planta baja para locales comerciales cuya altura es de 2,80m, cinco pisos todos ellos de igual altura y el sexto piso un departamento especial , cuya altura es los de la de los otros pisos. Sabiendo que el edificio en total mide 18,30m, calcula la altura de los pisos primero al quinto.

3) Ecuaciones y medicina. El crecimiento de un feto humano de más de 12 semanas se puede determinar aproximadamente mediante la fórmula:

L= 1,52 t - 6,5 donde L es longitud del feto en cm y t la edad en semanas.

Calcula la edad aproximada de un feto entre 28,3 cm y 30,4 cm de longitud.

➢ *INECUACIONES EN Q*



Un montacargas puede resistir un peso máximo de 1000kg. Un trabajador necesita descargar en el 7mo piso, bolsas de cemento que pesan alrededor de 50kg cada una. ¿Cuál será el número de bolsas que puede cargar consigo el trabajador si éste pesa 85kg?

Si denominamos x al número de bolsas de cemento, entonces una expresión que describe el problema es:

$$50.x + 85 \leq 1000$$

* La expresión simbólica que describe el problema es una **inecuación**, en ella aparecen elementos desconocidos o incógnitas relacionados mediante una desigualdad.
* Resolver una inecuación significa determinar el conjunto de valores de la o las incógnitas, para los cuales la inecuación dada es verdadera. Dicho conjunto se denomina **conjunto solución**.
* Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraica.

Para resolver inecuaciones transformamos, la inecuación a resolver, en otras más sencillas que tengan el mismo conjunto solución, estas inecuaciones se dicen equivalentes.

➢ *PROPIEDADES DE LAS INECUACIONES*

Partiendo de la desigualdad: $-2 < 6$, observemos otras que se generan de operar a ambos miembros de la desigualdad dada, por un mismo número.

$-2 \mathbf{+3} < 6 \mathbf{+3}$	$-2 \mathbf{-3} < 6 \mathbf{-3}$
$-2 \mathbf{.3} < 6 \mathbf{.3}$	$-2 \mathbf{:3} < 6 \mathbf{:3}$
$-2\mathbf{.(-3)} \mathbf{>} 6 \mathbf{.(-3)}$	$-2 \mathbf{:(-3)} > 6\mathbf{:(-3)}$
$-2 \mathbf{.0} = 6 \mathbf{.0}$	

Como vemos no siempre que operemos en ambos miembros de una desigualdad por un mismo número, el sentido de la desigualdad se mantendrá.

Para obtener el conjunto solución de una inecuación (de igual forma que en las ecuaciones) es conveniente transformarla en otras equivalentes más sencillas. Para ello se aplican las siguientes **propiedades de equivalencia**:

- ∗ Si a ambos miembros de una inecuación se suma o se resta un mismo número o una misma expresión algebraica entera se obtiene otra inecuación que es equivalente a la original.
- ∗ Si se multiplican o dividen ambos miembros de una inecuación por un mismo número positivo, se obtiene otra inecuación que es equivalente a la original.
- ∗ Si se multiplican o dividen ambos miembros de una inecuación por un mismo número negativo y <u>se invierte el sentido de la desigualdad</u>, se obtiene otra inecuación equivalente a la original.

Resolvamos el problema inicial:

$$50x + 85 \le 1000$$
$$50x + 85 - 85 \le 1000 - 85$$
$$50x \le 915$$
$$\frac{50x}{50} \le \frac{915}{50}$$
$$x \le 18,3$$

Signos
a<b “ a menor que b” o “b mayor que a”
a>b “ a mayor que b” o “b menor que a”
a $\le$ b “a menor o igual a b” o “b mayor o igual que a”
a $\ge$ b “ a mayor o igual que b o “ b menor o igual que a”

El conjunto solución de la inecuación son todos los números racionales menores o iguales a 18,3.
Lo simbolizamos: S = $\{x \in Q \wedge x \le 18,3\}$

La respuesta al problema será: El trabajador podrá cargar como máximo 18 bolsas de cemento en el montacargas.

1) Resuelve las siguientes inecuaciones en racionales:

a) $-3x + \frac{3}{2} < 2.\left(x + \frac{1}{2}\right)$ b) $-2,\widehat{6} - t \ge 2t + \frac{1}{3}$

2) Resuelve y responde:
   a) ¿Cuáles son los números que verifican que su triple, aumentado en 15 es mayor o igual a su cuádruple?
   b) El perímetro de un triángulo no supera los 45cm. Cada lado mide 2cm más que el siguiente. ¿Cuáles pueden ser las medidas de los tres lados, si se sabe que son números naturales?
   c) Con 11,2 litros de agua alcanza para llenar 7 botellas iguales, pero no para llenar 8 de esas botellas. ¿Qué puedes afirmar de la capacidad de esas botellas?

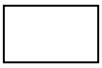
NÚMEROS RACIONALES + ACTIVIDADES

"La matemática es esencialmente resolver problemas, y no es matemático quien sabe mucho de matemática sino quien frente a la dificultad sabe usarla" L. Santaló

1) Indica como fracción qué parte representa:
   a) Un trimestre en el año.
   b) 15 minutos de una hora
   c) 2 dm de un metro.

2) Tengo 2 manzanas para repartir en partes iguales entre 3 niños, ¿cuánto le doy a cada uno?

3) Un agricultor cosechó 11tn de naranjas en 25 días, ¿cuánto cosechó por día?

4) Se borraron 2/3 de un rectángulo y quedó  ¿Podés reconstruirlo?

5) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño nazca un día que empieza con la letra M?

6) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño nazca en invierno?

a) Si a y b son dos números enteros positivos o negativos, responde: ¿cómo es la fracción $\frac{0}{a}$ con respecto a la fracción $\frac{0}{b}$? Justifica tu respuesta.

b) Explica con claridad porque $\frac{2}{4}$ y $\frac{-2}{-4}$ representan el mismo número racional

c) Escribe por lo menos 3 expresiones que representen el número racional –5.

d) Escribe la expresión algebraica que permite hallar el 15% de x.

e) Contesta: ¿si de una tela se cortan 6 pedazos iguales y se usan sólo 2, de qué otra forma se hubiese podido cortar la misma tela para usar la misma cantidad?

7) Encuentra el valor de la letra, si es que existe, para que se dé la igualdad:

a) $\frac{a}{7} = -2$ b) $\frac{s}{-3} = \frac{24}{9}$ c) $\frac{12}{20} = \frac{3}{w}$ d) $-7 = \frac{7}{z}$

8) Justifica si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.

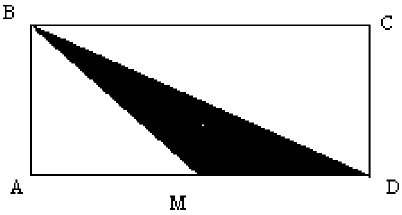
a) Las fracciones –5/3 y –20/12 son equivalentes ya que a la primera se la ha multiplicado por 4.

b) Existe una única fracción que expresa el número 1,3 y es 13/10.

c) –2/3 y 4/9 son fracciones equivalentes

d) $\frac{-6}{9}$ no es equivalente a $\frac{4}{-6}$

9) Si M es punto medio de AD, responde: ¿qué parte del rectángulo ABCD representa la parte sombreada?



10) Dada la siguiente sucesión de números:

$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$

a) Completa los dos términos que siguen en la sucesión.

b) Si n es la posición de cada elemento de la sucesión, es decir para n= 2 el elemento es $\frac{1}{4}$, responde: ¿qué número le corresponderá a n = 9?

c) Contesta: ¿puedes encontrar la fórmula que genera los números de la sucesión?, de ser así, ¿cuál es?

d) Responde: ¿qué sucede con los términos de la sucesión a medida que n es cada vez más grande?

11) Dada la siguiente sucesión de números:

$\frac{3}{5}; \frac{9}{5}; \frac{27}{5}; \ldots$

a) Completa los dos términos que siguen en la sucesión.

b) Si n es la posición de cada elemento de la sucesión, es decir para n= 2 el elemento es $\frac{9}{5}$, determina qué número le corresponderá a n = 8.

c) Contesta: ¿puedes encontrar la fórmula que genera los números de la sucesión? De ser así, ¿cuál es?

d) Responde: ¿Qué sucede con los términos de la sucesión a medida que n es cada vez más grande?

Responde:

a) ¿Si el denominador de una fracción es un número par y su numerador es un número impar, podemos asegurar que dicha fracción es irreducible?
b) ¿Hay alguna fracción equivalente a 0 que no tenga numerador 0? ¿Por qué?
c) ¿Cuáles son los posibles valores de x tal que |x| = 0,7?

12) Escribe las cinco primeras cifras decimales de cada uno de los siguientes números, clasifica cada expresión decimal.

0,35 $\quad 3,\widehat{2} \quad 1,2\widehat{7} \quad -1,21$ $\quad$ 1,25

13) Sin hallar la expresión decimal de cada número racional indica si ésta es decimal finita o periódica. Justifica tu respuesta.

a) –8 $\quad$ b) $\dfrac{17}{60}$ $\quad$ c) $\dfrac{88}{25}$ $\quad$ d) $-\dfrac{903}{31}$

14) Encuentra tres números racionales entre $\dfrac{1}{3}$ y 0,4

15) Dado los siguientes números racionales:

a) –12,1458 $\quad$ b) 0,089 $\quad$ c) 500,96 $\quad$ d) $\dfrac{1}{3}$ $\quad$ e) $-\dfrac{9}{8}$

i) Aproxima redondeando a los centésimos.
ii) Aproxima truncando a los décimos.
iii) Aproxima redondeando a los milésimos.

a) Responde: ¿cuál es el mayor número entero menor que –25/3?
b) Contesta: ¿cuál es el menor número entero mayor que 14/5?
c) Escribe un número que redondeado a los décimos, truncado a los centésimos o redondeado a los milésimos siempre de el mismo número.
d) Si un número racional(con tres cifras decimales) es redondeado a los centésimos y su aproximación es 1,23. Determina cuál es el mayor y cuál es el menor valor que puede tomar dicho número.

16) Las siguientes representaciones corresponden solamente a tres números racionales diferentes. Coloca en columna las que corresponden a un mismo número.

3/2 3,2 1,5 6/4 6/10 1,49999... 16/5 0,6 $16.\frac{1}{5}$ $3.\frac{1}{5}$

32/10 60% $1\frac{1}{2}$ $3{,}1\overset{\frown}{9}$ 150% $1{,}5\overset{\frown}{0}$ $0{,}5\overset{\frown}{9}$ $1{,}4\overset{\frown}{9}$

17) Responde: ¿qué número es necesario sumarle a $0{,}3\overset{\frown}{5}$ para obtener 2 enteros?

Escribe una fracción irreducible que:

a) su denominador sea 6 y sea menor que 2
b) su denominador sea 3 y sea mayor que –5
c) su denominador sea 7 y sea menor que –2

18) Representa en una recta numérica:

a) $-17{,}\overset{\frown}{9}$ b) 7/8 c) $5{,}\overset{\frown}{4}$ d) -2,3

19) Contesta: ¿puedes ubicar el 0 y el 1 en esta recta sabiendo que los puntos marcados corresponden a los números que se indican? Explica tu procedimiento.

20) Responde: ¿cómo son los números –0,3 y $\frac{9}{30}$ por qué?

21) Representa en una misma recta numérica los números $1{,}\overset{\frown}{2}$ y 0,5.

22) Indica con >, < o =

a) $\frac{2}{3}$ .....1 b) $-\frac{12}{5}$ .... $-\frac{20}{10}$ c) $\frac{5}{12}$ ...... $\frac{7}{16}$ d) $-\frac{17}{6}$ ...... $\frac{15}{6}$

23) Un viajero, transitando de una ciudad a otra, recorre en la primera hora de viaje 3/8 del camino total y en la segunda hora 2/5 de él. Determina en cuál de ellas ha viajado a mayor velocidad.

24) En un curso de 35 alumnos, 7 no aprobaron la evaluación de matemática. La misma evaluación se tomó en un curso de 48 alumnos y no aprobaron 9 de ellos. Responde: ¿en qué curso hubo mejor rendimiento?

RAPIDITOS

a) Matías comió la mitad de su paquete de caramelos de menta y Fernanda comió un cuarto de su paquete de caramelos de chocolate. Determina quién comió más.
b) Escribe todas las fracciones irreducibles con denominador 4, comprendidas entre -1 y 1.
c) Responde: ¿cuál de las fracciones es mayor $-\frac{2}{3}$ o $-\frac{5}{4}$? ¿Cuánto?
d) Si $a,b,c \in Z^{+} \wedge b > c$, contesta: ¿cómo es a/b con respecto a a/c?
e) Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

   I. -5/3 es un número racional

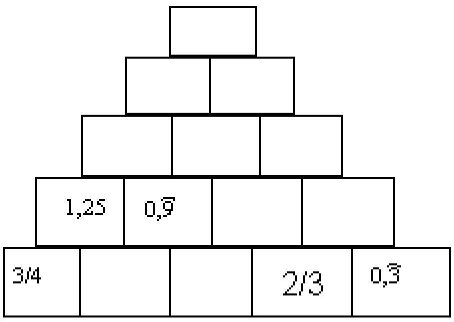
   II. $2,1\widehat{3} = \frac{213}{9}$

   III. Toda fracción que no puede expresarse como otra equivalente, con denominador potencia de 10, tiene expresión decimal periódica.

25) Realiza el cálculo exacto de las siguientes operaciones.

a) $-0,2+\frac{1}{3}=$	b) $\frac{3}{6}-\frac{1}{5}=$	c) $2,\widehat{3}+0,5=$	d) $0,\widehat{9}+\frac{2}{7}-(-0,8)=$
e) $\frac{1}{6}.10=$	f) $\frac{5}{7}.\frac{28}{2}=$	g) $3.2,\widehat{1}=$	h) $-\frac{6}{8}.(-5,6)=$
i) $\frac{13}{9}:\left(-\frac{26}{18}\right)=$	j) $0,7:0,\widehat{7}=$	k) $-0,2:(-\frac{8}{5})=$	l) $-10:\frac{8}{5}=$

26) En la siguiente pirámide numérica cada nueva "piedra" resulta de sumar las dos que están debajo de ella. Complétala.



27) Determina cuales de las siguientes expresiones racionales son equivalentes:

I) a) $\frac{2+3}{2}$ b) $\frac{2}{2}+3$ c) $\frac{2}{2}+\frac{3}{2}$ d) $\frac{4+6}{4}$

II) a) $\frac{19.47}{-7}$ b) $\frac{19}{-7}.\frac{47}{-7}$ c) $\frac{19}{-7}.47$ d) -19 $\frac{47}{7}$

28) Resuelve sabiendo que m y s son números racionales distintos de cero.

a) $m.\dfrac{m}{s} =$ b) $\dfrac{m}{s}.s^2$ c) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}} =$

29) Al efectuar una división se tomó el dividendo por divisor y se halló el resultado 0,0032. Responde: ¿cuál es el verdadero resultado?

30) Encuentra un número racional *a* tal que:

a) $\dfrac{1}{a}$ sea igual a 2 b) 3.*a* sea racional negativo c) $\dfrac{1}{4}.a$ sea igual a 8

d) $-\dfrac{3}{a}$ sea un número comprendido entre -1 y 0

31) Divide la menor fracción positiva irreducible de denominador 4 por la mayor fracción negativa irreducible de denominador 2.

32) a) Completa la tabla y las conclusiones debajo

	a:0,25	a: 0,5	a: 1,25	a: 1,5
a = 100				
a = -300				

*Si $a \in \mathbb{Q}^+ \wedge 0 < b < 1 \Rightarrow a : b........a$

*Si $a \in \mathbb{Q}^+ \wedge b > 1 \Rightarrow a : b........a$

*Si $a \in \mathbb{Q}^- \wedge 0 < b < 1 \Rightarrow a : b........a$

*Si $a \in \mathbb{Q}^- \wedge b > 1 \Rightarrow a : b........a$

b) Completa con > o <, sabiendo que a $\in \mathbb{Q}^+$ y teniendo en cuenta las conclusiones del inciso a).

a) a.0,25…….a
b) a.2,3…….. a
c) a:0,2…….. a
d) a: (-5)…….a
e) a: (-0,4)…..a

33) Señala la opción correcta:

El número $\left(-\frac{1}{5}\right)^{320}$ es : a) igual a 0   b) mayor que 0   c) mayor que 1   d) menor que -1

34) Escribe dos expresiones equivalentes a las dadas:

a) $\left[(-3)^7\right]^9 =$

b) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-4} =$

35) Calcula aplicando las propiedades de la potenciación. Indica la propiedad aplicada en cada paso

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^{-1} =$

b) $\left(0,\overset{\frown}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 =$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-1} =$

d) $0,1^2 : \left[\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}\right]^{-1} .10^{-3} =$

36) Completa el cuadro con el resultado de cada cálculo, expresado en forma irreducible:

	$a + b$	$a - b$	$-a \cdot b$	$a^{-1} : b$	a^{-2}
a = -3/4 b = 0,3					
a= - 7/3 b= - 6					

Recuerda:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$$

37) Resuelve las siguientes operaciones utilizando las propiedades convenientes en cada caso. Expresa el resultado como fracción irreducible.

a) $\dfrac{1+0,5}{3-\frac{3}{8}.0,6} =$

b) $-\frac{3}{8} : \frac{3}{2} + 3 : \left(1+\frac{1}{2}\right) =$

c) $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{3-\frac{3}{8}:\frac{3}{2}} =$

d) $-2,\widehat{6}.\frac{3}{2} - 3 : (1+0,5) =$

e) $\left[\left(\frac{3}{5}-1\right)^{-1} + 1,\widehat{3}\right].\frac{2}{7} =$

f) $\sqrt{2^3+1} : \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{9}} =$

g) $(2:2^3)^2 . 2^2 - \sqrt[3]{-27} . 0,1\widehat{6} - 0,1\widehat{6} =$

h) $\sqrt[3]{1-7.2^{-3}} + \left(2^3\right)^5 : \left(2^6\right)^3 =$

i) $\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1} - (3+0,2).\frac{5}{4} - 2^{-2} =$

j) $\left[-3+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right] : 3^{-3} =$

k) $-0,\widehat{6} : \sqrt{8:(0,5)^{-1}} + 3:(-2) - \left[\left(\frac{1}{2}-1\right)^{-1}\right]^{-3} =$

l) $\sqrt{\frac{4}{9}} : (-3)^{-1} + (-1)^5 . \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} =$

m) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 . \frac{4}{3} - \frac{20}{21} . \left(-\frac{9}{5}\right) . \left(-\frac{7}{15}\right) + (-2)^{13} . (-2)^{-10} : (-2)^2 =$

a) Responde:

i) ¿Si una potencia con exponente negativo tiene base negativa, entonces el resultado siempre será positivo?

ii) ¿Por qué número se tiene que dividir a 3 para obtener -15?

iii) ¿Todo número racional tiene inverso multiplicativo?

iv) Si un número racional es mayor que 1, entonces ¿entre qué números se encontrará su inverso multiplicativo? ¿Por qué?

b) Explica con claridad por qué el inverso multiplicativo de un número racional es otro con el mismo signo.

38) Escribe en notación científica

a) 0,000000035=

b) 20000000=

c) 0,07. 10^{42}=

d) 320 . 10^{20}=

39) Resuelve y expresa el resultado también en notación científica:

a) 2500000 . 0,0000004: 0,0002 =

b) $\dfrac{40\,.\,0{,}000007\,.\,984000}{0{,}00028\,.\,8000000} =$

40) Ordena en forma creciente las potencias sucesivas de 10, desde 10^{-5} hasta 10^{4}.

41) Ubica entre dos potencias sucesivas de 10 el número 0,00023.

42) Un *año luz* es la distancia que recorre un rayo de luz en un año (365 días). La luz recorre aproximadamente 300000km/s. Responde: ¿a cuántos km equivale un año luz?

43) Los objetos astronómicos más alejados de la tierra que se pudieron detectar hasta 1981 son los quásares 3C427, su distancia a la tierra es alrededor de 1,1. 10^{26}m. Expresa esta distancia en km.

44) Contesta: ¿cuánto tarda la luz en recorrer 1,1. 10^{26}m?

45) La estrella más cercana a la tierra (no el sol) se encuentra a 4300 años luz de distancia. Si un cohete viaja a 9500km/h. Determina cuánto tardaría en llegar de la tierra a dicha estrella.

Escribe el número cuya notación científica es:

I) $-1{,}3.10^{6}$ II) $9{,}5.10^{-8}$ III) $1{,}86.10^{10}$

46) Halla el valor de x que verifica cada ecuación:

I) $-\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}$ II) $x=84-\frac{1}{5}x$ III) $\frac{2}{5}x=10{,}5-x$ IV) $\frac{3}{10}=-\frac{1}{5}x$

V) $\frac{x-1}{3}+1=x+0{,}\widehat{3}$ VI) $4-\frac{3x+1}{4}=1-2{,}5x$

VII) $6-\frac{1}{2}(x+3)=1+0{,}5x$ VIII) $\frac{x+3}{2}=0{,}5x-6$

IX) $\frac{1}{6}(2x+3)-\frac{x-1}{2}=\frac{1}{3}$ X) $-4\left(x+\frac{1}{20}\right)=3x+5^{-2}$

XI) $\sqrt{x-\frac{1}{3}}=4^{-1}$ XII) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x}-(0{,}5)^{-1}=-1$

47) Se iluminaron 2/5 de una Avenida y luego la mitad de la misma. Quedan aún por iluminar 500m. Responde: ¿cuál es la longitud de la Avenida?

48) Un puente colgante atraviesa un río en el punto donde el ancho del mismo es de 420m. El 12% del puente se apoya en la costa izquierda del río y el 18% en la costa derecha. Calcula la longitud del puente.

49) De un tanque lleno de combustible se consume la cuarta parte en el 1er tramo de un viaje y la mitad del combustible que quedaba en el tanque, en el segundo tramo. En el tanque quedan aún 15 litros de combustible. Determina la capacidad total del tanque.

50) En una orquesta escolar, la mitad de los instrumentos son de cuerda, las tres cuartas partes del resto son de viento y hay 5 instrumentos de percusión. Responde: ¿cuántos instrumentos de cada tipo hay?

51) Una persona destinó 1/3 de su sueldo para alquiler, 1/12 para transporte, ¼ para alimentación y 1/6 para diversión. Si ahorró $33,60, determina su sueldo.

52) Un auto mide de largo dos quintos de la longitud de un colectivo. Si se estacionaran uno a continuación del otro, dejando los 50cm reglamentarios entre ellos, ambos ocuparían 11m de largo. Calcula la longitud de cada vehículo.

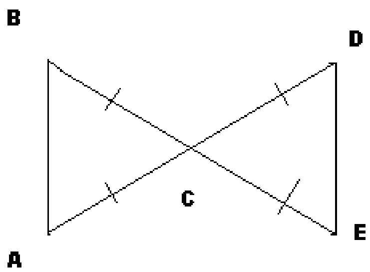
53) Un rectángulo y un cuadrado tienen el mismo ancho pero el largo del rectángulo es 5,5 cm más largo que el cuadrado. Sus perímetros suman 73 cm. Encuentra las dimensiones de cada figura.

54) Un viajante alquiló un auto. Le cuesta $ 19,50 por día más $ 0,18 por milla. Si alquiló el auto un día y pagó $ 33, responde: ¿cuántas millas viajó?

55) Con una rebaja del 15% una campera de invierno cuesta $91,8. Contesta: ¿cuál era el precio anterior?

56) El triple de la edad de Juan más tres cuartos de la misma, menos dos décadas forman un siglo. Determina la edad de Juan.

57) Los $A\hat{B}C$ y $C\hat{D}E$ son isósceles e iguales. Si $\overline{AB}$ es 3/2 de $\overline{CB}$ y el perímetro de toda la figura es 42cm. Responde: ¿cuánto mide $\overline{CB}$?



58) Justifica por qué las siguientes afirmaciones son falsas. Los números a, b y c son números racionales.
   a) Si a = b y b < c entonces a = c.
   b) Si $|a| < |b| \Rightarrow a < b$
   c) Si $b \geq c \Rightarrow \frac{b}{a} \geq \frac{c}{a}$
   d) Si $a < c \Rightarrow a.b < c.b$

59) Dada la ecuación:

a) -5h + 2 < -8 b) 3 (t – 2) < 2 (t – 4)

i) Halla el conjunto de números racionales que verifica:

ii) Indica un número racional, no entero, que la verifica.

iii) Indica un número entero que no la verifica.

60) Determina si x = -2 es solución de la siguiente inecuación 3 (x – 1) + 7 < x + 1

61) I) La siguiente resolución tiene un error, señálalo justificando tu respuesta y luego resuelve correctamente la inecuación

$$2 - 0,5\ x < 1,25$$
$$2 - 0,5\ x - 2 < 1,25 - 2$$
$$-0,5x : (-0,5) < -\ 0,75 : (-0,5)$$
$$x < 1,5$$

II) Explica porque x = ½ no verifica la inecuación.

62) Halla el conjunto solución de cada inecuación.

a) $3 - 0,2\ .(a-3) < \frac{a}{3}$ b) $-3d + 2 > -0,75.\ (d - 1)$ c) $\frac{a-1}{4} + 1 < 3a$

d) $1,3.\ (b - 6) \geq 2 + 5b$ e) $-4\left(w+\frac{1}{20}\right) \geq 3w + 5^{-2}$ f) $0,\widehat{2}x - \sqrt[3]{-216} \leq 6$

63) Resuelve y responde:

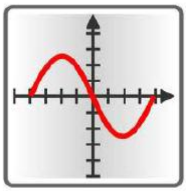
a) Un arquitecto está proyectando una pileta rectangular que no puede ocupar más de la tercera parte de un patio de 8m de frente y 12 m de fondo. Uno de los bordes de la pileta debe ser de 4m. ¿Cuáles son las dimensiones enteras posibles de la pileta?

b) Si se conoce que el lado de un cuadrado es mayor o igual a 4,5 metros y menor a 8 metros, ¿qué se puede afirmar de la variación del perímetro del cuadrado? Y ¿con respecto al área?

c) Andrés necesita comprar unos bidones con fertilizante para su microemprendimiento. Cada bidón cuesta \$50. La empresa que los vende se los envía a domicilio pero le cobra \$15 por toda la compra y no hace envío a domicilio por cinco o menos de cinco bidones. Andrés dispone hasta \$1000 para la compra y desea que se los envíen a domicilio. ¿Cuántos bidones puede comprar Andrés, en esta empresa?

64) Demuestra que el semiperímetro de un triángulo es siempre mayor a cualquier lado del mismo.

Operación	Adición	Sustracción	Multiplicación	División	Potenciación	Radicación
Ley de cierre						
Conmutativa						
Asociativa						
Elemento neutro						
Elemento absorbente						
Elemento inverso						
Distributiva						
Otras						



Capítulo 6 Introducción al concepto de función

Una de las principales preocupaciones de la Edad Media fue el estudio de las cosas en movimiento, preguntas tales como: Cuando lanzamos una piedra al aire, ¿a qué distancia cae?, ¿a qué velocidad?, llevaron a los pensadores de esa época a preguntarse qué variables intervenían en dicha situación y cómo se relacionaban entre sí. En esta idea de dependencia de cantidades variables se encierra la esencia del concepto de función.

Es difícil ubicar el inicio del concepto de función, aunque a lo largo de la historia aparece el tratamiento de problemas y nociones asociadas al mismo. Las primeras evidencias de lo que hoy conocemos como funciones, pueden rastrearse en la antigüedad Así, los babilonios empleaban el concepto de función construyendo tablas para facilitar operaciones aritméticas; los griegos, trabajando con proporciones, o, estableciendo relaciones entre medidas de las cuerda en un círculo; los hindúes utilizando colores para denotar los números. En el siglo XVII queda reflejado en los trabajos de Kepler sobre el movimiento planetario, en los de Galileo sobre dinámica, el uso de representaciones en el plano introducido por Descartes, y los trabajos de Fermat, Newton y Leibnitz.

Las funciones constituyen una poderosa herramienta para analizar, estudiar predecir el comportamiento de fenómenos de la naturaleza, fenómenos sociales, etc.

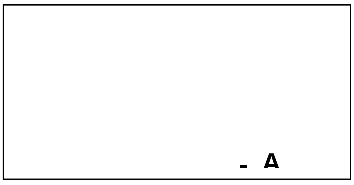
Los ecólogos, los biólogos, los físicos, los químicos, los ingenieros, los economistas, los sociólogos, los arqueólogos las utilizan.

Mediante ellas los científicos elaboran modelos matemáticos para analizar y describir las situaciones que estudian en sus respectivas disciplinas y resolver las cuestiones más variadas; pueden determinar la abundancia o la escasez de una especie, que envase resulta más económico de fabricar entre varios que tengan la misma capacidad, estimar la antigüedad de una pintura, de un fósil etc.

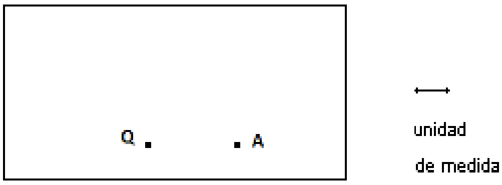
El estudio del concepto de función funda las bases para abordar problemas referidos al cálculo infinitesimal que estudiarás en años posteriores.

➢ ***SISTEMAS DE REFERENCIA***

Supongamos que tenemos un punto A, en un plano y un observador necesita ubicarlo, o sea, idear algún sistema que le permita identificarlo con más precisión.



Para esto, necesita algunos elementos fijos. Estos elementos fijos forman los sistemas de referencia.
Por ejemplo, se fija un punto **Q** y una unidad de medida.

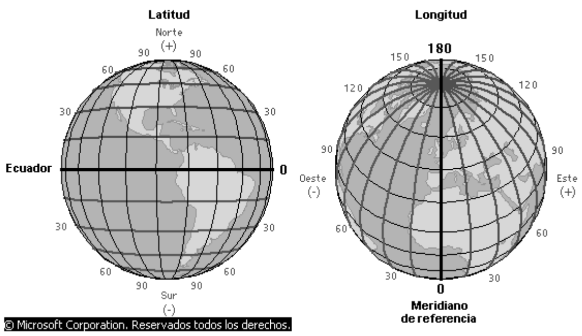


Así se puede ubicar al punto dado **A**, diciendo que se encuentra a 3 unidades del punto Q**.**
Pero hay otros puntos, del mismo plano, que verifican esta condición. Por esto, la ubicación del punto **A** es imprecisa. Para determinar con mayor exactitud un punto en un plano, se necesita fijar otros elementos y tener en cuenta la ubicación del observador. Todos los sistemas de referencia son relativos al observador, o sea, relativos a otros sistemas de referencia.

Un sistema de referencia es un conjunto de convenciones usadas por un observador para poder ubicar objetos en el plano o en el espacio tridimensional.

Veamos algunos sistemas de referencia:

Sistema de Coordenadas geográficas



Uno de los métodos más antiguos de localización de un punto situado sobre la esfera terrestre esta basado en el sistema de coordenadas geográficas. La Tierra, representada aproximadamente por una esfera, se cubre mediante un sistema de círculos máximos que pasan por sus polos. Estos círculos máximos de llaman meridianos.
A partir de la línea que representa el Ecuador (círculo máximo perpendicular a los meridianos y contiene al centro de la Tierra), se trazan círculos de diferentes radios llamados paralelos los cuales son paralelos al Ecuador.
La separación entre meridianos (llamada longitud) y entre paralelos (llamada latitud) se mide en grados, minutos y segundos.
Se considera “meridiano 0” al que pasa por la ciudad de Greenwich, y “paralelo 0” al que coincide con el Ecuador.

El observatorio de Greenwich

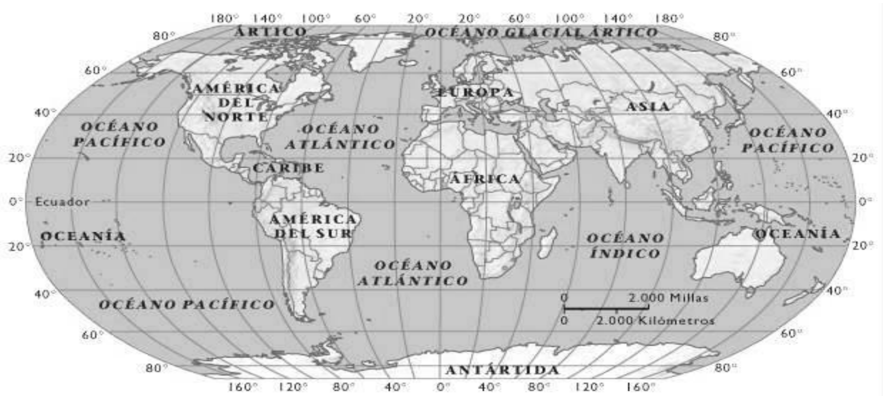
El observatorio en Greenwich se construyó en 1675. Observa la bola en la parte superior del edificio: marca el tiempo y baja a la 1 del mediodía. Una placa en el edificio original señala el punto cero a partir del que se calcula la longitud, es decir, el meridiano cero o de Greenwich (esta decisión fue arbitraria).

Para ubicar la ciudad de Madrid (España) damos sus coordenadas de longitud y de latitud:

Longitud: -3º41´

Latitud:+40º24´

Es decir, Madrid se encuentra a 3º41´ al oeste del meridiano de Greenwich y a 40º24´ al norte del Ecuador. Por eso se acostumbra escribir: 3º41´O, 40º24´N



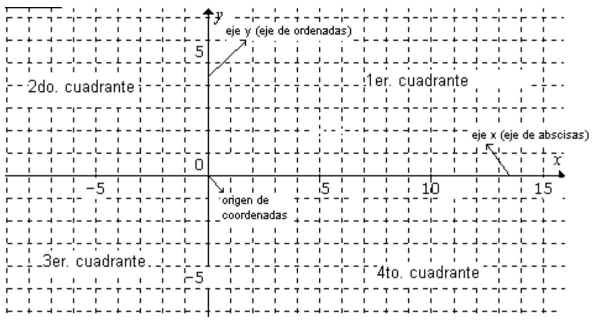
Observa el mapa y completa con el signo y el punto cardinal correcto

Ciudad	Longitud	Latitud
Rafaela (Santa Fe- Argentina)	… 61º 21´….	….31º15´…..
Bogotá (Colombia)	….74°04'…..	….4°35'…..
Sydney (Australia)	…151º10´…..	…..33º 55´……

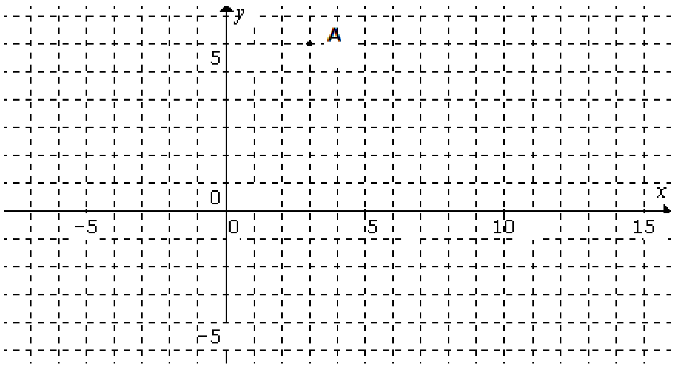
Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano.

En este sistema se fijan dos ejes perpendiculares que dividen al plano en cuatro cuadrantes.

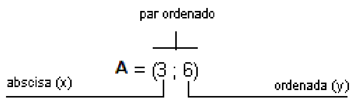
- ∗ El eje horizontal se denomina eje x o eje de abscisas y el eje vertical se denomina eje y o eje de ordenadas.
- ∗ El punto de intersección de los ejes se llama origen de coordenadas.
- ∗ Cada eje puede tener su propia escala, dependiendo de las situaciones planteadas.



Una vez fijado el sistema de referencia cada punto del plano (cualquiera sea) tiene asignado un par ordenado de números que son sus coordenadas: el primero es su abscisa (en valor absoluto es la distancia del punto al eje y) y el segundo es su ordenada (en valor absoluto es la distancia del punto al eje x).



Observa como se indica el punto A en coordenadas cartesianas



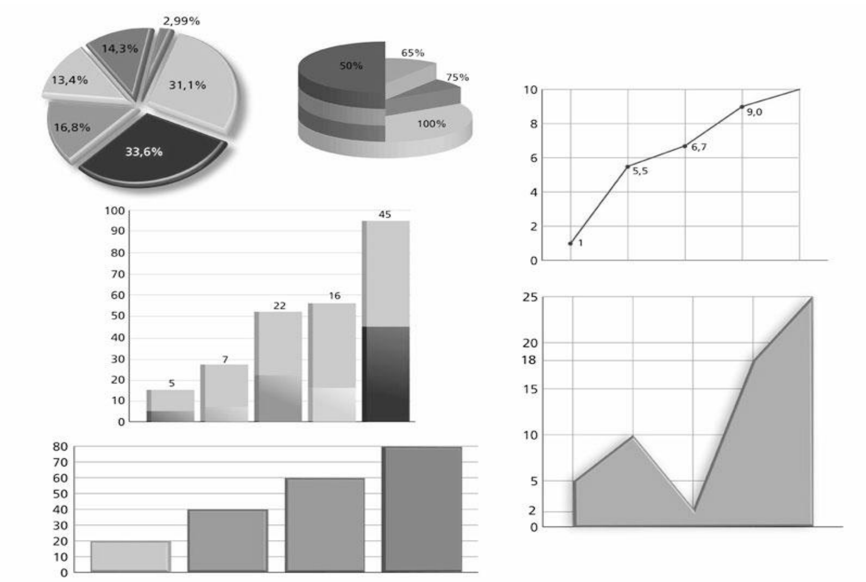
- ∗ Al dar las coordenadas de un punto es necesario respetar el orden del par (por eso se llama par ordenado): primero la abscisa, luego la ordenada.
- ∗ Si un punto está sobre uno de los ejes, la coordenada correspondiente al otro eje es nula.

Ubica en un mismo sistema de coordenadas cartesianas ortogonales los puntos:
(-1;3),(2; -2),(0; -5), (1/2; 0) , (-7; 0,8) y (1; 9/2).

- ***INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS, VARIABLES Y TENDENCIAS***

Los gráficos se usan para representar datos. La representación gráfica permite, más fácilmente, establecer relaciones entre los datos y extraer conclusiones.

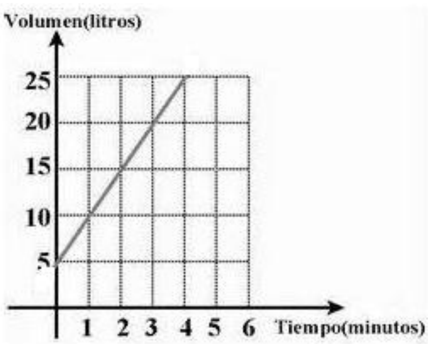
Ejemplos:



Los gráficos que analizaremos en este capítulo, son gráficos en coordenadas cartesianas ortogonales en el plano y en ellos relacionaremos datos (o valores) numéricos.

Ejemplo:

Un tanque de agua que contiene 5 litros, se va llenando según lo indica el siguiente gráfico durante los primeros 4 minutos.



Este tipo de gráfico describe la relación entre dos variables. La variable que se ubica en el eje horizontal se llama variable independiente y la variable que se ubica en el eje vertical se llama variable dependiente. Entre estas dos variables hay una relación de dependencia: la VD depende de la VI.

Para interpretar una gráfica debemos mirarla de izquierda a derecha, observando como varía la variable dependiente a medida que aumenta la variable independiente.

Si observamos el gráfico del ejemplo, podemos decir:

* las variables que intervienen son el tiempo (en minutos) como variable independiente y el volumen (en litros) como variable dependiente.
* entre estas dos variables hay una relación de dependencia: el volumen depende del tiempo.
* las escalas en los ejes son diferentes.
* a medida que aumentan los valores de la variable independiente, aumentan los valores de la variable dependiente.
* si la variable independiente aumenta 1 minuto, la variable independiente aumenta 5 litros. Esta relación se mantiene siempre igual, por esto podemos concluir, que por minuto en el tanque ingresan 5 litros.
* se podría afirmar que si el comportamiento entre las variables no cambia, a los 5 minutos habría 30 litros en el tanque.

Seguimos analizando el ejemplo, responde:

a) a los 6 minutos, ¿cuántos litros habrá en el tanque?
b) ¿cuántos minutos deberán transcurrir para que el tanque tenga en su interior 80 litros?

- ***GRÁFICO CARTESIANO DE UNA RELACIÓN***

Si bien una relación entre dos variables se puede presentar a través de tablas, en lenguaje coloquial o fórmulas, representar éstas en gráficos, generalmente facilita el análisis de la relación.

Ejemplo 1:

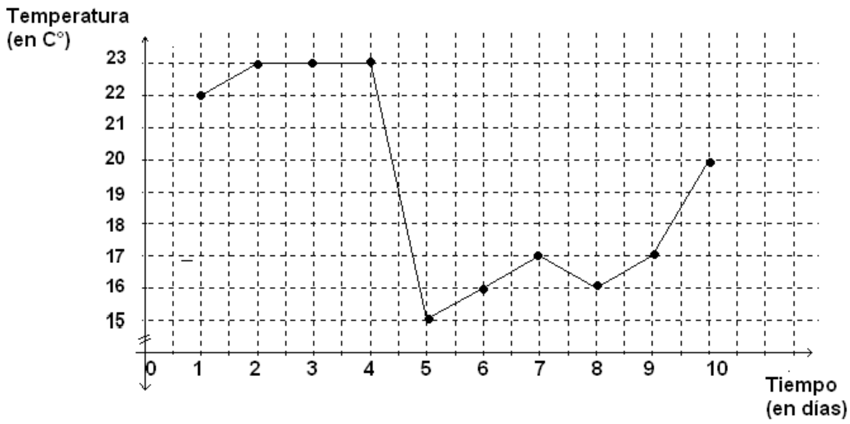
Se registró en una tabla la temperatura promedio máxima esperada en la ciudad de Santa Fe durante 10 días.

Tiempo (días)	Temperatura (en ºC)
1	22
2	23
3	23
4	23
5	15

6	16
7	17
8	16
9	17
10	20

El tiempo (expresado en nº de orden de cada día) y la temperatura (en ºC), son las variables que intervienen en esta situación. Entre estas dos variables hay una relación de dependencia: la temperatura depende del día en que se haga el registro. El tiempo (en días) es la variable independiente; mientras que la temperatura (en ºC) es la variable dependiente.

Para un mejor análisis de lo que sucedió se puede representar la relación en un sistema de ejes cartesianos, donde cada punto del plano (x, y) se corresponde con cada relación observada de la variable independiente (x) y la variable dependiente (y).



Observa las diferentes escalas en los ejes y la marca en el eje de ordenadas.

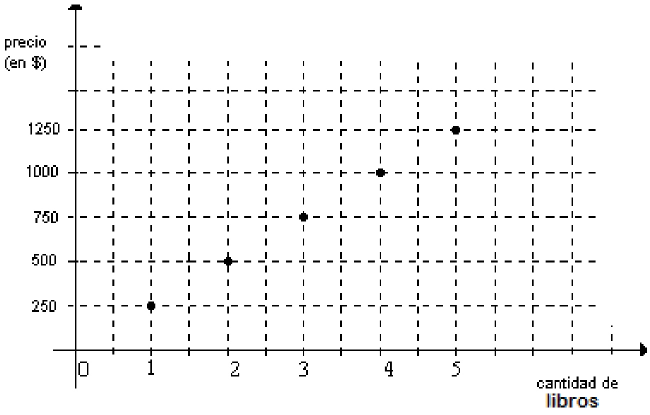
Si bien la relación registrada sólo permitiría graficar puntos aislados (señalados en el gráfico), se puede suponer que al transcurrir el tiempo de un día al otro las temperaturas promedios se van incrementando, manteniendo o decreciendo paulatinamente, por ello se puede realizar un trazo continuo entre dichos puntos (se acuerda el trazo en línea recta).

Es notorio el descenso de la temperatura que se pronostica entre el cuarto y quinto día, como también se observa que a partir de allí la temperatura irá paulatinamente en aumento hasta el séptimo día.

Responde: ¿qué otras lecturas puedes hacer del gráfico?

Ejemplo 2:
Relación entre cantidad de libros y su precio en $.

En este sistema de ejes cartesianos los ejes tienen distintas escalas y hemos marcado puntos aislados pues la cantidad de libros es un número natural (no tendría sentido indicar el precio de ½ libro o el precio de 3,8 libros).



Relación entre la base y la altura de un rectángulo.
Representa en un sistema de coordenadas cartesianas la altura en relación a la base de un rectángulo de 6 cm^2 de superficie.

a) Responde: ¿resulta un gráfico con trazo continuo o con puntos aislados? Justifica tu respuesta.
b) Extrae conclusiones, observando el gráfico.

➢ *INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN*

En una encuesta a 10 familias se les preguntó ¿cuántas personas la conformaban? Y ¿Cuántos televisores había en la casa? Los datos recogidos fueron los siguientes:

Familias	Cantidad de Integrantes	Cantidad de Televisores
f1	2	1
f2	2	0
f3	3	1
f4	4	1
f5	1	1
f6	4	0
f7	4	2
f8	5	3
f9	5	2
f10	5	1

a) Representa gráficamente la relación entre cantidad de integrantes (variable independiente) y cantidad de televisores (variable dependiente), en un sistema de ejes cartesianos.
b) Contesta: ¿qué diferencias y similitudes encuentras con el gráfico del ejemplo 1, de la sección anterior, que relaciona cantidad de libros y su precio en $?

Ejemplo:

Consideremos el conjunto A = $\{x / x \in Z \wedge -3 \leq x < 5\}$ y el conjunto B= $\{y / y \in Z \wedge -2 \leq y < 10\}$ y la relación que a cada elemento del conjunto A le hace corresponder su doble en el conjunto B.

$x \in$ A	El doble de x perteneciente a B
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Analizando la situación anterior, podemos concluir que hay elementos pertenecientes al conjunto A, que no están relacionados con ningún elemento del conjunto B.
En los ejemplos anteriores analizamos relaciones entre dos variables. Cuando relacionamos el tiempo con la temperatura máxima esperada en Santa Fe vimos que a cada día le correspondía una temperatura máxima esperada. También vemos en el ejemplo 1, que no siempre a la misma cantidad de integrantes por familia le corresponde la misma cantidad de aparatos de televisión. En el ejemplo 2, si bien hay elementos del conjunto A que se relacionan con un único elemento del conjunto B, algunos de ellos no están relacionados.
En todos los casos vimos que podemos registrar toda o parte de la información en una tabla, llevar esta información a un gráfico cartesiano eligiendo convenientemente las escalas en cada eje, analizar el conjunto de valores que puede tomar cada variable y ver también si a cada valor de la variable independiente le corresponde uno, varios o ningún valor de la variable dependiente.
Es importante identificar cuándo una relación cumple con una u otra característica de las destacadas anteriormente.

Una relación definida de un conjunto A en otro conjunto B es **función** si, y sólo si, **todos** los elementos del conjunto A se relacionan **una y sólo una** vez con algún elemento del conjunto B.

Por ello podemos concluir que:

* la relación entre el conjunto de los valores del tiempo durante el cual se hicieron los registros (conjunto de valores de la variable independiente) y los valores de la temperatura máxima esperada (conjunto de valores de la variable dependiente) es una función.
* la relación entre el conjunto de los valores correspondientes a la cantidad de libros vendidos (conjunto de valores de la variable independiente) y los precios correspondientes (conjunto de valores de la variable dependiente) es una función.
* la relación entre el conjunto de los valores posibles para la base de un rectángulo de $6cm^2$ de superficie (conjunto de valores de la variable independiente) y la altura correspondiente (conjunto de valores de la variable dependiente) es una función.
* la relación entre la cantidad de integrantes de una familia y la cantidad de televisores que poseen, no es función.
* en el último ejemplo, la relación entre el conjunto A y el conjunto B, no es función.

Establece relaciones entre dos conjuntos, algunas que sean funcionales y otras que no lo sean.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN + ACTIVIDADES

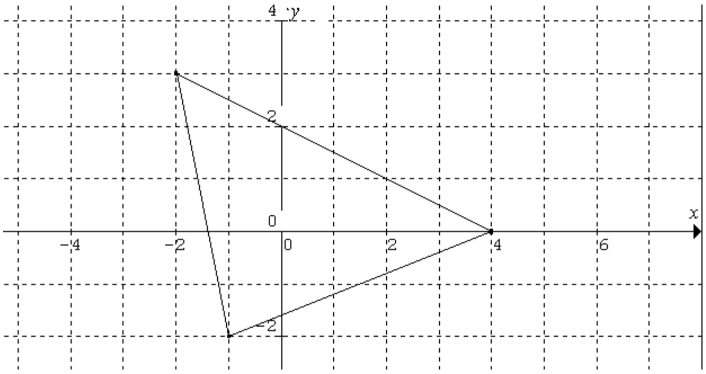
"Pero existe otra razón para la gran reputación de la Matemática: la de que la Matemática ofrece a las ciencias naturales exactas un cierto grado de seguridad que sin ella no podrían alcanzar".
ALBERT EINSTEIN.

1) Ubica en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos:
El punto **A** tiene como abscisa el resultado de -2^{2} y como ordenada el resultado de $(-2)^2$
El punto **B** tiene como abscisa el resultado de $(-1)^0$ y como ordenada el resultado de $-(-1)^2$

En los siguientes ejercicios puedes usar calculadora.

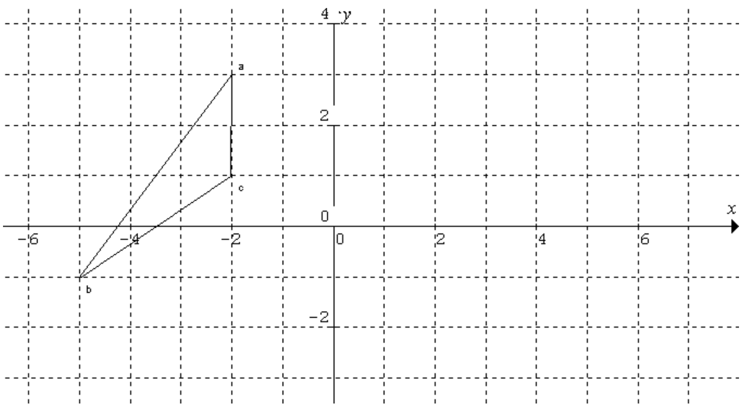
2) Tres vértices de un rombo están en los puntos (5; 2); (1; 3) y (9; 3). Indica la coordenada posible del cuarto.

3) Indica las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo y luego:



a) Halla la medida de longitud de cada lado del triángulo (redondea los resultados a centésimos).
b) Clasifica el triángulo según sus lados
c) Determina si el triángulo es rectángulo.
d) Halla el área del triángulo.

4) Observa el siguiente triángulo en un sistema de coordenadas cartesianas y luego:



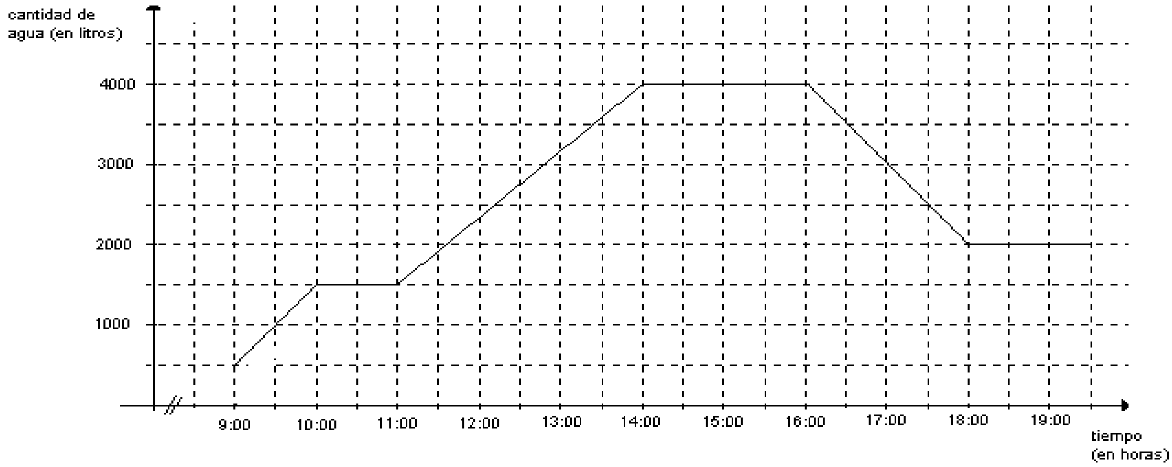
a) Indica las coordenadas de los vértices del triángulo ABC.
b) Dibuja un triángulo simétrico al dado con respecto al eje y.
c) Indica las coordenadas de los vértices del triángulo obtenido por la simetría.
d) Observa las coordenadas de los puntos que se corresponden con la simetría y responde:
   - ¿Cómo son las coordenadas de dos puntos simétricos respecto del eje y?
   - ¿Cómo sería la relación entre las coordenadas de los puntos simétricos, si la simetría se realizara con respecto al eje x?

Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) El punto P (5,2 ; -2) pertenece al segundo cuadrante.
b) En el eje de abscisas se debe utilizar la misma escala que en el eje de ordenadas.
c) Si dos puntos tienen la misma ordenada entonces pertenecen al mismo cuadrante.
d) Si la abscisa de un punto es 0 , entonces el punto pertenece al eje x.
e) En un sistema de referencia cartesianas el punto (3; -2) coincide con el punto (-2;3).

5) Se ha estudiado que una planta rastrera alcanza 15cm de alto durante el primer mes de vida y luego se mantiene con una altura constante. Realiza un gráfico que represente la relación tiempo-altura de esta planta. Justifica.

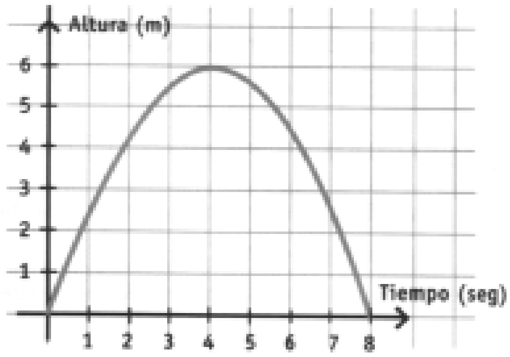
6) En el siguiente gráfico se muestra como es la relación entre el tiempo (en un determinado momento del día) con la cantidad de litros de agua que hay en un piletín pequeño de 4000 litros de capacidad.



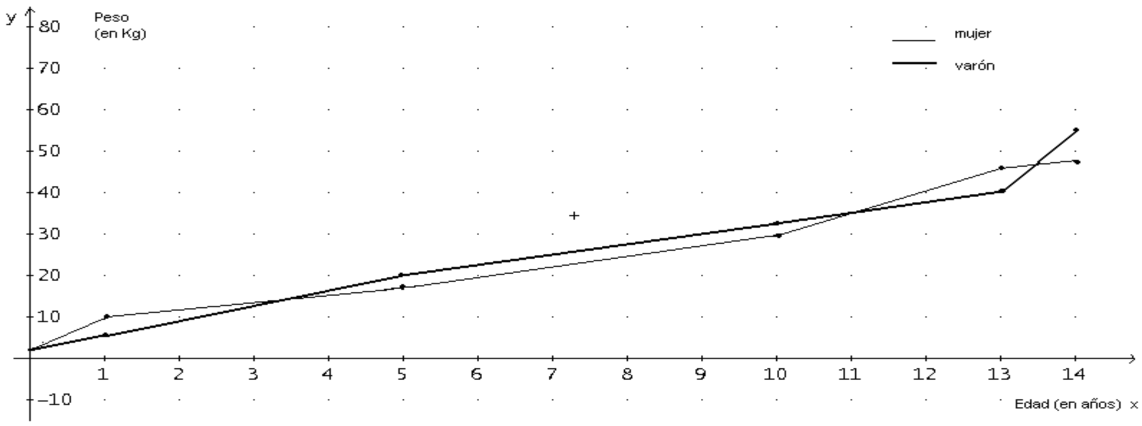
Responde:

a) ¿cuántos litros de agua había en el piletín a las 9:00 hs?
b) ¿durante cuánto tiempo estuvo lleno el piletín?
c) ¿durante cuánto tiempo estuvo entrando agua al piletín?
d) ¿durante cuánto tiempo salió agua del piletín?
e) ¿estuvo vacío en algún momento entre las 9:00 hs y las 19:00 hs?
f) Supongamos que a partir de las 16:00 hs empezó a salir agua hasta quedar vacía a las 18:00 hs; ¿cómo modificarías el gráfico para representar esta nueva situación?

7) Se arroja una pelota de tenis verticalmente hacia arriba. El gráfico muestra la altura que se encuentra la pelota en cada instante posterior al lanzamiento. Responde a las preguntas.
   a) ¿Cuál son las variables que intervienen?
   b) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada?
   c) ¿A qué altura estaba la pelota a los 3seg del lanzamiento?
   d) ¿En qué otro momento se encontraba la pelota a esa misma altura?



8) El siguiente gráfico muestra la evolución del peso medio de un varón y una mujer en los primeros 14 años de su vida. Contesta:
   a) ¿cuáles son las variables relacionadas?
   b) ¿cuál es el peso del varón a los 5 años?
   c) ¿cuál el peso de la mujer a los 10 años?
   d) ¿a qué edad el varón pesó 35kg? ¿Y la mujer 45kg?
   e) ¿entre qué edades la mujer pesó más que el varón?
   f) ¿cuándo la mujer pesó más de 35kg y el varón menos de 20kg?



9) La tabla muestra el número de nacimientos en los siete primeros meses de un año, en un hospital.

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio
Nº de nacimientos	24	31	32	29	32	29	40

Responde:
   a) ¿cuáles son las variables que intervienen en la relación?
   b) ¿en qué mes hubo más nacimientos?
   c) ¿en qué mes hubo menos nacimientos?
   d) ¿hubo dos meses con el mismo número de nacimientos?
   e) ¿le corresponde a cada mes un único número de nacimientos?

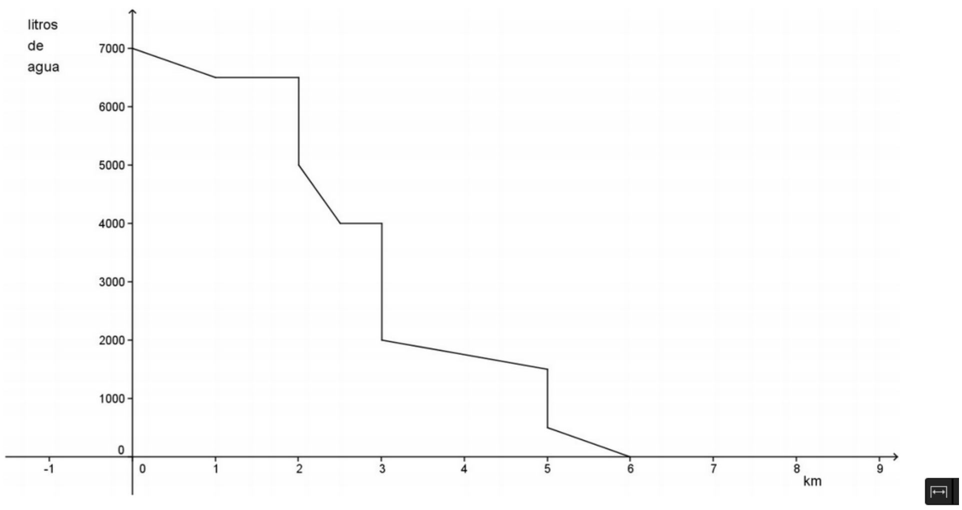
10) Los registros de temperatura de una persona durante sus primeras cuatro horas de internación en un hospital se describen en la tabla. Se asignó el 0 a la primera toma y 1, 2, 3 a las tomas siguientes:

Toma	0	1	2	3
temperatura	37,2	37,2	37,2	37,2

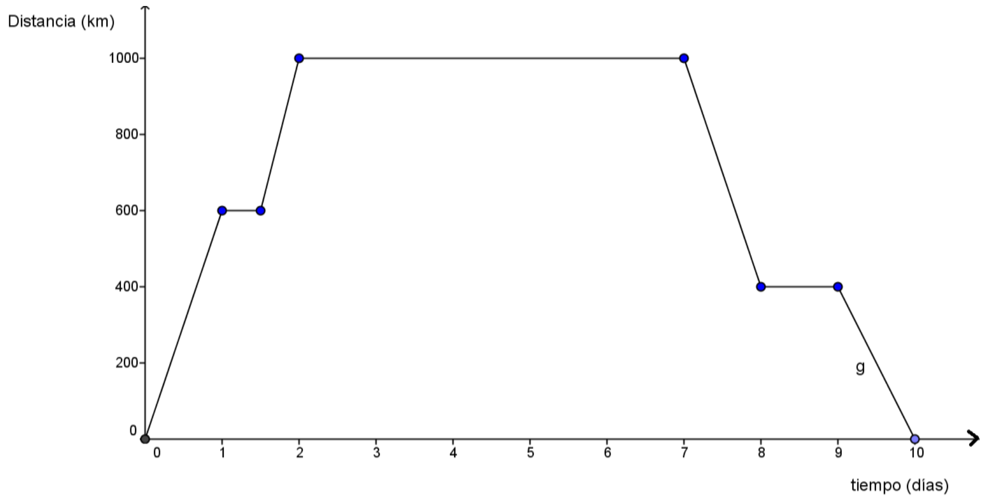
a) Responde, ¿el gráfico de la relación es continuo o de puntos aislados?
b) Contesta, ¿cuáles son las variables que intervienen en la relación?
c) Vuelca estos datos en un gráfico de coordenadas cartesianas apropiado.
d) Responde, ¿puedes asegurar que la persona no ha sufrido variaciones en su temperatura en el tiempo transcurrido entre la primera y la última toma?

11) Un camión cisterna de 7000 litros, reparte agua para limpieza (no potable) en una zona rural diariamente. Abastece 3 puntos principales. Primero deja agua en una empresa de lácteos. Luego, en un dispensario y por último en una escuela. Además riega algunos tramos de los caminos de tierra mientras avanza.
En el siguiente gráfico se registra la cantidad de agua (en litros) que hay en el camión, desde que parte del lugar donde se abastece hasta que vacía su tanque. Responde:

a) ¿a cuántos km del lugar de abastecimiento se encuentra la empresa, el dispensario y la escuela? ¿cuántos litros de agua deja en cada lugar?
b) ¿en qué km se encontraba cuando tenía 1500 lt?
c) ¿cuántos litros de agua tiró en los caminos de tierra?
d) ¿durante cuántos km no salió agua del tanque?



12) En la siguiente gráfica se representa el viaje realizado por un grupo de estudiantes en colectivo. En el eje horizontal se representa el tiempo en días de la duración del viaje y en el eje vertical la distancia en km a la escuela (que es desde donde partieron). Descríbelo.



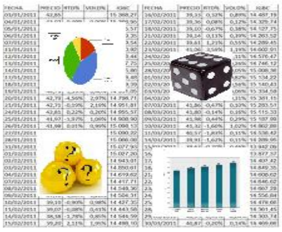
13) Agustín sale de su casa a las 7 de la mañana para ir al instituto. Llega a las 8 de la mañana y está allí hasta las 2 de la tarde (14 horas), que es el momento en que finalizan sus clases. Regresa a casa a las 3 de la tarde (15 horas).

En el eje horizontal se representa el tiempo en horas y en el eje vertical la distancia en km. Dibuja una gráfica si:

a) se relaciona la distancia a su casa con respecto al tiempo.

b) se relaciona la distancia al instituto con respecto al tiempo.

Compara lo realizado con tus compañeros. Extrae conclusiones.



Capítulo 7 Estadística y probabilidad

Muy atrás en el tiempo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas para poder conocer el número de personas y animales, lo que ha quedado registrado en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas.

En el 3000 A.C. los babilonios usaban ya pequeños envases moldeados de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides en el siglo XI A. C. En China existían registros numéricos similares con anterioridad al año 2000 A. C y los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el 594 A. C. para cobrar impuestos.

El término alemán *Statistik*, introducido originalmente por Gottfried Achenwall en 1749, se refería al análisis de datos del Estado. A través de los censos se comenzó a suministrar información regular acerca de la población de cada país. Así es que, los datos estadísticos, estaban asociados a los datos demográficos de una ciudad o estado determinados.

La Estadística que conocemos hoy en día es el resultado de la unión de dos disciplinas que evolucionaron independientemente hasta el siglo XIX: el cálculo de probabilidades, que surge en el siglo XVII como teoría matemática de los juegos de azar; y la "Estadística" (o ciencia del Estado) que estudia la descripción de datos. La integración de ambas líneas de pensamiento da lugar a una ciencia cuyo objeto de estudio es la variabilidad de los datos en condiciones de incertidumbre.

Como herramienta, contribuye a áreas tan variadas como la ingeniería, la economía, la medicina, la sociología, la meteorología entre otras.

∗ Variable, población y muestra.

∗ Presentación y organización de datos.

∗ Gráficos estadísticos.

∗ Medidas de tendencia central.

∗ Cálculo de probabilidades.

∗ Estadística y probabilidad + Actividades.

➢ *CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA*

VARIABLE, POBLACIÓN Y MUESTRA

La estadística se ocupa de la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos con el fin de extraer conclusiones o de hacer predicciones respecto de ciertos fenómenos en escenarios de incertidumbre.

La estadística puede ser descriptiva o inferencial. La **estadística descriptiva**, que comenzaremos a estudiar, utiliza técnicas que sirven para organizar y resumir conjuntos de datos.

En un análisis estadístico simple, lo que se persigue es extraer conclusiones acerca del comportamiento de una cierta **variable**.

Ejemplo:

Se realiza una encuesta a los alumnos de primer año de la escuela San Martín para saber: tipo de música preferida; tiempo por semana en promedio que la escuchan y número de veces que salen a bailar en promedio por mes. La encuesta se realiza sólo a 30 alumnos escogidos al azar.

Una de las variables elegidas es la música preferida de los alumnos de primer año de la escuela San Martín en el año actual. Las otras variables son:

....

....

....

Siempre es importante definir la variable en tiempo y espacio.

La población geográfica (o unidad experimental) en donde se realiza el estudio está compuesta por todos los alumnos de primer año de la escuela San Martín.

Al conjunto de todos los valores posibles de la variable bajo estudio se lo denomina **población estadística.**

Existe diferencia entre la población geográfica y la población estadística, ya que sobre cada elemento de la población geográfica, en nuestro caso, sobre cada alumno, se pueden estudiar diferentes variables (tipo de música, tiempo por semana promedio que escucha música, etc.) que generaran diferentes poblaciones estadísticas.
En adelante, a la población estadística se la nombrará como **población**.

En el ejemplo, las diferentes poblaciones son: “ritmos musicales de preferencia de los alumnos de 1er año de la escuela San Martín en el año actual", “cantidad de veces promedio por mes que salen a bailar los alumnos de 1er año de la escuela San Martín en el año actual”, "tiempo promedio por semana que escuchan su música preferida los alumnos de 1er año de la escuela San Martín en el año actual". Como en este estudio se encuesta solo a 30 alumnos, las conclusiones se extraerán a partir de una **muestra** de la población, en cada caso.

Una **muestra** es un subconjunto de la población. Cuando la población es muy grande o no es posible relevar todos datos por diferentes causas, para un correcto estudio, se toma una muestra que sea **representativa** de ella.

Para que una muestra sea representativa de la población se debe tener en cuenta sus características y en base a ello seleccionar el tipo de muestreo. En el ejemplo no sería conveniente que los 30 alumnos encuestados pertenezcan al mismo curso. ¿Por qué? ....
....

Determina, para cada unidad experimental, dos variables y la población que corresponda.

1) Los estudiantes de tu escuela.
2) Los kioscos de la ciudad de Santa Fe.
3) Las familias de un determinado barrio de la ciudad de Santa Fe.

PRESENTACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE DATOS

Las variables bajo estudio se clasifican en **cualitativas** y **cuantitativas.** Las primeras son aquellas que expresan una cualidad o atributo, por ejemplo el ritmo musical que prefiere una persona. Las segundas, en cambio, son variables que se pueden expresar numéricamente, por ejemplo la cantidad de veces en promedio que sale a bailar por mes una persona o cuánto tiempo en promedio por semana escucha música.

Volviendo al ejemplo inicial, el borrador de los resultados obtenidos es el siguiente:

Tipo de música: 8 alumnos prefieren la cumbia, 6 prefieren folclore, 14 el rock y 2 otro tipo.

Salidas a bailar: no sale 2 alumnos; una vez 8 alumnos; dos veces 14 alumnos; tres veces 6 alumnos.

Tiempo en promedio que escuchan música en horas, por semana: 14,5-9-16,15-17-18,5-19-17-16-15-20-13-14-14,5-10-19,5-12-14-12,5-14-16-20-16,5-14-17,5-18-14,5-15-16-9-16.

Como podemos ver los resultados así presentados no brindan demasiada información. Para organizarlos y poder extraer conclusiones se realizan **tablas de distribución de frecuencias** y **gráficos.**

Para ello es importante conocer algunos términos estadísticos como los siguientes:

Frecuencia absoluta es el número de veces que se repite un atributo o valor de la variable.

Muchas veces es importante además de saber la frecuencia absoluta de dicho valor o categoría, saber el **porcentaje** con que éste ocurre (**frecuencia relativa porcentual**), en particular si se están comparando dos muestras de diferentes tamaños.

Completa las siguientes tablas, con la información del ejemplo dado anteriormente:

TABLA 1: Música de preferencia de los alumnos de 1er año de la escuela San Martín en el año actual.

Tipo de música	Cantidad de alumnos	Porcentaje de alumnos
Cumbia		
Folclore		
Rock		
Otros		

FUENTE: Encuesta realizada por los alumnos de 1er año de la escuela San Martín el año actual.

En toda presentación de datos siempre debe consignarse el título y la fuente.

Como verás en la primera columna se colocan las categorías o valores de la variable, mientras que en la segunda y tercera la frecuencia absoluta y el porcentaje.

TABLA 2: Cantidad de veces por mes, en promedio, que los alumnos de 1er año de la escuela San Martín en el año actual, salen a bailar:

Cantidad de veces	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
0		
1		
2		
3		

FUENTE: Encuesta realizada por los alumnos de 1er año de la escuela San Martín el año actual.

TABLA 3: Tiempo por semana, en promedio, que los alumnos de 1er año de la escuela San Martín en el año actual, escuchan música.

Tiempo semanal	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
De 8 hasta 10hs inclusive		
De 10 hasta 12hs inclusive		
De 12 hasta 14hs inclusive		
De 14 hasta 16hs inclusive		
De 16 hasta 18hs inclusive		
De 18 hasta 20hs inclusive		

FUENTE: Encuesta realizada por los alumnos de 1er año de la escuela San Martín el año actual.

Clasifica cada una de las variables presentadas en cada tabla, establece diferencias y extrae algunas conclusiones.

➢ *GRÁFICOS ESTADÍSTICOS*

Si bien las tablas organizan la información, los gráficos estadísticos nos brindan una forma de presentarla para poder extraer más conclusiones acerca del comportamiento de la variable que se está estudiando. Hay diversidad de gráficos pero los más adecuados para cada clase de variable son los que expondremos a continuación.

Los gráficos deben ser lo más sencillos posibles para no desvirtuar la información.

GRÁFICO DE BARRAS Y GRÁFICO DE SECTORES (para variables de tipo cualitativa).

Ejemplo 1:

Enfermedades epidemiológicas más frecuentes, en todo el país en el año 2004.

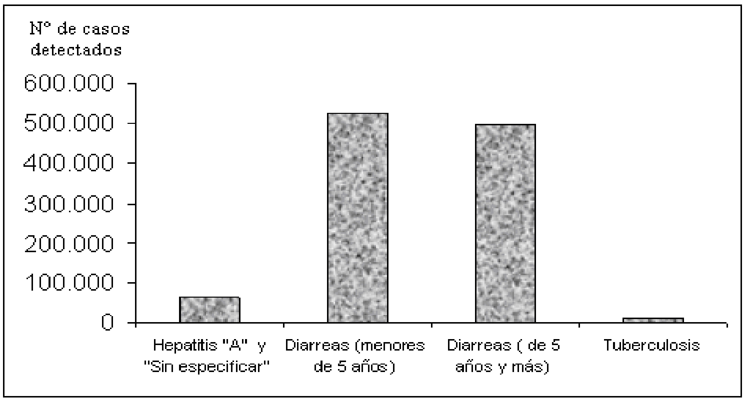
Enfermedad	Nº de casos detectados	% de casos detectados
Hepatitis "A" y "Sin especificar" [1]	63.006	
Diarreas (menores de 5 años)	524.064	
Diarreas (de 5 años y más)	497.458	
Tuberculosis	11.962	
Total	1.096.490	

Fuente: INDEC, Dirección Nacional de Estadísticas Sociales y de Población, Dirección de Estadísticas Sectoriales en base a información del Ministerio de Salud y Ambiente de la Nación. Secretaría de Programas Sanitarios. Dirección de Epidemiología. Sistema Nacional de Vigilancia Epidemiológica (SINAVE).

En este ejemplo los datos son de la población y no de una muestra.

GRÁFICO DE BARRAS

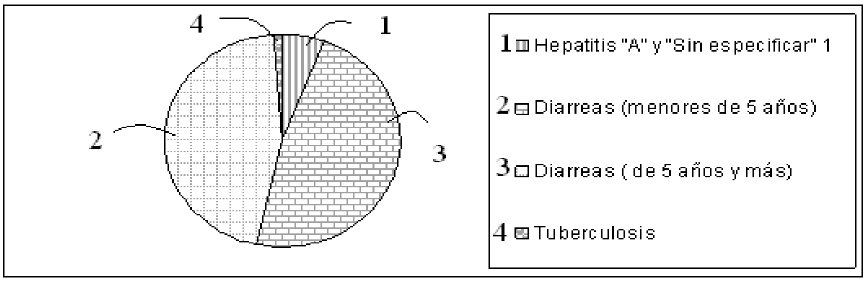
Enfermedades epidemiológicas más frecuentes, en todo el país en el año 2004.



Fuente: INDEC, Dirección Nacional de Estadísticas Sociales y de Población, Dirección de Estadísticas Sectoriales en base a información del Ministerio de Salud y Ambiente de la Nación. Secretaría de Programas Sanitarios. Dirección de Epidemiología. Sistema Nacional de Vigilancia Epidemiológica (SINAVE).

GRÁFICO DE SECTORES

Enfermedades epidemiológicas más frecuentes, en todo el país en el año 2004.



Fuente: INDEC, Dirección Nacional de Estadísticas Sociales y de Población, Dirección de Estadísticas Sectoriales en base a información del Ministerio de Salud y Ambiente de la Nación. Secretaría de Programas Sanitarios. Dirección de Epidemiología. Sistema Nacional de Vigilancia Epidemiológica (SINAVE).

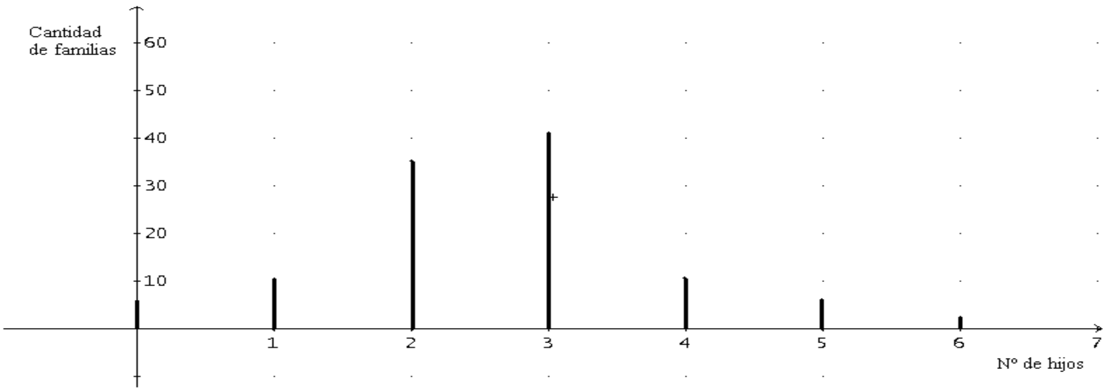
Observa que para identificar cada atributo de la variable se los codificó con los números 1, 2, 3 y 4, pero esto no significa que la variable es de tipo cuantitativa, los números podrían suplantarse por letras o símbolos ya que su función es sólo la de hacer corresponder cada sector circular del gráfico con la categoría del atributo que representa. Este proceso recibe el nombre de "etiquetar".

GRÁFICO DE BASTONES (para variables cuantitativas).

Ejemplo 2:

“Número de hijos menores a 18 años correspondientes a familias de cierto barrio de la ciudad”.

Nº de hijos menores de 18 años	Cantidad de familias	Porcentaje de familias
0	5	
1	10	
2	35	
3	41	
4	12	
5	6	
6	3	



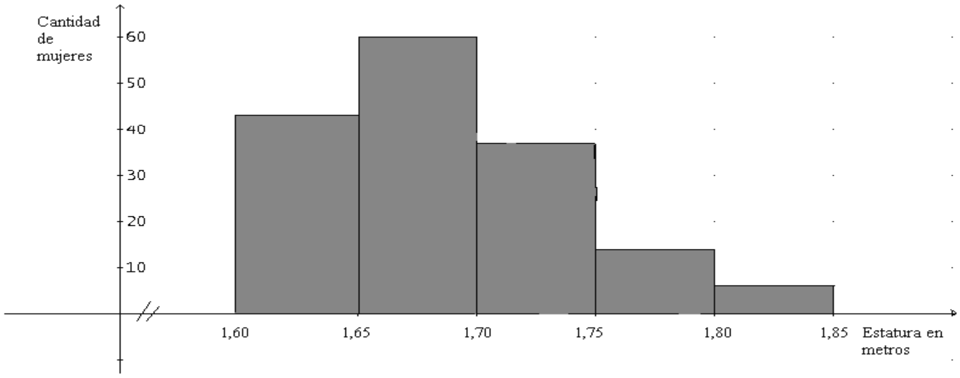
Fuente: Vecinal del barrio.

HISTOGRAMA (para variables cualitativas en intervalos de valores)

Ejemplo 3:

Estatura de mujeres entre 20 y 30 años de edad, de la ciudad de Santa Fe.

Estatura en metros	Cantidad de personas	% de personas
De 1,60 hasta 1,65 inclusive	42	
De 1,65 hasta 1,70 inclusive	60	
De 1,70 hasta 1,75 inclusive	35	
De 1,75 hasta 1,80 inclusive	15	
De 1,80 hasta 1,85 inclusive	8	



Fuente: Se desconoce

a) Realiza los gráficos correspondientes para las tablas 1, 2 y 3 de la sección anterior, teniendo en cuenta las frecuencias absolutas. Extrae conclusiones.
b) Si realizáramos los gráficos, de los tres ejemplos anteriores, con la frecuencia porcentual, contesta: ¿cambiarían las conclusiones que se pueden extraer de cada gráfico?
¿Por qué?
c) Discute la importancia de incluir el título y la fuente al presentar una tabla o gráfico estadístico.

- ***MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL***

Dependiendo el tipo de variable que se está estudiando (cualitativa o cuantitativa) existen medidas estadísticas que aportan mayor información a lo que se obtiene a partir de la observación de los gráficos y tablas. Dos medidas descriptivas básicas son la moda y la media aritmética.

La **moda (Mo)** es la categoría o valor de la variable que se presenta con mayor frecuencia en la muestra (o en la población).
La **media aritmética** es el cociente entre la suma de todos los valores de la variable observados y la cantidad de observaciones.

Si se trata de una muestra simbolizamos **media aritmética muestral (** $\overline{X}$ **)** o si se trata de una población simbolizamos **media aritmética poblacional (μ)**.

CUIDADO

En una muestra o población pueden presentarse 1, 2 o más modas.
La media aritmética sólo puede calcularse cuando la variable es cuantitativa.

Notación: Si n representa la cantidad de observaciones en la muestra y x_i representa cada una de dichas observaciones (repetidas o no), entonces:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{donde } \sum \text{ es el signo de sumatoria.}$$

Observación: Si los datos están presentados en intervalos de valores (como en el ejemplo 3 de la sección anterior), para el cálculo de la media aritmética, se elige como valor representativo del intervalo, la **marca de cada intervalo,** que es el valor medio de cada intervalo.

a) Calcula e interpreta, de ser posible, la moda y la media aritmética para las tablas 1, 2 y 3 y los ejemplos 1, 2 y 3 de las secciones anteriores.
b) Contesta: la media aritmética correspondiente a la tabla 3 y al ejemplo 3, ¿es una medida exacta o aproximada? ¿Por qué?

- ***CÁLCULO DE PROBABILIDADES***

Cuando en la vida cotidiana se puede saber el resultado de una acción decimos que realizamos un **experimento determinístico**. Por ejemplo si colocamos una olla con agua a calentar estamos seguros que al cabo de un tiempo, la temperatura del agua llegará a los 100ºC.
Pero muchas otras veces realizamos acciones que dependen del azar, donde sólo pueden conocerse los resultados posibles pero no efectivamente el que va a ocurrir, en este caso hablamos de **experimentos aleatorios.** Por ejemplo, al arrojar una moneda sabemos que existen dos posibilidades, que salga cara o cruz, pero no tenemos la certeza de cuál de las dos sucederá.

Da tres ejemplos de experimentos aleatorios.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral (S).**

Por ejemplo, el espacio muestral de “arrojar un dado y ver qué número sale” es

$$S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Cada elemento del espacio muestral se denomina **suceso elemental** y a cualquier conjunto de sucesos elementales se lo llama **suceso.**

Un suceso del espacio muestral del ejemplo anterior puede ser:

I: “Los resultados impares al arrojar un dado” $I = \{1; 3; 5\}$

Determina el espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos y determina un suceso dentro del mismo.

a) “Se observa el sexo de dos nacimientos consecutivos en una maternidad”.

b) “Se observa el promedio de los resultados al arrojar dos dados”.

La **probabilidad de un suceso** nos indica la posibilidad u oportunidad que éste tiene de ocurrir dentro del espacio muestral.

Por ejemplo podríamos querer saber:

* la posibilidad de que al arrojar un dado legal su resultado sea un número impar.
* la posibilidad de que una persona seleccionada aleatoriamente diga que está satisfecha con su trabajo.

Cada uno de los ejemplos anteriores se resuelven a través de distintos tipos de probabilidad. En el primero se utiliza la **probabilidad teórica o a priori**. Para el segundo la **probabilidad empírica.**

PROBABILIDAD TEÓRICA O A PRIORI

La probabilidad se basa en el conocimiento anterior al proceso que genera el suceso. En el caso más simple, cuando cada resultado es igualmente posible, la posibilidad de ocurrencia del suceso se define de la siguiente manera:

Probabilidad de ocurrencia del suceso “A” : $P(A) = \frac{X}{N}$

Donde X = número de resultados en los que ocurre el suceso buscado, o bien, cantidad de elementos del suceso buscado.

N = número total de resultados posibles, o bien, cantidad de elementos del espacio muestral.

Observa que la probabilidad así definida es una fracción cuyo numerador cumple con la condición $0 \leq X \leq N$, por lo que dicha fracción sólo puede tomar valores desde 0 hasta 1 inclusive.

Siguiendo con nuestro ejemplo: P(I) = $\frac{3}{6} = 0,5$

¿Cuál es la interpretación que debemos darle a este resultado?

Podemos decir que a largo plazo, si repetimos el lanzamiento del dado, el cociente entre el número de veces que sale impar y el número de veces que se ha lanzado el dado se acercará a 0,5.

PROBABILIDAD EMPÍRICA

Esta probabilidad se basa en los resultados de un experimento aleatorio llevado a cabo. En el ejemplo citado, se podría realizar una muestra y contabilizar cuántas de las personas encuestadas están satisfechas con su trabajo.

Si la muestra aleatoria fue realizada a 200 empleados de una empresa en un determinado momento y 45 de ellos están conformes con su tarea, entonces la probabilidad buscada será $\frac{45}{200}$

¿Qué probabilidad arrojaría si ahora se vuelven a encuestar a otros 200 empleados de la empresa?..
....
....

Existe una relación entre la probabilidad empírica y la probabilidad teórica, llamada **regularidad estadística**. A medida que el número de repeticiones del experimento se hace cada vez mayor, la probabilidad empírica se acerca cada vez más a la probabilidad teórica.

Comprueba que se cumple la regularidad estadística:

a) Responde: ¿cuál es la probabilidad de que al arrojar una moneda salga cara?
b) Completa la siguiente tabla, realizando la experiencia.
c) Extrae conclusiones.

Número de veces que se lanza la moneda	Probabilidad empírica del número de caras
4	
30	
100	

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD + ACTIVIDADES

"No hay nada repartido más equitativamente en el mundo
que la razón: todo el mundo está convencido
de tener suficiente." Descartes

1) Trabajo de campo:

I) Realiza la siguiente encuesta a tu grupo de compañeros:

1. ¿A cuántos km vivís de la escuela?

2. ¿Cómo llegás a la escuela?

- caminando
- bicicleta
- colectivo
- auto particular
- taxi
- transporte escolar

Otro (especifique)

3. De lunes a viernes, ¿cuántos días no almorzás en tu casa?

4. En los días que no almorzás en tu casa, comés:

- en casa de un familiar
- en casa de un amigo
- en la cantina de la escuela
- comida preparada en otro lugar
- de una vianda traída de tu casa

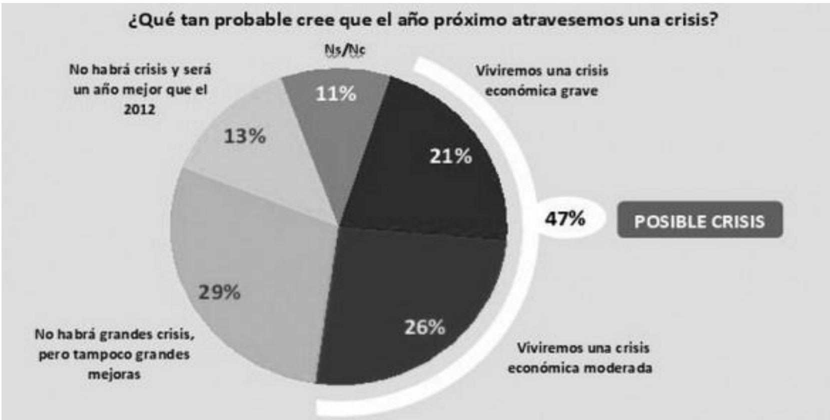
Otro (especificar)

5. Si no vas a la casa de nadie a comer, ¿cuánto estimás que gastás en una comida?

II) Define en base a la encuesta:
   a) Unidad experimental.
   b) Variables observadas.
   c) Poblaciones estadísticas.
   d) Tipo de variables.

III) Presenta la información recabada, en tablas de distribución de frecuencias absolutas y frecuencias relativas porcentuales.
IV) Presenta la información organizada en el apartado III, a través de gráficos adecuados.
V) Calcula la medida de tendencia central que creas válida para cada una de las variables relevadas en la encuesta.
VI) Realiza un informe donde se concluya acerca de la información relevada.

2) Teniendo en cuenta el siguiente gráfico que muestra la opinión de los argentinos con respecto a una posible crisis para el año próximo, contesta:

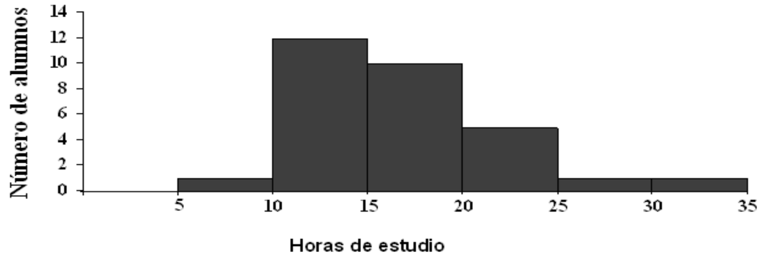


Extraído de: http://site.informadorpublico.com/?p=18053. 25/09/12

a) ¿cuál es la variable analizada en este caso? ¿de qué tipo?
b) ¿cuál es la población en estudio?
c) ¿se ha tomado una muestra de la población? Justifica.
d) A partir del gráfico, ¿podrías construir las tablas de distribución de frecuencias? Justifica.

3) En una determinada escuela se realiza una encuesta anual sobre el rendimiento académico de sus alumnos. Una de las preguntas que se realiza a los alumnos de primer año es: ¿cuántas horas semanales le dedicas a estudiar en tu casa? Las respuestas fueron presentadas a través del siguiente gráfico:

Horas de estudio extraescolar



Fuente: Encuesta alumnado en el presente año.

Al respecto responde:

a) ¿a cuántos alumnos se encuestó?

b) ¿entre qué cantidad de horas estudian los alumnos más frecuentemente?

c) ¿cuántas horas como máximo estudian por semana? ¿Cuántos alumnos dedican ese tiempo?

a) Responde:

i) ¿a qué debe ser igual la suma de las frecuencias absolutas en una muestra?¿Por qué?

ii) ¿cuánto debe sumar las frecuencias relativas porcentuales?¿Por qué?

iii) ¿para qué podría ser útil la columna de frecuencias relativas porcentuales pedida en el ejercicio 1-III?

b) Da un lote de 7 datos cuya media sea cero. Contesta: ¿es la única posibilidad?¿Por qué?

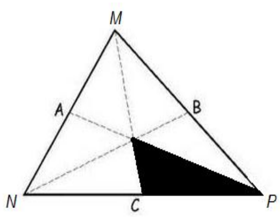
c) Da un lote de datos donde todos ellos sean la moda. Explica.

4) Responde: ¿cuál es la probabilidad de sacar un as negro en una baraja española?

5) Contesta: ¿cuál es la probabilidad de que un matrimonio con dos hijos, escogido al azar, tenga dos hijas mujeres?

6) Determina cuál es la probabilidad de arrojar el dado de la derecha y que salga un número par.

7) Calcula la probabilidad de pinchar con los ojos cerrados la región interior del triángulo sombreado. Se sabe que los segmentos $\overline{MC}, \overline{NB}$ y $\overline{AP}$ son medianas del triángulo MNP,



Recuerda las propiedades de las medianas de un triángulo.

8) Calcula la probabilidad de que se seleccione un alumno al azar de tu curso y sea una mujer.

9) Observando el pronóstico siguiente:

Pronóstico a 10 días para San Carlos de Bariloche, Argentina

Hoy | Mañana | **A 10 días** | Mensual | Estacional

Próximos 10 días **Nueva** **Cu**

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
24 Septiembre	25 Septiembre	26 Septiembre	27 Septiembre	28 Septiembre
		Yom Kippur		
Observado Máxima 16°C Mínima -2°C Precip. N/D	Pronóstico **Parcialmente nublado** **Por la noche** **Mínima 1°C** Probabilidad de precip. 0%	Pronóstico **Mayormente soleado** **Máxima 15°C** **Mínima 6°C** Probabilidad de precip. 0% Viajes para el fin de semana	Pronóstico **Parcialmente nublado** **Máxima 16°C** **Mínima 2°C** Probabilidad de precip. 10 %	Pronóstico **Mayormente nublado** **Máxima 15°C** **Mínima 4°C** Probabilidad de precip. 10 %

http://espanol.weather.com/weather/10day-San-Carlos-de-Bariloche-ARRN0081-2012-

¿Qué interpretación le puedes dar a la probabilidad del 10% en precipitaciones para el día jueves 27 de septiembre de 2012? Señala con una cruz la opción que consideres correcta.

a) Hoy lloverá el 10% del día
b) Lloverá en 10% del área a la cual se aplica este pronóstico.
c) En el pasado, las condiciones climatológicas de esta clase han producido lluvia en esta área 10% de las veces.

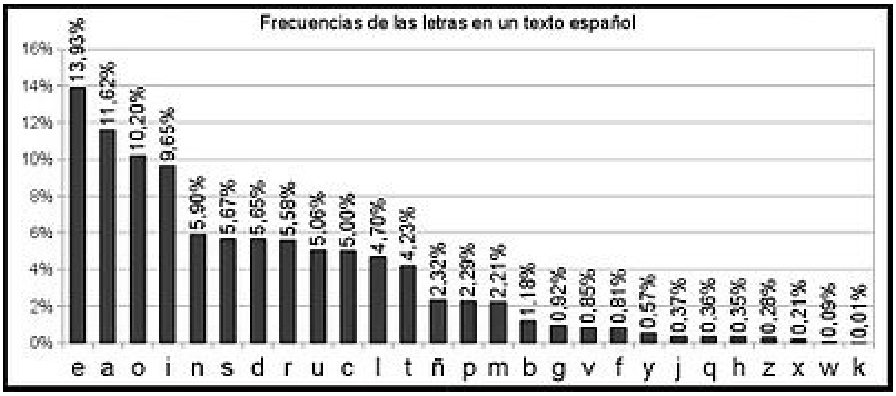
10) Un juego de mesa interesante es el Scrabble que consiste en formar palabras con fichas de letras con determinados puntajes. La cantidad de fichas de cada letra y los puntajes

asignados a cada una no se hicieron en forma caprichosa. Para fundamentar, realiza un estudio de la frecuencia de las letras en nuestro vocabulario.

a) Toma 10 renglones cualesquiera, de cualquier página, de cualquier libro (en castellano). Haz una tabla que muestre la frecuencia y la frecuencia relativa con que aparece cada letra.

b) Compara la tabla realizada en el inciso a) con la de tus compañeros. Calcula el promedio de la frecuencia relativa para cada letra usando tu tabla y la de tus compañeros

c) Compara los resultados obtenidos en b) con la información brindada en el siguiente gráfico:



Fuente: http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/1130229. 25/09/2013

d) Observa en qué proporción aparecen las letras en el Scrabble. Contesta: ¿habrá diferencia dependiendo del origen del juego? ¿Por qué?

11) Contesta: ¿Qué análisis estadístico realizarías para ver si es necesario un semáforo en la esquina de tu escuela? Justifica.