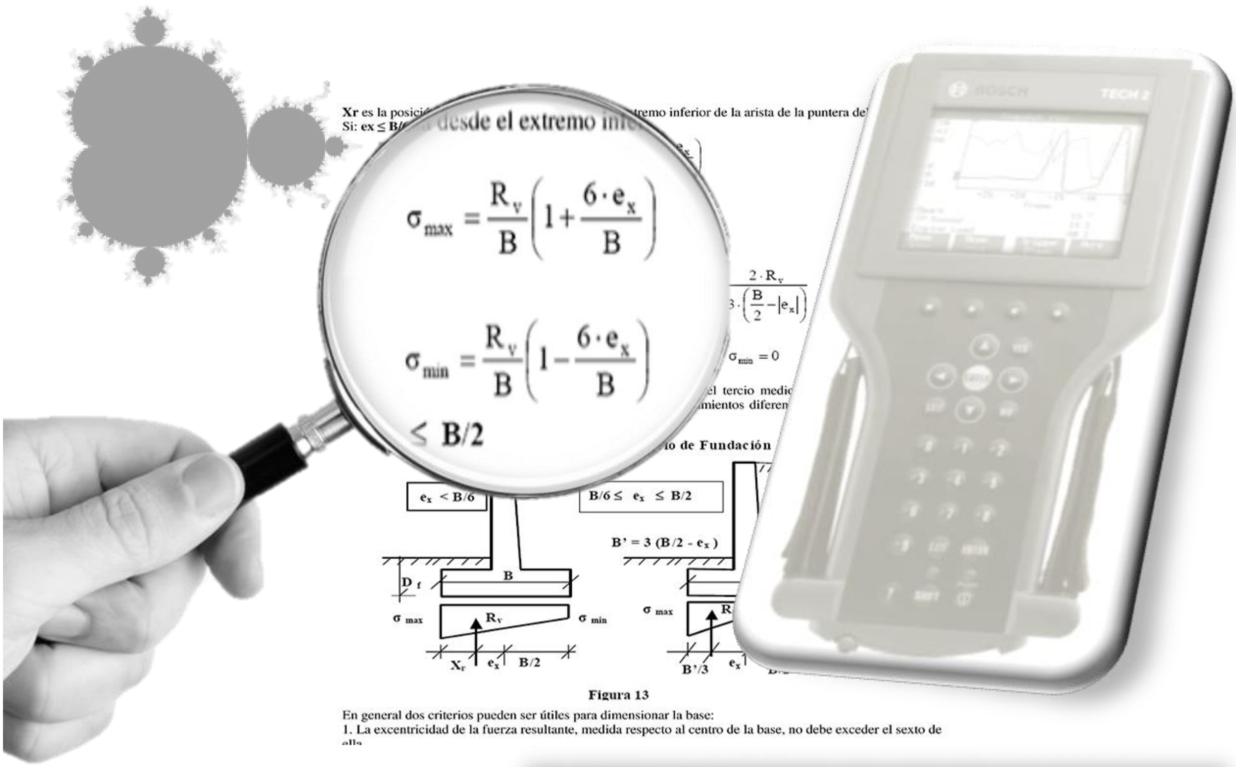
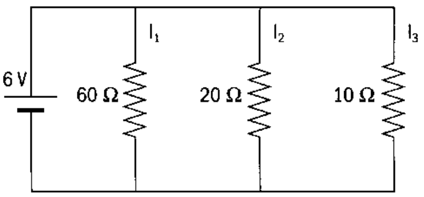
MATEMÁTICA III





FERNANDEZ, Jimena

MAUMARY, Carina

MAUMARY, María Eugenia

MAZZARO, Melisa

"No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real."

Lobachevski

Jimena Fernández

Profesora en Matemática egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del litoral.
Profesora Interina. Escuela Industrial Superior. Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral.
Profesora Titular. Escuela Secundaria. Universidad Nacional del Litoral.

Carina Patricia Maumary

Profesora en Matemática egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del litoral.
Especialista en Docencia Universitaria. Título otorgado por la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Profesora Titular. Escuela Industrial Superior. Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral.
Profesora Titular. E.E.T.P. N° 479 "D. M. Pizarro"

María Eugenia Maumary

Profesora en Matemática egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del litoral.
Profesora Interina. Escuela Industrial Superior. Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral.

Melisa Mazzaro

Profesora en Matemática egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del litoral.
Profesora Interina. Escuela Industrial Superior. Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral.

Matemática III / Carina Maumary ... [et al.]. - 1a ed. adaptada. - Santa Fe : Universidad Nacional del Litoral, 2016.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-692-095-7

1. Matemática. 2. Aprendizaje Mediante la Práctica. I. Maumary, Carina
CDD 510.711

“Quien se atreva a enseñar

nunca debe dejar de aprender.”

John Cotton Dana

Este libro fue pensado como soporte didáctico para trabajar en el aula con alumnos de tercer año de escuelas de educación técnica profesional en el área de Matemática.

Cada capítulo comienza con situaciones problemáticas donde se retoman contenidos y se generan necesidades para abordar nuevos; algunos de los aportes teóricos están pensados para que los alumnos los vayan completando con las deducciones que van obteniendo en la resolución de las situaciones planteadas.

Desde diversas actividades se establecen relaciones con Química, Mecánica, Construcciones y Física; se interpretan regularidades y formulan conjeturas; se producen argumentos para validar determinadas afirmaciones y se valora el lenguaje matemático para modelar situaciones de la vida cotidiana.

Se espera que el alumno perfeccione y desarrolle sus capacidades relacionadas con el área, conozca y comprenda los conceptos matemáticos para resignificarlos en la resolución de problemas.

La última parte de la obra contiene 9 trabajos integradores de modo que el alumno realice actividades grupales como medio enriquecedor de aprendizaje.

INDICE

Funciones: Conceptos Básicos
Función Lineal

FUNCIONES
Conceptos básicos – Función Lineal

En este capítulo comenzaremos a analizar distintas situaciones que reflejan cómo las funciones se aplican a fenómenos del mundo real.

Notaremos que algunas funciones se interpretan y estudian cómodamente mediante sus representaciones gráficas; como así también, sus elementos y comportamiento se pueden obtener a partir del estudio de sus ecuaciones**.** La geometría analítica es el puente que relaciona el álgebra con la geometría para crear una nueva rama que estudia las figuras geométricas, referidas en un sistema de coordenadas, por métodos algebraicos.

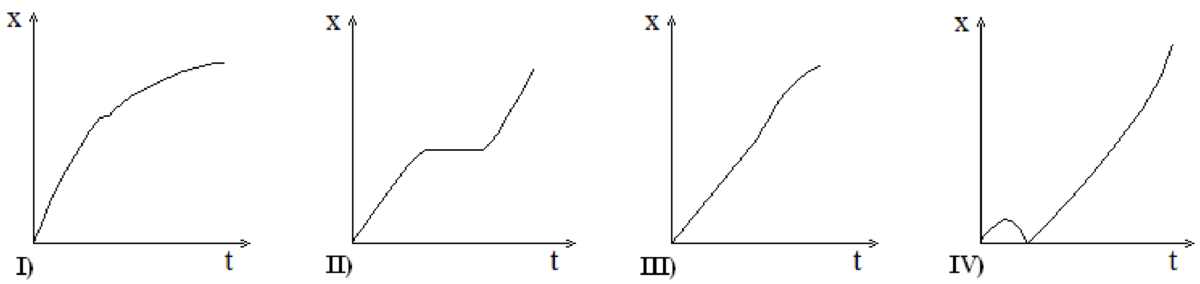
Por ejemplo, para justificar que los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos podemos escribir las ecuaciones de las rectas que contienen dichos lados y comprobar que las pendientes son iguales.

Situación 1: Camino al Cole.

Agustín, Victoria, Daniela y María, viven en un pueblo cercano a Córdoba. Cuando van al Colegio, que está a 10 kilómetros de distancia de la población, suelen hacerlo en bicicleta.

La primera clase empieza a las ocho y cuarto, lo cual significa que deben salir de casa alrededor de las siete y media.

a) Las gráficas y los relatos que se presentan a continuación, muestran cómo las cosas son distintas para cada uno de ellos cuando van al colegio.



María: *Yo siempre salgo con calma, a esas horas de la mañana no te podés precipitar... Ya en el camino empiezo a pedalear más de prisa, porque no me gusta llegar tarde.*

Agustín: *Esta mañana salí con la motocicleta al cole. Bien rápido. Pero por el camino: Ploff, ploff. ¡Sin gasolina! Motocicleta en mano y caminando el resto… ¡Llegué justo!*

Victoria: *Acababa de salir de casa, cuando me di cuenta que hoy tenemos gimnasia. Y me había olvidado la ropa de gimnasia y las zapatillas. ¡Otra vez a casa para buscarlos! Después tuve que pedalear muy de prisa para llegar a tiempo.*

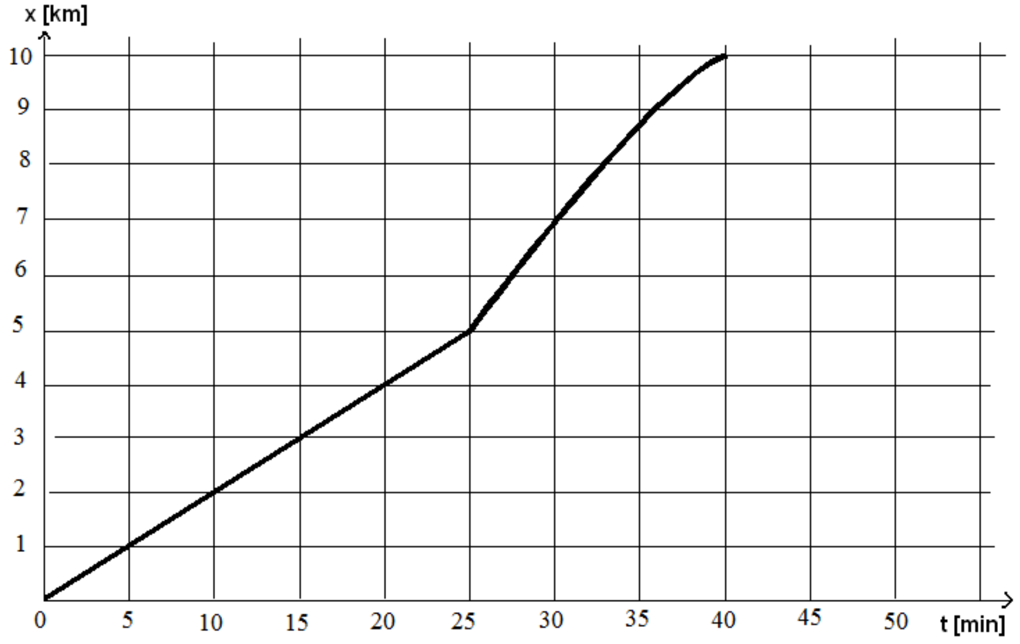
Daniela:……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………….................…….

I. Responde:

i. ¿Qué variables se relacionan en la situación anterior?
ii. ¿Cuál es la independiente y cuál la dependiente?
iii. ¿A quién corresponde cada gráfica?

II. Imagínate lo que pudo haber dicho Daniela y completa el relato.

b) He aquí otra vez la gráfica de ...., pero con mayor precisión. Además, se ha indicado la distancia y el tiempo en los ejes.



Usa la información de la gráfica para contestar las siguientes preguntas:

I. ¿A qué distancia se encuentra, esta persona, de la población a las 7:45 hs?, ¿Cuántos minutos tardó en llegar a la mitad del camino? ¿Cuántos kilómetros avanzó entre las 8 menos cuarto y las 8:00 hs?
II. ¿Cómo puedes saber si ha ido a la misma velocidad en los primeros 20 minutos?
III. Si hubiera seguido con la misma velocidad, ¿habría llegado a tiempo al colegio? ¿Con cuántos minutos de adelanto o atraso?
IV. ¿En qué intervalo de tiempo, aproximadamente, fue a mayor velocidad? ¿Cómo lo puedes saber? Intenta calcular a qué velocidad pedaleaba en dicho intervalo.
V. ¿Qué valores pueden tomar las variables en la situación?
VI. La relación entre ellas, ¿es una función?, ¿Por qué?

Recordemos en este momento el **concepto de función**:

Una relación definida de un conjunto A en otro conjunto B es función si, y sólo si, a cada uno de los elementos del conjunto A le corresponde uno y sólo uno de los elementos del conjunto B.

Completa las siguientes oraciones:

✓ El conjunto A está formado por los valores de la variable……………………………. y recibe el nombre de ……………….……….. Se denota: …………….

✓ El conjunto B está formado por los posibles valores de la variable……………..………….. y recibe el nombre de ……………………………… Se denota: …………….

✓ Los valores que toma la variable dependiente forman un subconjunto de B, llamado ………………..…, que tiene por elementos aquellos que son imagen de alguno de A. Se denota: ………………………….

✓ Para definir una función deben darse el dominio, el codominio y una ley de formación. **La ley de formación** puede estar dada en lenguaje natural (coloquial), a través de la ecuación de la función, una tabla, una gráfica o diagramas de Venn.

✓ La expresión f: A→B significa que la función f está definida de A a B. Esto es, con dominio en A y conjunto imagen contenido en B.

Los diagramas de Venn (llamados así por el matemático y filósofo británico John Venn, 1834–1923), se suelen usar para representar conjuntos gráficamente. Por ejemplo, el conjunto A, se representa simplemente de la forma:

VII.Responde: ¿Cuál es el dominio de la función anterior?, ¿Cuál es el conjunto imagen?

ACTIVIDAD 1

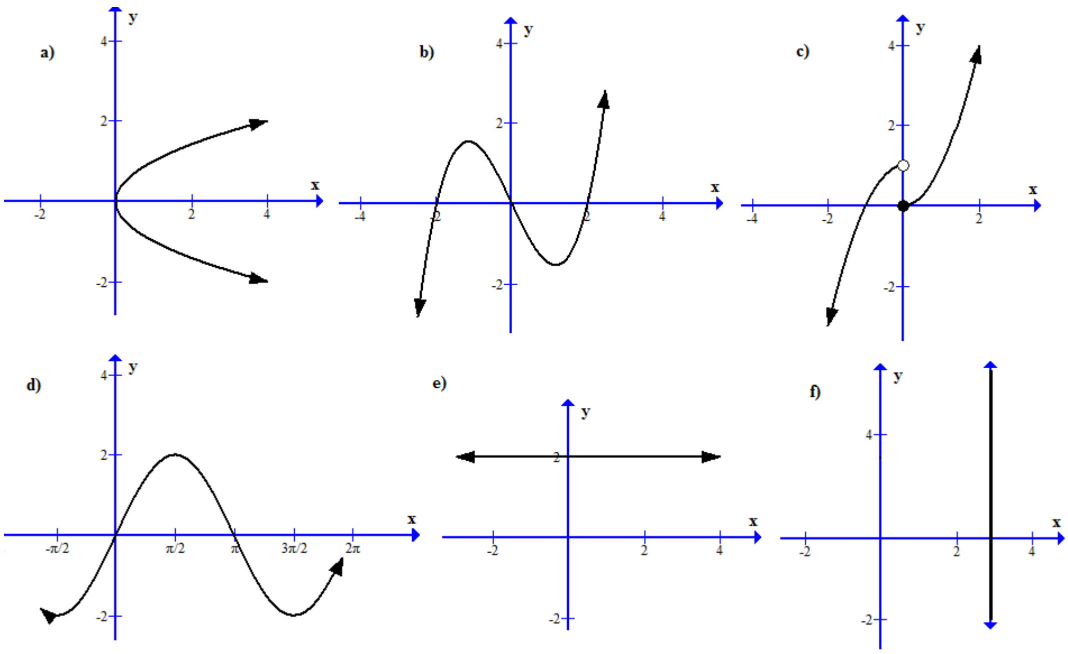
Analiza si las siguientes ecuaciones representan funciones de $\Re \to \Re$. Si no lo son, determina cuál debería ser el dominio para que estas fórmulas representen funciones.

a) $y = \dfrac{2x+8}{4}$ b) $z = \sqrt{x}$ c) $y = \dfrac{2}{(a+5)\cdot(a-2)}$ d) $y = n^2 + 4n + 4$

✓ El gráfico de una función puede estar dado por un subconjunto de $\Re^2$, esto es un subconjunto de puntos del plano cartesiano. En el eje horizontal (eje de abscisas) representamos los valores de la variable independiente y en el eje vertical (eje de ordenadas) representamos los valores de la variable dependiente.

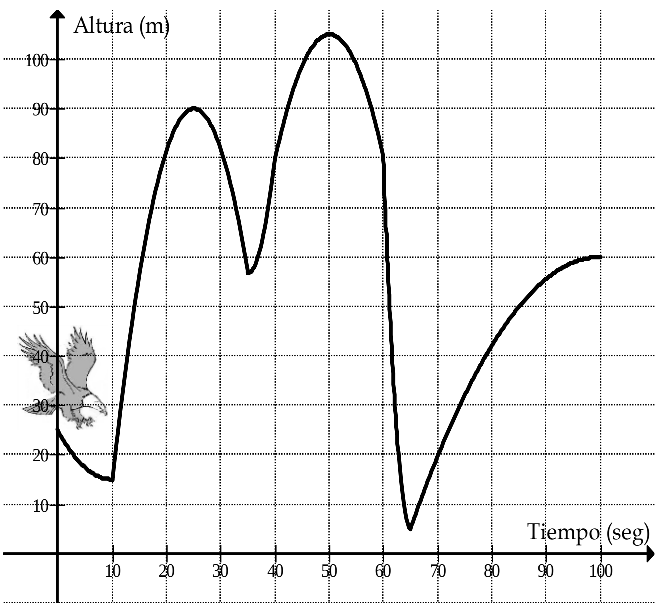
ACTIVIDAD 2

De los siguientes subconjuntos de $\Re^2$ indica cuáles corresponden a funciones de $\Re \to \Re$. Justifica tu respuesta.



Situación 2: El vuelo del águila.

La gráfica de la derecha muestra la altura, en metros, alcanzada por un águila en función del tiempo, en segundos. Observando la misma, sabemos que el ave estuvo volando durante 100 [s] y que estuvo a alturas que oscilaron entre 5 [m] y 105 [m] aproximadamente.



En base a la información mostrada:

a) Indica para qué intervalos de tiempo el águila estuvo en ascenso y en qué intervalos estuvo en descenso.

b) Responde las siguientes cuestiones:

I. Entre los 20 y 30 segundos, hubo un instante en que alcanzó la mayor altura. ¿Cuál es esa altura? ¿En qué instante la alcanza? En ese momento, ¿el águila está ascendiendo o descendiendo?

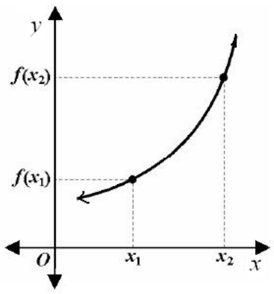
II. ¿Vuelve a alcanzar esa altura en otro momento? ¿En ese o esos instantes, el águila está en ascenso o descenso?

III. Durante todo el tiempo que estuvo volando, ¿en qué instante alcanza la mayor altura? ¿Cuál es dicha altura?

IV. Entre los 30 y 40 segundos hubo un instante en el que estuvo a menor altura. ¿Cuál es ese instante? ¿Cuál esa altura? En ese momento, ¿el águila está ascendiendo o descendiendo?

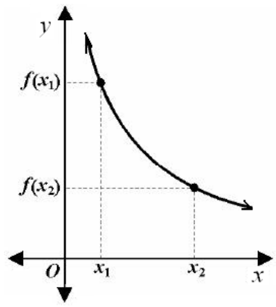
V. Durante todo el tiempo que estuvo volando, ¿en qué instante alcanza la menor altura? ¿Cuál es esa altura?

<u>Lee atentamente los siguientes conceptos:</u>



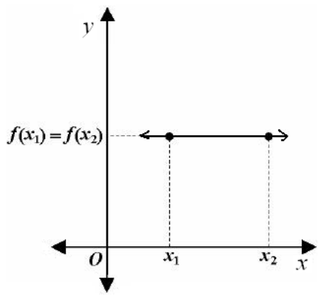
✓ Un **intervalo de crecimiento**[1] de una función es un ***subconjunto*** $(a;b)$ ***del dominio*** para el cual a mayores valores de la variable independiente les corresponden mayores valores de la variable dependiente. Simbólicamente:

$$\text{Sean } x_1, x_2 \in (a;b) \wedge x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$



✓ Un **intervalo de decrecimiento** de una función es un ***subconjunto*** $(a;b)$ ***del dominio*** para el cual a mayores valores de la variable independiente les corresponden menores valores de la variable dependiente. Simbólicamente:

$$\text{Sean } x_1, x_2 \in (a;b) \wedge x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

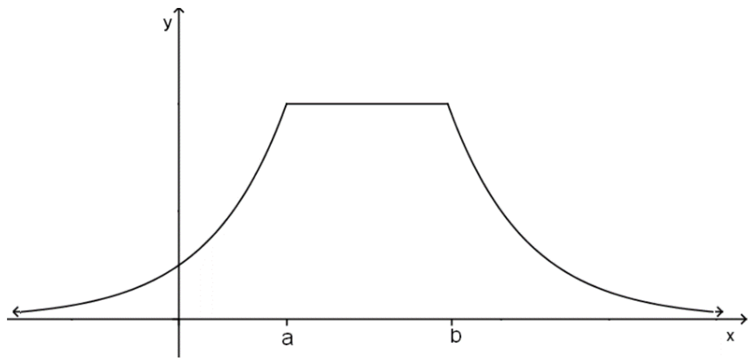


✓ Un **intervalo** donde la función se mantiene **constante** es un ***subconjunto*** $(a;b)$ ***del dominio*** para el cual, a todos los valores de la variable independiente les corresponden el mismo valor de la variable dependiente. Simbólicamente:

$$\text{Sean } x_1, x_2 \in (a;b) \wedge x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

[1] Se considerará crecimiento y decrecimiento en sentido estricto.

☑ **Ejemplo:**



Crece en $(-\infty ; a)$

Decrece en $(b ; \infty)$

Constante en $(a ; b)$

Existen funciones particulares donde estos conceptos pueden ampliarse. Mostraremos a continuación un ejemplo; pero no es un objetivo profundizar en este tema.

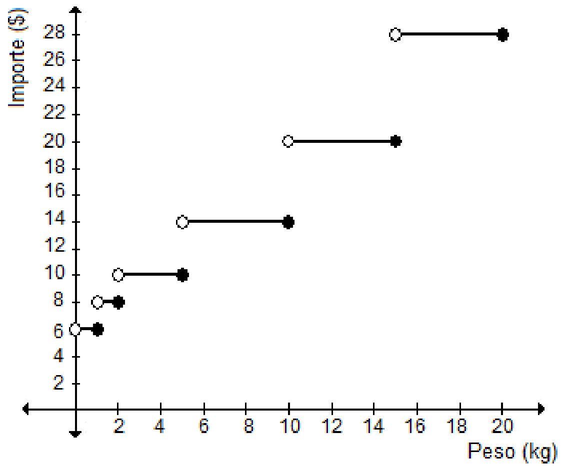
☑ **Ejemplo:** En la página del Correo Argentino figura el costo de envío de encomiendas usando Línea Pack Plus.[2] Estos datos están representados en la siguiente tabla:

Tipo	Importe
Caja N° 1 - hasta 1kg	$6
Caja N° 2 - hasta 2kg	$8
Caja N° 3 - hasta 5kg	$10
Caja N° 4 - hasta 10kg	$14
Caja N° 5 - hasta 15kg	$20
Caja N° 6 - hasta 20kg	$28

Puede definirse la función que representa los valores de esta tabla como sigue:

$$I : (0;20] \to \Re \,/\, I(x) = \begin{cases} 6 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 8 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ 10 & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \\ 14 & \text{si} \quad 5 < x \le 10 \\ 20 & \text{si} \quad 10 < x \le 15 \\ 28 & \text{si} \quad 15 < x \le 20 \end{cases}$$

donde x representa el peso de la encomienda e $I(x)$, el importe del envío. A este tipo de funciones se les llama Escalonadas. Su gráfica es la siguiente:



En este caso la función es constante por intervalos; pero si observamos todo su dominio la función es creciente (en sentido amplio-no estricto).

Simbólicamente:

$$\text{Si } x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)$$

---

[2] http://www.correoargentino.com.ar/precios/encomiendas/nacionales Disponible: 15/06/2012

Lee atentamente los siguientes conceptos:

Máximo y Mínimo Absoluto

✓ Se dice que una función $f(x)$ posee un **máximo absoluto** en un valor a del dominio, si y solo si para todo x perteneciente al mismo, la imagen de x es menor o igual que la de a. El valor máximo absoluto de la función es la imagen de a.

$f(a)$: máximo absoluto de $f(x) \Leftrightarrow f(a) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de $f(x)$.

✓ Se dice que una función $f(x)$ posee un **mínimo absoluto** en un valor b del dominio, si y solo si para todo x perteneciente al mismo, la imagen de x es mayor o igual que la de b. El valor mínimo absoluto de la función es la imagen de b.

$f(b)$: mínimo absoluto de $f(x) \Leftrightarrow f(b) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de $f(x)$.

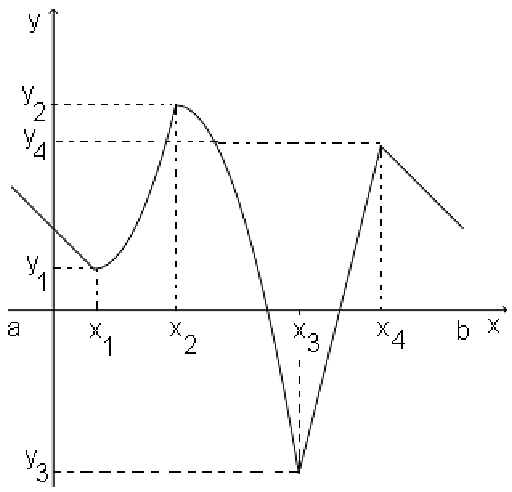
Máximos y Mínimos Relativos

✓ Se dice que una función $f(x)$ posee un **máximo relativo** en un valor c del dominio, si y solo si para todo x suficientemente próximo a c, la imagen de x es menor o igual que la de c. El valor máximo relativo de la función es la imagen de c.

$f(c)$: máximo relativo de $f(x) \Leftrightarrow f(c) \geq f(x)$ para todo x suficientemente próximo a c.

✓ Se dice que una función $f(x)$ posee un **mínimo relativo** en un valor d del dominio, si y solo si para todo x suficientemente próximo a d, la imagen de x es mayor o igual que la de d. El valor mínimo relativo de la función es la imagen de d.

$f(d)$: mínimo relativo de $f(x) \Leftrightarrow f(d) \leq f(x)$ para todo x suficientemente próximo a c.



Considerando la función representada a la izquierda con dominio [a ; b]:

En $x = x_2$ la función posee un máximo absoluto.

El máximo absoluto es $y = f(x_2) = y_2$

En $x = x_4$ la función posee un máximo relativo.

El máximo relativo es $y = f(x_4) = y_4$

En $x = x_3$ la función posee un mínimo absoluto.

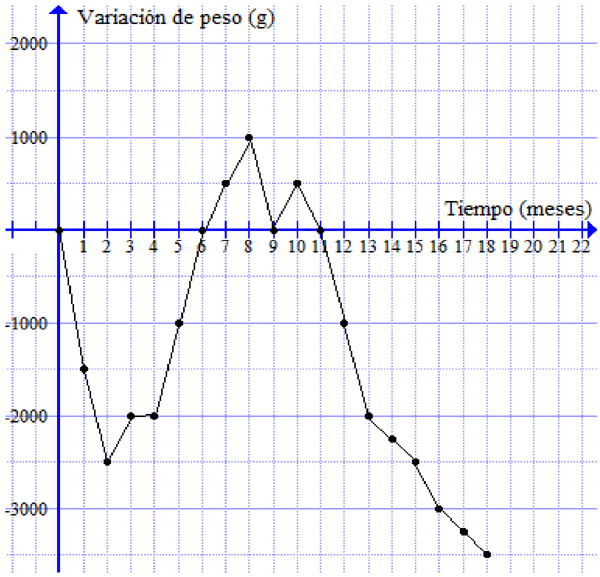
El mínimo absoluto es $y = f(x_3) = y_3$.

En $x = x_1$ la función posee un mínimo relativo.

El mínimo relativo es $y = f(x_1) = y_1$.

Situación3:

Una nutricionista registra una vez al mes, en un gráfico cartesiano, la variación del peso en gramos de sus pacientes en función del tiempo. El gráfico siguiente corresponde a una señora que comenzó la dieta con 98 [kg]. Tengamos en cuenta que el punto (1 ; -1500) nos indica que en el primer mes de tratamiento la señora bajó 1500 [g], es decir que, estaría pesando 96,5 [kg].



Observando la gráfica responde o completa los ítems siguientes.

a) Variable dependiente: …………………...   Variable independiente: ………………..……..

b) ¿Cuánto pesaba en el tercer mes de tratamiento?

c) El punto cuya ordenada es el máximo absoluto de la función es: …………… Interpreta su significado.

d) ¿En qué mes esta paciente alcanzó su menor peso?

e) La función crece en los siguientes intervalos de tiempo: ……………………………….

La función decrece en los siguientes intervalos de tiempo:…………………………..

La función se mantiene constante en los siguientes intervalos de tiempo: ……………

f) ¿En qué meses la paciente volvió a pesar lo mismo que al comenzar el tratamiento?

g) ¿Durante qué meses se mantuvo por debajo de su peso?, ¿Y por arriba?

El ítem f) hace referencia a la intersección de la función con el eje de las abscisas, recordemos consecuentemente lo siguiente:

✓ Una función tiene un **cero o raíz** en x = a si y sólo si f(a) = 0. En la gráfica, los ceros son las abscisas de los puntos de contacto de la función con el eje x.

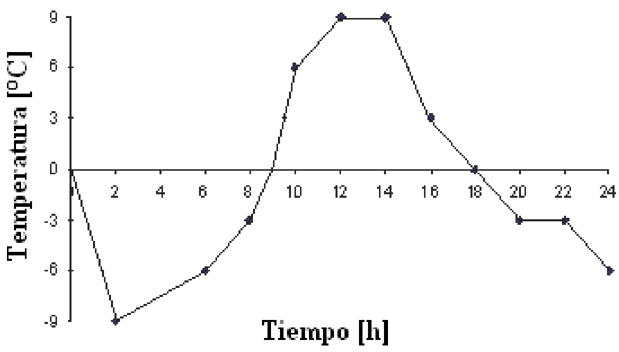
✓ Una función tiene **ordenada al origen** m si y sólo si f(0) = m. En la gráfica, la ordenada al origen es la ordenada del punto de intersección de la función con el eje de las ordenadas.

El último ítem hace referencia a los siguientes conceptos:

✓ Llamaremos **intervalo de positividad** a un *subconjunto del dominio* cuyas imágenes son números positivos. De igual modo, el **intervalo de negatividad** es un *subconjunto del dominio* cuyas imágenes son números negativos.

ACTIVIDAD 3

En un pueblo del interior se han tomado distintas mediciones de la temperatura a lo largo de un día de Julio. Éstas vienen reflejadas en la gráfica:



Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la variable independiente?, ¿Cuál es la dependiente?

b) ¿Cuál es el dominio de esta función?, ¿Cuál el conjunto imagen?

c) ¿Cuáles son las intersecciones con los ejes coordenados?, ¿Qué significado tienen en el contexto del problema?

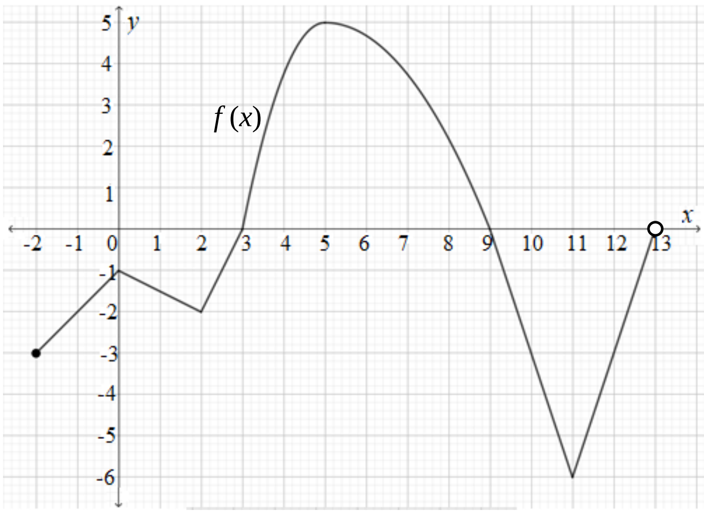
d) ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura es bajo 0 [°C]?

Completa el siguiente enunciado de modo que sea verdadero:

La temperatura se mantiene constante en ………………………….., desciende en …………… ……………………….. y asciende en ……………………………………

ACTIVIDAD 4

Observando la representación gráfica de la función *f(x)*, completa los siguientes ítems:



a) Dominio:…………………………

b) Conjunto imagen:…………….....

c) Raíces:……………………..……….

d) Intersecciones con el eje x: ……………………………………

e) Ordenada al origen:……………..

f) Intersección con el eje y:……….

g) Intervalos de crecimiento: ……………………………………

h) Intervalos de decrecimiento: ……………………………………

i) Intervalos de positividad:…………………………………………………………..……..

j) Intervalos de negatividad:………………………………………………………..…....

k) Mínimo Relativo:…………………………… l) Mínimo Absoluto:………………………...

m) Máximo Relativo:………………………… n) Máximo Absoluto:…………………...….

Volvamos a la gráfica de María en la situación 1.

I. Calcula con qué velocidad media ha ido María de casa al cole.

II. Imagínate que María hubiera pedaleado todo el camino con esa velocidad media, ¿qué aspecto tendría su gráfica entonces? Dibújala en la cuadrícula.

III. Responde: ¿Con qué tipo de funciones se relaciona la gráfica que dibujaste?

IV. Escribe la ecuación correspondiente y explica qué indica cada uno de los parámetros de la función que escribiste.

La fórmula que escribiste sirve de modelo para la situación planteada.

¿Qué es MODELAR?

Modelar es el arte de expresar la realidad, empleando el lenguaje matemático.

La matemática permite la elaboración de modelos matemáticos, lo que posibilita una mejor comprensión, simulación y previsión del fenómeno estudiado o de la situación problemática de interés.

Un modelo puede ser formulado en términos familiares, tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, etc.

Por otro lado, cuando se propone un modelo, éste proviene de aproximaciones o abstracciones realizadas para poder entender mejor un fenómeno. Sin embargo, no siempre tales aproximaciones están de acuerdo con la realidad. Sea como sea, un modelo matemático retrata, aunque con una visión simplificada, aspectos de la situación investigada.

Analicemos con más profundidad otros modelos.

Situación 4

Supone que has obtenido un empleo como vendedor o vendedora y que tu sueldo dependerá del número de unidades que vendas cada semana, por cada unidad vendida recibirás $50. Aún si no logras ninguna venta, de todas maneras, tendrás un salario semanal de $600.

I) Completa la tabla, de acuerdo a las unidades vendidas:

Unidades vendidas por semana	Salario recibido por semana
1	50.1 + 600 = 650
2	
3	
u	

II) Denotando con f(u) al salario recibido por semana, escribe la expresión que lo relaciona con las unidades vendidas por semana: …………………………………… f(u) está en función de u; donde u es la variable ……………………… y f(u) la variable …………………...

III) Determina el dominio, codominio y conjunto imagen de f.

IV) Representa en un gráfico cartesiano la función que relaciona las unidades vendidas con el salario semanal. ¿Qué obtuviste?

Situación 5

Los grados Celsius [°C] y los grados Fahrenheit [°F] están vinculados por la ecuación:

$$9C - 5F + 160 = 0.$$

I) Despeja F en función de C: F(c) = …………………………..

II) Si la temperatura normal de una persona es de 37 [°C], halla los grados Fahrenheit equivalentes. El punto (37 ; ….) pertenece a la función F(c).

III) Un día de invierno la temperatura en Nueva York es de 14 [°F], calcula cuántos grados Celsius equivale. Completa: el punto (… ; 14) pertenece a la función F(c).

IV) Construye el gráfico que muestra los °F en función de los °C y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué curva obtienes?

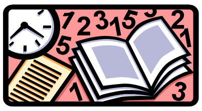
b) ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿cuál es el conjunto imagen?

c) ¿A cuántos °F equivale 0 [°C]? , ¿A cuántos °C equivalen 0 [°F]?, ¿Qué representan gráficamente los valores obtenidos?

V) Responde: ¿Existe proporcionalidad entre la temperatura en °F y la temperatura en °C?

VI) Completa la siguiente tabla y obtiene una conclusión.

Temperatura en °C		Temperatura en °F		
Intervalo	Variación (Δ C)	Intervalo	Variación (Δ F)	Variación de temp. en °F con respecto a la Variación de temp. en °C (Δ F/ Δ C)
[0 ; 1]	1	[32 ; 33,8]	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}\Big/1 = \frac{9}{5}$
[2 ; 5]	…..	…..	……	
[10 ; 15]	…..	…..	……	



Recuerda que:

✓ Una función es lineal cuando: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \in \Re, \quad \Delta x \neq 0$.

La constante m se denomina pendiente o parámetro de dirección.

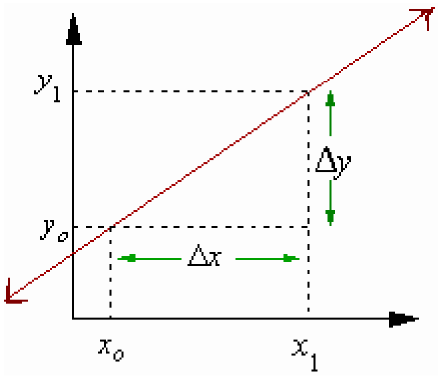
Si tenemos que $(x\,,y)$ es cualquier punto de la gráfica de una función lineal y $(x_1\,,y_1)$ un punto dado de la misma, podemos reemplazar estos datos en:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \quad \text{con } \Delta x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = m \quad \text{con } x \neq x_1$$

luego, mediante procedimientos algebraicos, obtenemos: $y = m\,x + h$ con $h \in \Re$.

✓ Llamaremos **Función Lineal** a toda función cuya ley de formación sea una expresión del tipo:

$$y = f(x) = m\,x + h.$$



Donde m es la **pendiente** o parámetro de dirección y h se denomina **ordenada al origen** o parámetro de posición.

✓ Sólo si el dominio es continuo la función lineal representa una recta, semirrecta o segmento. Cuando el dominio es discreto la función lineal queda representada por puntos de ella.

✓ Forma explícita: $y = m\,x + h$ con $m, h \in \Re$

✓ Forma implícita: $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \Re\,(b \neq 0)$. Despejando la variable *"y"* obtenemos la explícita.

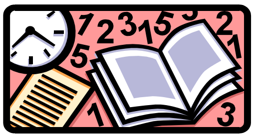
✓ A estas **funciones** también se las conoce como **polinómicas de primer grado y de grado cero o constante** (en el caso de pendiente nula). La función polinómica de primer grado es aquella que a cada número real x le corresponde el número real $mx + h$, donde m y h son dos números reales con $m \neq 0$.

ACTIVIDAD 4

Grafica las siguientes funciones lineales (con $y = f(x): \Re \rightarrow \Re$) y concluye de qué modo influyen los parámetros m (pendiente) y h (ordenada al origen) en la representación gráfica.

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = \frac{1}{2}x$ d) $y = 2x + 4$ e) $y = -3x + 1$ f) $y = \frac{1}{3}x - 5$

g) $y = -\frac{2}{3}x + 3$ h) $y = -x + 7$ i) $y = \frac{3}{2}x - 2$ j) $y = \frac{1}{2}x - 3$ k) $y = 3$



Recuerda que:

En la función $f:\ \Re \rightarrow \Re \,/\, y = f(x) = m\,x + h$:

✓ El parámetro h, ordenada al origen, nos indica dónde se produce la intersección de la recta con el eje …..……….Esto tiene lugar en el punto (…; …).

✓ El parámetro m, pendiente, nos brinda mucha información:

- Nos indica la variación que se produce en el eje y para cierta variación en el eje x (eje de las abscisas). Gráficamente mide la inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas.
- Si $m > 0$ la función es ……………………………..….
- Si $m < 0$ la función es ……………………………..….
- Si $m = 0$ la función es ……………….. y la recta es paralela al eje de las ……………

Si comparamos dos rectas cuyas ecuaciones son:

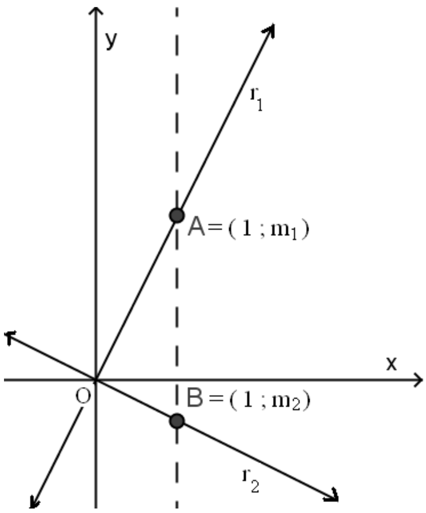
$$y = m_1x + h_1 \qquad y = m_2x + h_2$$

- Si $m_1 = m_2$ las rectas son ……………………….
- Si $m_1.m_2 = -1$ las rectas son …………………….
- Si $m_1 \neq m_2$ las rectas son ……………………..

Caso particular:

Las rectas $y = c$ y $x = d$ $(c,d \in \Re)$ son rectas perpendiculares; pero no puede considerarse el segundo ítem.

A continuación demostraremos que si dos rectas r_1 y r_2, con pendientes definidas m_1 y m_2, son perpendiculares entonces $m_1.m_2 = -1$.



Hipótesis: $r_1 \perp r_2$ **Tesis**: $m_1.m_2 = -1$

Demostración:

En la figura se ilustran dos rectas que se intersecan en el origen de coordenadas.

Si r_1 y r_2 tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces sus ecuaciones son:

$$r_1 : y = m_1 x \quad \text{y} \quad r_2 : y = m_2 x$$

El punto A pertenece a r_1 y el B a r_2.

Considerando el Teorema de Pitágoras se establece la siguiente igualdad:

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{OA}\right|^2 + \left|\overline{OB}\right|^2$$

$$(m_1 - m_2)^2 = 1^2 + m_1^2 + 1^2 + m_2^2$$

$$m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2$$

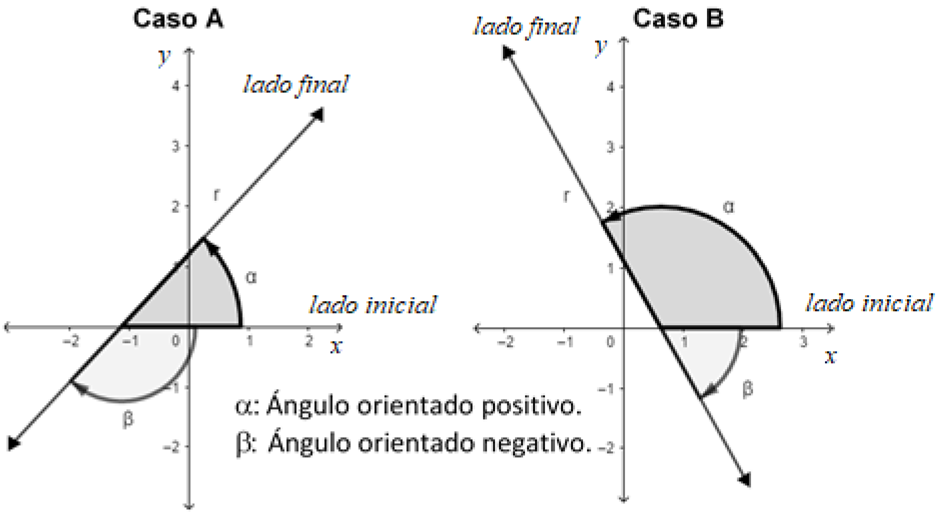
$$-2m_1m_2 = 2$$

$$m_1m_2 = -1$$

Aclaración: Si las rectas se intersecan en cualquier otro punto, para la demostración se consideran rectas paralelas a las dadas que pasen por el origen de coordenadas.

Ángulo de Inclinación de una Recta

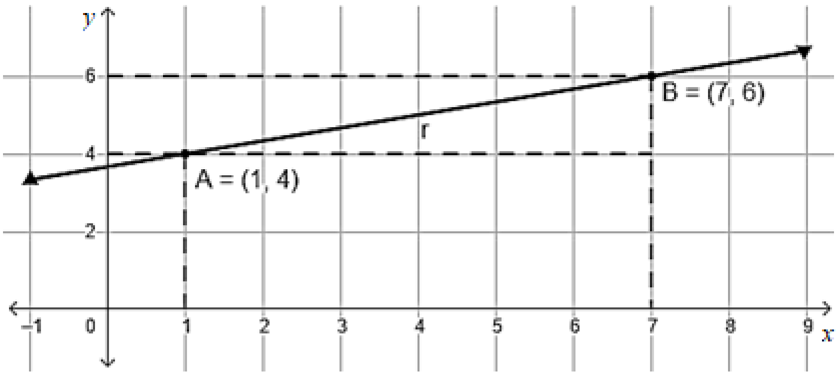
Definiremos como **ángulo de inclinación** de una recta, al ángulo orientado positivo que forma la misma con el eje de las abscisas, tomando como lado inicial la semirrecta incluida en dicho eje.



Observemos que en el Caso A: $tg(\alpha) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = m$, teniendo esto en cuenta podemos calcular la amplitud del ángulo de inclinación: $\alpha = arctg(m)$.

Recuerda que el ángulo de inclinación se toma en sentido positivo, por lo que en el Caso B: $\alpha = arctg(m) + 180°$ (*¿Por qué?*).

¿Cuál es la amplitud del ángulo de inclinación de la recta representada en la siguiente figura?



ACTIVIDAD 5

Obtiene el ángulo de inclinación de las rectas e), i) y k) de la actividad anterior.

Situación 6: ¿Cómo obtener analíticamente la expresión de una función lineal, al conocer dos puntos de la misma?

Sabiendo que una recta pasa por los puntos $(x_1 ; y_1)$ y $(x_2 ; y_2)$ y considerando la característica fundamental de estas funciones, podría obtenerse primero el valor de la pendiente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \quad \text{con } \Delta x \neq 0$$

Luego, teniendo en cuenta que ese valor es constante para cualquier punto de la recta:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \quad con\ x \neq x_1 \qquad \Rightarrow \qquad y = m \cdot (x - x_1) + y_1$$

Utilizando un poquito de álgebra…

$$y = m\,x + h$$

☑ **Ejemplo**:

Obtiene la expresión explícita de la recta que pasa por los puntos (1 ; 1) y (-1 ; 3).

a) Se puede obtener el valor de la pendiente: $m = \frac{3-1}{-1-1} = \frac{2}{-2} = -1$

Luego:

$y = -1 \cdot (x-1) + 1 \Rightarrow y = -x + 1 + 1 \Rightarrow y = -x + 2$.

La expresión explícita es $y = -x + 2$, y la expresión implícita: $x + y - 2 = 0$.

b) Otra forma podría ser plantear un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = m \cdot 1 + h \\ 3 = m \cdot (-1) + h \end{cases}$$

y hallar los valores correspondientes a m y h.

Modelación Matemática…

Se sabe que los grillos chirrían con mayor frecuencia a mayores temperaturas y con menor frecuencia a menores temperaturas. Por consiguiente, el número de chirridos está en función de la temperatura.

Los siguientes datos se reunieron y fueron registrados en una tabla.

Temperatura (ºC)	6	8	10	15	20
Nº de chirridos por minuto	11	29	47	75	109

Deduce el número de chirridos por minuto para una temperatura de 18 [°C].

Para resolver esta situación, ten en cuenta las siguientes orientaciones:

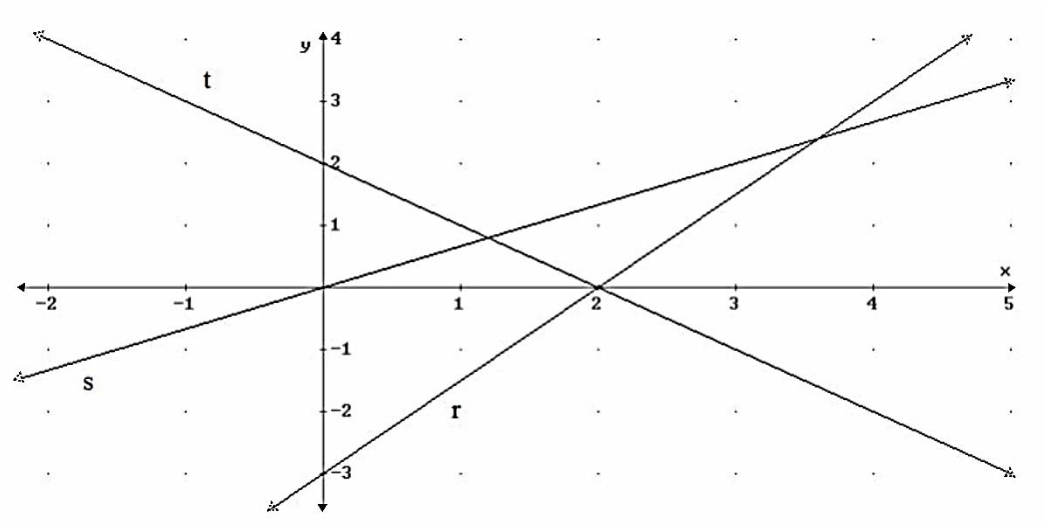
- Representa en un sistema cartesiano los datos.
- ¿Puede ajustarse una función lineal a los datos? De ser así, encuentra la ecuación de la función que los represente.

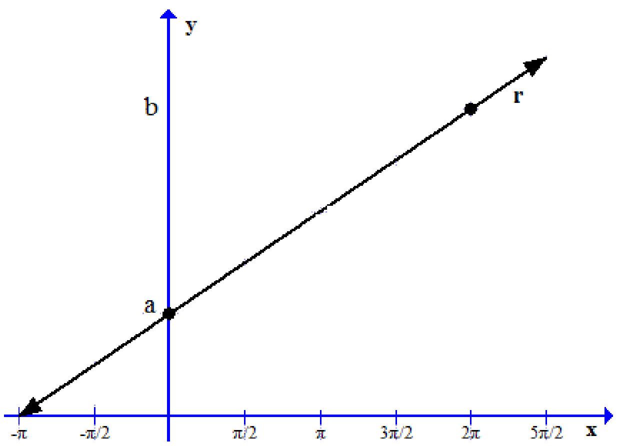
ACTIVIDADES DE FUNCIÓN LINEAL

1) Para cada una de las siguientes rectas (*t, s* y *r*) graficadas:

a) Determina su ordenada al origen y su pendiente.

b) Escribe la expresión explícita de la función que representan.





2) Teniendo en cuenta los datos del gráfico de la izquierda, determina la ecuación de la recta *r*.

3) Dada la siguiente función:

$$f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = y = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{k} \cdot x$$

Represéntala, en un sistema de coordenadas, según los datos que se dan en cada caso:

a) $x_0 \in \Re \wedge x_0 > 1, k \in \Re^+$

b) $x_0 \in \Re^+ \wedge x_0 < 1, k \in \Re^-$

c) $x_0 \in \Re^-, k \in \Re - \{0\}$

4) Dados los puntos A = (-2; -3) y B = (2; 1) y siendo r la recta que los contiene:

a) Obtiene la expresión explícita e implícita de la recta r.

b) Calcula la amplitud del ángulo de inclinación de la recta r.

c) Halla los puntos de intersección de r con los ejes coordenados.

d) Realiza representación gráfica de r conociendo su pendiente y su ordenada al origen.

5) Se sabe que el perímetro de un rectángulo mide 24 [cm]. Si denotamos con "b" la medida (en centímetros) de la base y con "H" la medida (en centímetros) de la altura, define la función H(b). Represéntala en un sistema de coordenadas cartesianas y determina el conjunto imagen de la misma.

6) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponden a funciones lineales? De las funciones lineales, ¿cuáles son crecientes o decrecientes?

a) $y = 5x + 3$ b) $y = \sqrt{x} + 3$ c) $f(m) = -2m - 8$

d) $-3y - 2 = x$ e) $x.y = 12$ f) $f(d) = 2d^2 - 5$

7) Demuestra algebraicamente que, si la pendiente es positiva o negativa la función lineal es creciente o decreciente respectivamente.

8) Halla analíticamente la ecuación de una función lineal sabiendo que:

a) Tiene pendiente -3 y raíz (o cero) x = 4. Rta: $y = -3x + 12$

b) Tiene ordenada al origen y = 4 y raíz x = -3. Rta: $y = \frac{4}{3}x + 4$

c) Pasa por los puntos (-1 ; 2) y ($\frac{1}{2}$; 5). Rta: $y = 2x + 4$

d) Tiene pendiente 9 y pasa por (-2 ; 5). Rta: $y = 9x + 23$

e) Tiene ordenada al origen y = -8 y pasa por (1 ; 4). Rta: $y = 12x - 8$

9) Obtiene la expresión implícita de la función lineal cuya gráfica pasa por el punto (-2 ; 3) y es paralela a la recta de ecuación: $2x - y - 2 = 0$. Encuentra el cero de la función obtenida.

10) En los siguientes ítems selecciona la respuesta correcta. Justifica en cada caso tu elección.

a) ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de la recta que interseca a los ejes coordenados en (5 ; 0) y (0 ; -6)?

i) $y = \frac{6}{5}x + 6$ ii) $6x - 5y = 30$ iii) $5x - 6y = 0$ iv) $y = 5x - 6$ v) Ning. de las anteriores

b) La ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a $4x + 6y + 5 = 0$ es:

i) $y = -\frac{2}{3}x$ ii) $y = -\frac{3}{2}x$ iii) $y = \frac{3}{2}x$ iv) Ninguna de las anteriores

c) ¿Cuál de las siguientes es la forma explícita de la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2; -3) y (-1 ; 6)?

i) $y = -3x + 3$ ii) $y = 3x + 3$ iii) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ iv) $y = -3x - 3$ v) Ning. de las anteriores.

d) La ecuación de la recta que pasa por el punto (2 ;- 3) y es paralela al eje y es:

i) x = -2 ii) y = 3 iii) y = -3 iv) Ning. de las anteriores

Responde: ¿Se trata de una función?

e) Indica en cuál de las siguientes rectas está el punto de coordenadas (1 ; 2):

i) y = 2x + 1 ii) y = 2 iii) 2x + y = 0 iv) x + 2y = 0 v) Ning. de las anteriores

Responde: ¿Cuál de ellas es creciente, decreciente o constante? Justifica.

11) Sabiendo que $r_1 : y = m_1 x + h_1$ y $r_2 : y = m_2 x + h_2$, completa los siguientes enunciados con “a veces”, “siempre” o “nunca” según corresponda.

a) Si $r_1 // r_2$ y ambas son perpendiculares al eje de las ordenadas, ... $m_1 = m_2$

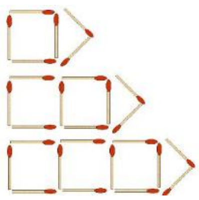
b) Si $h_1 \neq h_2$ .... $r_1 // r_2$.

c) Si $r_1 // r_2$ .... los ángulos de inclinación de ambas rectas son ángulos suplementarios.

d) Si $m_1.m_2 = -1$ .... $r_1 \perp r_2$.

e) Si $r_1 \perp r_2$ .... $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ siendo α_1 y α_2 los ángulos de inclinación de r_1 y r_2 respectivamente.

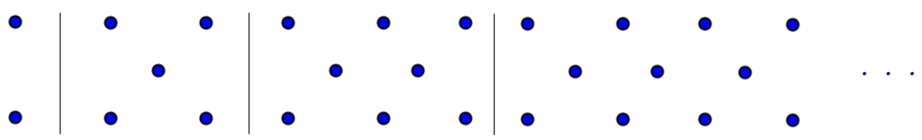
12) Se sabe que 2 rectas *r* y *s* se cortan en el punto (-1 ; 4) y que los valores de sus pendientes son, respectivamente, -3 y 2. Halla analíticamente las ecuaciones de las rectas *r* y *s*. Grafica ambas rectas en un mismo sistema cartesiano para verificar tu respuesta.



La ciencia se construye sobre la búsqueda de ***regularidades.*** *Entender y utilizar esos patrones constituye gran parte de la habilidad o competencia matemática.*

Las regularidades numéricas son series o sucesiones de elementos que tienen un patrón o regla de formación que permite definir o determinar cada elemento de la sucesión. El análisis cuidadoso de patrones y regularidades permite establecer generalizaciones. Identificar patrones y regularidades no basta, es importante además que los puedas describir y representar a través de diferentes formas para poder comunicar las conclusiones que se establezcan de las observaciones.

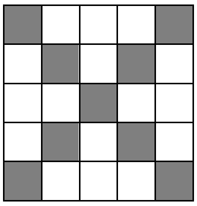
13) A continuación se muestra una secuencia de figuras, separadas por barras. Cada figura está compuesta por cierta cantidad de puntos dispuestos con una regularidad. La secuencia puede continuarse indefinidamente respetando esta regularidad.



a) La figura 1 tiene 2 puntos; la figura 2 tiene 5 puntos. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 10? ¿Y la figura 75? ¿Habrá en esta secuencia alguna figura que tenga exactamente 90 puntos?

b) ¿Cuál es la fórmula que sirve para calcular la cantidad de puntos que tiene una figura cualquiera de esta secuencia en función del lugar que ocupa?

14) Un cuadrado, formado por cuadraditos, está pintado según el siguiente modelo:



a) ¿Cuántos cuadraditos quedarán pintados en un cuadrado de 9x9? ¿Y en uno de 13x13?

b) ¿Es posible encontrar una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadraditos que quedarán pintados si el cuadro es de nxn?

15) Dados los siguientes puntos en el plano (-3 ; 4) y (6 ; -2), determina analíticamente:

a) la ecuación de la recta *r* que los contiene.

b) la ecuación de la recta *s* perpendicular a *r* que pasa por el origen de coordenadas.

c) el punto P intersección de *r* y *s*.

d) la distancia entre P y el punto de la recta *r* cuya ordenada es nula.

e) la distancia entre el punto (8 ; 1) y la recta *r*.

f) Grafica ambas rectas en el mismo sistema de coordenadas cartesianas y verifica los 3 ítems anteriores.

16) Dadas las coordenadas de los puntos P = (200 ; 156) y Q = (320 ; 230):

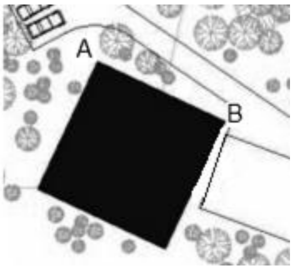
a) Halla la ecuación de la recta *r* que pasa por P y Q.

b) Halla la ecuación de la recta *s* que cumple las siguientes condiciones: es paralela a la recta *r*, se encuentra a una distancia de 4 u de dicha recta y su ordenada al origen es menor que la de la recta *r*.

17) Dada la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$ y un punto P de la misma, cuya abscisa es $x = -15$, obtiene las coordenadas del punto Q, perteneciente a la recta dada, sabiendo que la distancia entre P y Q es 7 u y la abscisa del punto Q es menor a la del punto P.

18) Deduce las coordenadas del punto medio de un segmento en el plano.

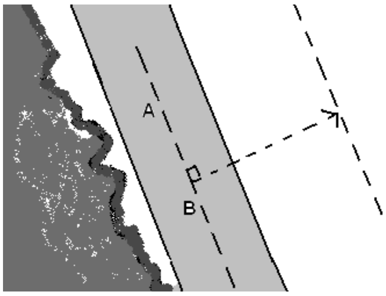
Conocer las coordenadas de determinados puntos (obtenidos en la observación de campo), le permite a un topógrafo, entre otras cosas:
Hacer una representación gráfica de una zona, conocer su geometría, conocer su altimetría y calcular una superficie, una longitud, un desnivel, etc.



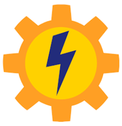
19) De un edificio de base cuadrada se conocen las coordenadas de dos de sus esquinas:

A = (1095,176 ; 1095,013) B = (1153,050 ; 1079,181).

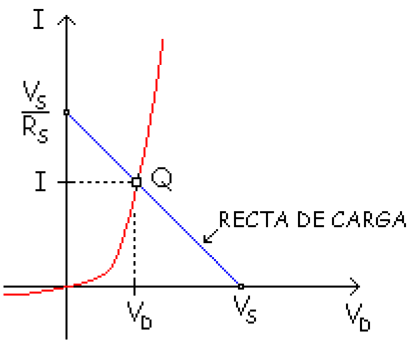
Obtiene las coordenadas de las otras dos.



20) Se quiere desplazar un camino recto que da a la costa de un río, 20 metros tierra adentro, por la erosión que provoca el agua en la costa. Se conocen las coordenadas de dos puntos sobre el camino a trasladar A = (1030 ; 2425) y B= (1160 ; 2100). Obtiene las coordenadas de dos puntos sobre el camino nuevo.



21) La recta de carga es una herramienta que se emplea para hallar el valor de la corriente y la tensión del diodo (componente electrónico de dos terminales que permite la circulación de la corriente eléctrica a través de él en un solo sentido). Con los datos de la figura:



a) obtiene la pendiente de la recta.

b) demuestra que la ecuación implícita de la recta de carga es:

$$V_D + I.R_S - V_S = 0$$

22) La cantidad de calor, Q, cedido (o absorbido) por un cuerpo depende del incremento de la temperatura t, de su masa m y de su propia naturaleza. La naturaleza de cada sustancia se refleja en una magnitud física llamada calor específico, c_e. La fórmula que relaciona el calor con los tres factores citados es:

$$\Delta Q = m \cdot c_e \cdot \Delta t \qquad \text{o} \qquad Q_f - Q_i = m \cdot c_e \cdot (t_f - t_i)$$

Considerando $Q_i = 0$, podemos escribir el calor final en función de la temperatura final como sigue:

$$Q(t) = m \cdot c_e \cdot (t - t_i)$$

Responde:

a) ¿ $Q(t)$ es directamente proporcional a la masa? ¿Por qué?

b) ¿ $Q(t)$ es directamente proporcional al incremento de temperatura? ¿Por qué?

c) ¿ $Q(t)$ es directamente proporcional a la temperatura final con $t_i \neq 0$? ¿Por qué?

d) Representa en un sistema de coordenadas cartesianas $Q(t)$, considerando $t_i > 0$.

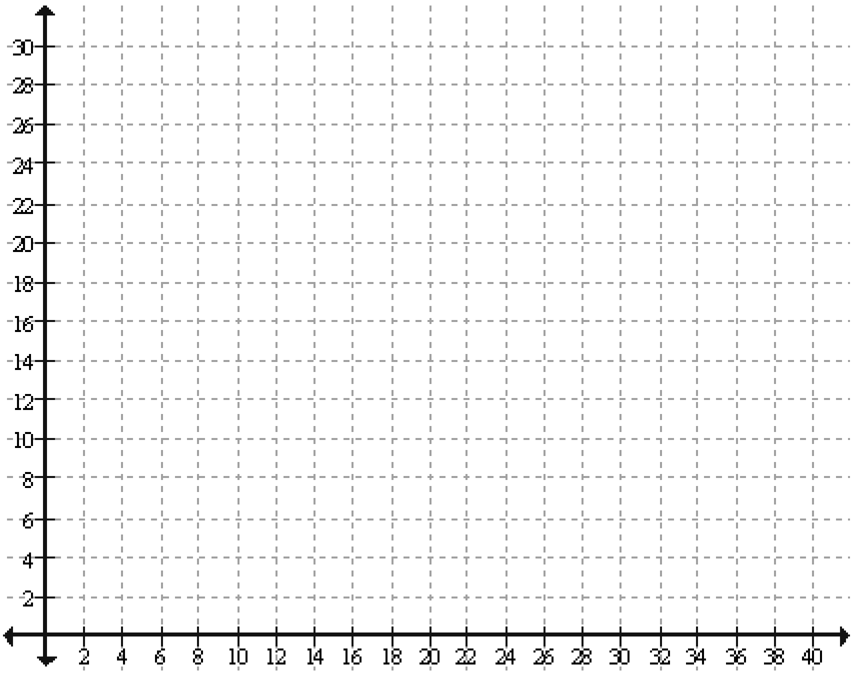
INTERPOLACIÓN LINEAL

En un laboratorio de FÍSICA se realizó un práctico con los objetivos de comprobar la existencia de la presión hidrostática en los líquidos y determinar mediciones de la presión con el manómetro en el laboratorio.

Al finalizar se elaboró la siguiente tabla:

Sustancia: Alcohol		
Medición	Volumen (ml)	Masa (g) de la sustancia (sin el recipiente)
1	10	5,1
2	20	14,86
3	30	20,5
4	40	30,86

a) Representa los datos de la tabla, Masa en función del Volumen, en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas.



b) ¿Podrías obtener la cantidad, exacta, de masa que le corresponde a 13 [ml] y a 36 [ml]?

c) ¿Podrías estimar los valores pedidos en el ítem anterior? ¿Cómo lo harías?

....
....

d) ¿Son directamente proporcionales las variables Volumen y Masa? ¿Por qué?

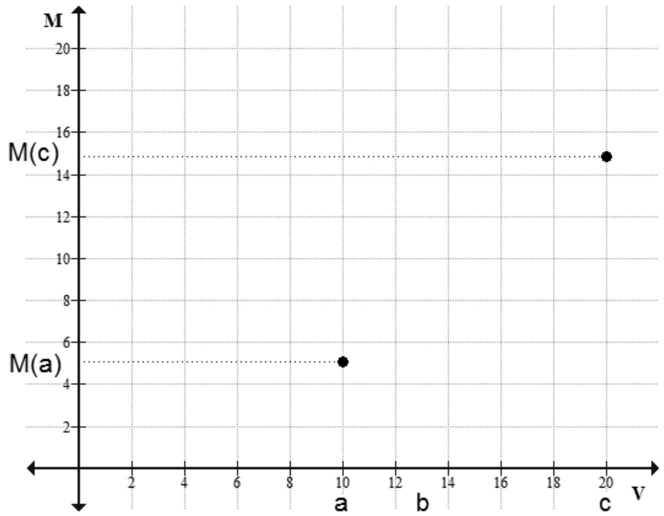
....
....

e) ¿Las variaciones de dichas variables, son proporcionales? Entonces, ¿estos datos podrían corresponderse con puntos pertenecientes a una recta?

....
....

Si bien no podemos asegurar el valor exacto de la masa correspondiente a un volumen de 13 [ml], podemos realizar el siguiente análisis:

Teniendo en cuenta parte del gráfico que construiste, podemos observar que se conocen los valores de a y c, y sus respectivas imágenes. El objetivo es conocer la imagen correspondiente del valor b, ubicado entre a y c.



f) Representa, en el gráfico dado, un posible comportamiento de la función entre los puntos de abscisas $V = a$ y $V = c$.

g) De las representaciones que se pueden realizar, ¿cuál sería la más sencilla? ¿Por qué?

....

....

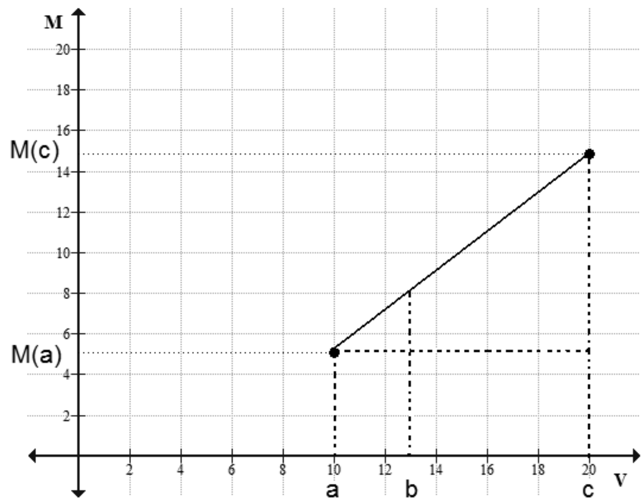
Al tener sólo los puntos (a ; $M(a)$) y (c ; $M(c)$) no sabemos exactamente cómo se comporta la función entre ellos; pero podemos suponer que son los extremos de un segmento de recta. Al hacerlo estamos considerando que el cociente de incrementos de ambas variables, $\frac{\Delta M}{\Delta V}$, se mantiene constante para cualquier par de puntos que pertenezca al intervalo $[a\,;c]$.

Teniendo en cuenta los datos de la situación nos quedaría:

$$\frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{M(c) - M(a)}{c - a} = \frac{M(b) - M(a)}{b - a}$$

$$\frac{14.86 - 5.1}{20 - 10} = \frac{\text{M}(13) - 5.1}{13 - 10}$$

De la igualdad anterior se obtiene que la estimación para $M(13)$ es 8,03 [g].



Lo que estuviste realizando para estimar la masa correspondiente al volumen solicitado se conoce como Interpolación Lineal.

Conocidos los valores *f(a)* y *f(b)* de una función *f(x)* en los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$ podemos calcular aproximadamente los valores en puntos intermedios, sustituyendo el arco de curva por la cuerda. Esto equivale a admitir que los incrementos de ordenadas son proporcionales a los intervalos de abscisas. A esto se denomina Interpolación Lineal.

h) Estima el otro valor pedido en el ítem b).

ACTIVIDADES

1) En una tabla pueden leerse los siguientes datos:

Presión [bar]	Temperatura [°C]
0,5	81,35
0,6	85,95

Estima, mediante interpolación lineal, la temperatura para un valor de la presión de 0,55 [bar].

2) En la siguiente tabla se recogen las presiones de vapor de agua en función de la temperatura:

Temperatura [C°]	Presión [mm Hg]
8	9,3
25	33,2

Estima, mediante interpolación lineal, la presión del vapor de agua a los 20 [°C].

3) En un experimento para determinar la temperatura corporal, como resultado de la administración de un nuevo fármaco, se obtuvieron los siguientes valores, en función del tiempo transcurrido desde su toma:

Tiempo [h]	0	1	2	3
Temperatura [°C]	36,8	37,2	38,3	38,9

a) Estima, mediante interpolación lineal, la temperatura corporal aproximada a las 2 horas y 45 minutos de la administración del fármaco:

a_1) en el intervalo [2 ; 3]. a_2) en el intervalo [0 ; 3].

b) ¿Cuál de las dos estimaciones consideras más precisa? ¿Por qué?

4) Midiendo la temperatura ambiente a distintas horas del día hemos obtenido la siguiente tabla:

Tiempo [h]	6	8	10	12	14	16	18	20
Temperatura [°C]	7	9	12	18	21	19	15	10

a) Estima, mediante interpolación lineal, la temperatura aproximada a las 13 horas y 20 minutos de la administración del fármaco:

a_1) en el intervalo [12 ; 14]. a_2) en el intervalo [6 ; 20].

b) ¿Cuál de las dos estimaciones consideras más precisa? ¿Por qué?

5) Como líquido refrigerante se emplea generalmente el agua por ser el líquido más estable y económico, pero se sabe que tiene grandes inconvenientes ya que a temperaturas de ebullición el agua es muy oxidante y ataca las partes metálicas en contacto con ella. Por otra parte y debido a la dureza de las aguas (mucha cal) precipita gran cantidad de sales calcáreas que pueden obstruir las canalizaciones y el radiador. Otro de los inconvenientes del agua es que a temperaturas bajo cero se solidifica, aumentando de volumen, lo que puede producir la rotura de los conductos por los que circula. Es por estos motivos que se utilizan anticongelantes. El principal aditivo de estos es el "etilenglicol". El anticongelante puro se mezcla con agua destilada en distintas proporciones que van a determinar distintos puntos de congelación:

Anticongelante puro (%)	Punto de congelación [°C]
20	-10
33	-18
44	-30
50	-36

Mediante interpolación lineal estima:

a) El punto de congelación si el líquido tiene un 37 % de anticongelante puro.

b) El porcentaje de anticongelante puro si el punto de congelación es -15 [°C].

6) *Rendimiento de un proceso productivo en función de la temperatura.*

En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados. El rendimiento del proceso depende de la temperatura. Se dispone de los siguientes datos:

T [°C]	150	160	170	180	190	200	210
R (%)	35,5	37,8	43,6	45,7	47,3	50,1	51,2

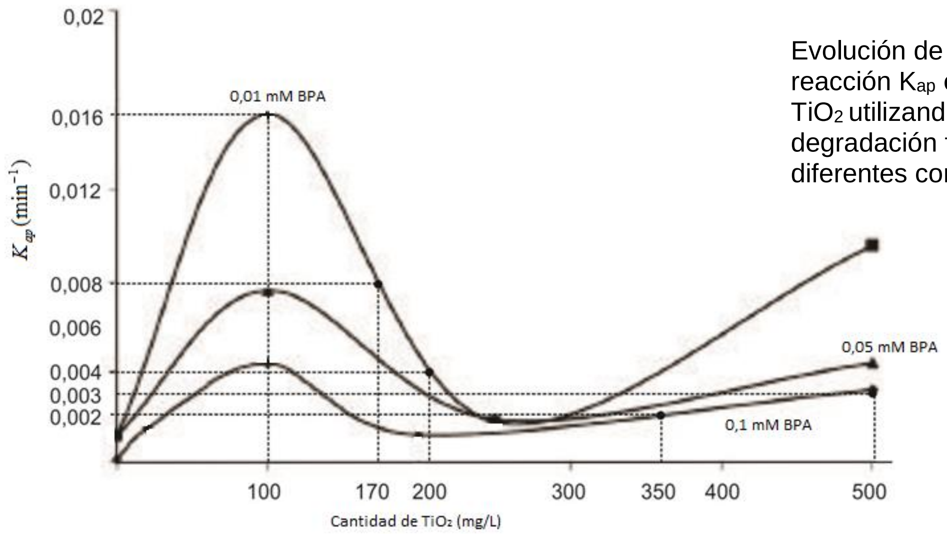
Se considera un rendimiento óptimo al que va de 38.5 a 45, por lo que la planta trabaja a 175 [C°]. Si la temperatura de trabajo cae a 162 [°C] por una avería, ¿será el proceso satisfactorio hasta que sea reparada?

7) En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras que están determinados por oscilaciones amortiguadas. Se realizó un experimento en cierta estructura y se obtuvieron los siguientes datos:

t: tiempo	D(t): desplazamiento
0,1	9,22
0,5	8,18

despreciando las unidades, estima que desplazamiento se tiene para t = 0,2.

8) En el siguiente gráfico se muestra el efecto de la cantidad de dióxido de titanio (TiO_2) en la cinética de fotodegradación de una solución acuosa.



Evolución de la constante aparente de reacción K_{ap} en función de la cantidad de TiO_2 utilizando en los experimentos de degradación fotocatalítica de BPA con diferentes concentraciones iniciales

Mediante interpolación lineal estima:

a) la cantidad de dióxido de titanio para la constante aparente de reacción K_{ap}=0.012 cuando la concentración inicial es 0.01 [mM] BPA.

b) la constante aparente de reacción K_{ap} cuando la concentración inicial es 0.1 [mM] BPA y la cantidad de dióxido de titanio es 460 [mg/L].

9) Al construir un túnel, se estudian las ventajas e inconvenientes desde el punto de vista del usuario. Una de las cuestiones que se estudian son los ajustes de la Intensidad Máxima de Servicio por Reducción en la Anchura de los Carriles y/o Obstáculos Laterales. Las disminuciones en la Intensidad se tienen en cuenta por medio de un factor ***fa*** que afecta directamente a la intensidad de servicio (ver Tabla). Este factor depende, entre otras cosas, de la distancia de la calzada a los obstáculos laterales y de si hay obstáculos a ambos lados de la calzada o no.

Distancia de la calzada al obstáculo [m]	1.8	1.5	1.2	0.9	0.6	0.3	0
Factor de ajuste ***fa***	0.97	0.96	0.96	0.95	0.94	0.9	0.87

Estima, usando interpolación lineal, el Factor de ajuste fa para una distancia de 70 [cm].

Función y Ecuación Cuadrática

Observa las siguientes imágenes... ¿Qué figura se repite en todas ellas?

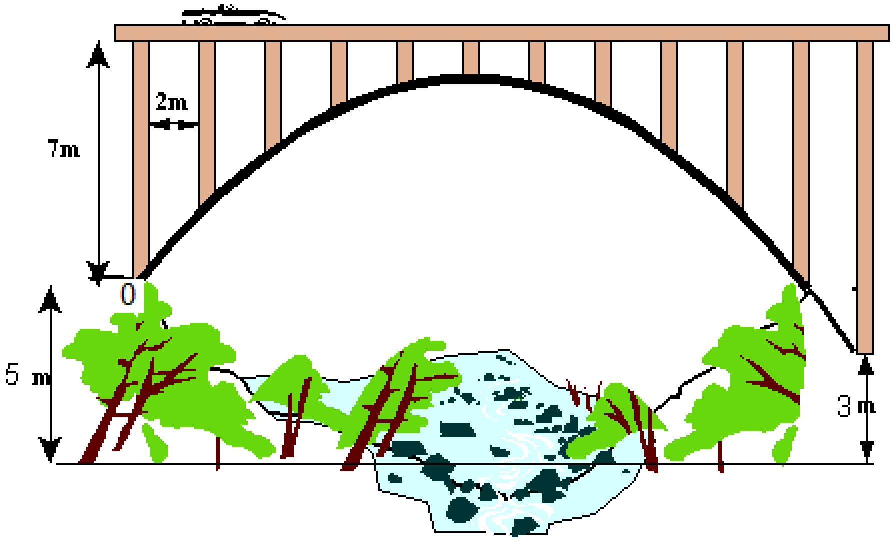
En el siglo XIX, con la invención del acero industrial, se empezaron a construir grandes puentes colgantes, como éste de Clifton, en Inglaterra. Primero se levantan las torres de sus extremos; luego se tiran dos grandes cables, que cuelgan entre ellas; y, por último, se colocan los tirantes, que atan los cables al tablero o vía de paso del puente.

Se trata de una curva muy interesante y muy común, llamada ***Parábola***. Aparece en numerosos fenómenos naturales relacionados con distintas ciencias, como la biología, la física (cuando se describe el movimiento de un proyectil disparado por un cañón), la economía, la astronomía, etc. o, cuando menos frecuentes, en nuestras ciudades: el caño de una fuente, una trayectoria descrita por un balón de fútbol, entre otros.

Para ir pensando…

Con los conceptos que desarrollaremos en esta unidad podrás resolver situaciones problemáticas como la siguiente:

Calcula la longitud de los pilares (separados entre sí 2 metros) de este puente sabiendo que el arco que lo sustenta es parabólico. (Nota: Situar el eje de coordenadas en el lugar señalado con la 0).



Modelos Cuadráticos

Situación 1:

Se dispone de 60 metros de reja para cercar un huerto rectangular, uno de cuyos lados será la pared de una casa. Determina las dimensiones del huerto de modo que el área que abarque sea máxima.

Te proponemos seguir los siguientes incisos para analizar y resolver la situación planteada.

Realiza una figura de análisis donde queden reflejados los datos del problema.

a) Responde: ¿Cuáles son las variables que intervienen en el problema?

b) Distingue las variables independiente y dependiente e indica los valores que pueden tomar.

c) Responde: - La relación entre dichas variables, ¿es funcional?

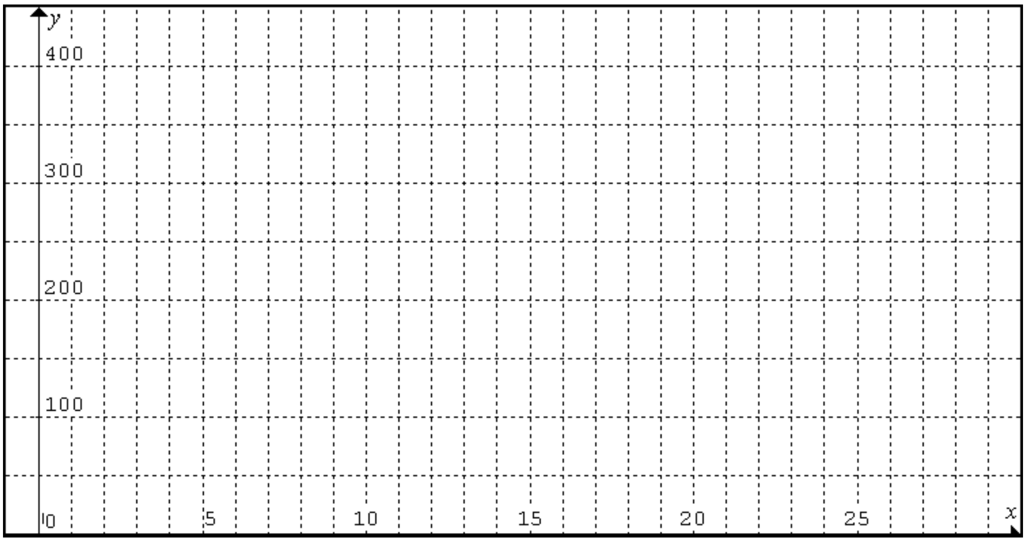
- ¿Cuál es la ley de formación que relaciona dichas variables?

d) Completa la siguiente tabla de acuerdo a la expresión encontrada.

V.I. (…)	0,1	1	5	12	15	17	20	25	29,9
V.D. (…)	…..	….	…….	……….	……..	………	……	……	………

e) Calcula en distintos intervalos $\frac{\Delta VD}{\Delta VI}$ y anticipa si el gráfico resulta una línea recta o curva.

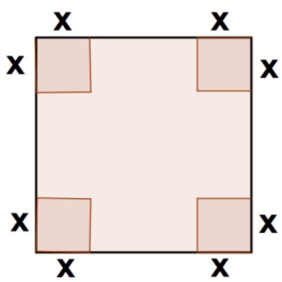
f) Ubica los pares ordenados encontrados en un sistema de ejes cartesianos y une los puntos.



g) De acuerdo a lo analizado en los ítems anteriores, resuelve la situación planteada.

Situación 2:

Con láminas de chapa cuadradas de 100 [cm] de lado hay que armar cajas (sin tapa) y, para ello, se recortará en cada esquina un cuadradito de lado x.



a) Calcula la medida de la superficie lateral de una caja en la que se recortarán cuadraditos de 5 [cm] de lado.

b) Las cajas se destinarán a uso publicitario, por lo que se necesita que su superficie lateral sea la máxima posible. Responde: ¿Cuánto medirá el área de los cuadraditos que se deberán recortar en las esquinas?

Situación 3: Una poesía con adivinanza

De los números naturales
sólo pocos se destacan,
particularmente notables
que a otros números opacan.

Números primos, cuadrados perfectos
son ejemplares singulares
de números selectos,
de inolvidables propiedades.

entre los números importantes
no soy yo la excepción,
seguro que me has visto antes
pero ahora adivina quién soy

Pues si mi propia raíz cuadrada
a mí mismo me restan,
por una gracia solo a mí reservada
el resultado es justo treinta.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las funciones que surgieron en las situaciones 1 y 2 son polinómicas, donde el polinomio vinculado es de grado dos. *La función polinómica de segundo grado* ***o función cuadrática*** *es aquella que a cada número real x le corresponde el número real* $a.x^2 + b.x + c$, *donde* a**,** b *y* c *son números reales cualesquiera, con la condición que* a *sea distinto de cero.*

En el planteo de la tercera situación, nos encontramos con una ecuación irracional que puede transformarse en una **ecuación cuadrática**, más adelante veremos cómo resolverla y nos dedicaremos un poco más a este concepto.

Definiremos a la **función cuadrática**, con dominio en el conjunto de los números reales, como sigue:

$$f : \Re \to \Re \,/ f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } \begin{cases} a \in \Re \wedge a \neq 0 & \text{"coeficiente cuadrático"} \\ b \in \Re & \text{"coeficiente lineal"} \\ c \in \Re & \text{"término independiente"} \end{cases}$$

Ésta es la **expresión polinómica** de la función cuadrática.

La curva que representa a esta función es continua y se llama **PARÁBOLA**.♣

¿Por qué la condición $a \neq 0$?

ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Para resolver problemas como los que vimos anteriormente o sacar conclusiones acerca de una función cuadrática que modeliza una determinada situación, es necesario conocer los

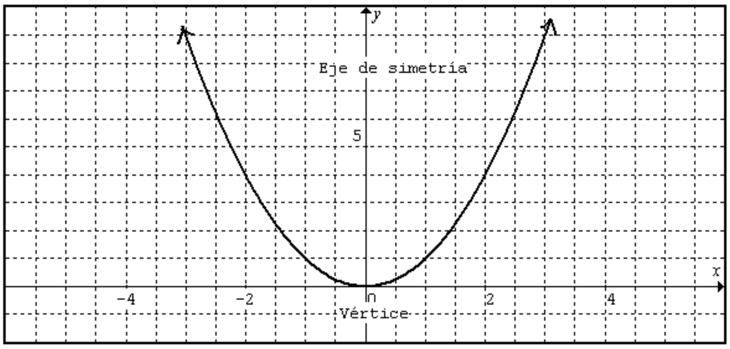
♣ Cuando el **dominio no es real**, la gráfica de la función no es continua. Su representación son sólo puntos en el plano.

elementos que la componen y las transformaciones que ésta experimenta de acuerdo a sus parámetros.

Si los coeficientes $b = c = 0$ y $a = 1$

$$f:\ \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2$$

Armando una tabla de valores y graficando en un sistema cartesiano, nos queda la curva representada a continuación.



Como se dijo antes, esta curva recibe el nombre de ***parábola***.

En ella podemos distinguir:

⇨ un **eje de simetría (E.S.)**, en este caso es el eje de las ordenadas y su ecuación es ....

⇨ **valores simétricos**; dos valores del dominio a y b son simétricos si tienen la misma imagen c. Da ejemplos de valores simétricos: .... A los puntos (a ; c) y (b ; c), se los denomina puntos simétricos respecto al E. S.

⇨ el **valor mínimo** de la función es ....; el punto donde se localiza se llama **vértice de la parábola** su abscisa no tiene simétrico y se encuentra en el medio de cualquier par de valores simétricos. Las coordenadas del vértice en este caso son:…………….

⇨ su **conjunto imagen (C.I.)**, es ....

⇨ que crece en .... y decrece en ....

⇨ es positiva en ………..........................

A continuación, puedes analizar las distintas transformaciones de $f(x) = x^2$.

ACTIVIDAD 1

a) Con ayuda de una tabla de valores o utilizando algún software, grafica en un mismo sistema cartesiano las siguientes funciones[3]:

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = 2x^2 \quad h(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad k(x) = -x^2 \quad j(x) = -3x^2$$

b) Observando lo que construiste, completa el siguiente cuadro:

[3] En adelante cada vez que se explicite la ley de formación de una función y no se especifique su dominio y codominio, se considerarán los más amplio.

CONCLUSIONES
El signo de a, en $f(x) = ax^2$, indica hacia dónde se dirigen las ramas de la parábola. Si $a > 0$, las ramas de la parábola abren hacia .... y la función posee un mínimo en la ordenada del vértice. En este caso decimos que la parábola es **cóncava hacia arriba**. Si $a < 0$, las ramas de la parábola abren hacia .... y la función posee un máximo en la ordenada del vértice. En este caso decimos que la parábola es **cóncava hacia abajo**.
El valor absoluto de a modifica la abertura de la parábola respecto de la gráfica de $f(x) = x^2$. Si $0 < \|a\| < 1$ la parábola es más .... Si $\|a\| > 1$ la parábola es más ....

ACTIVIDAD 2

a) Con ayuda de una tabla de valores o utilizando algún software, grafica en un mismo sistema cartesiano las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^2 + 1 \quad h(x) = -x^2 + 3 \quad k(x) = -x^2 - 2 \quad j(x) = x^2 - 4$$

b) Observando lo que construiste, charla con tus compañeros las características de estas funciones y completa los siguientes cuadros:

	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$k(x)$	$j(x)$
Conjunto Imagen					
Vértice					
Eje de Simetría					
Máximo					
Mínimo					
Crece en					
Decrece en					
Positiva en					
Negativa en					

CONCLUSIONES	
La gráfica de $f(x) = ax^2 + k$ es una parábola que se encuentra desplazada $\|k\|$ unidades: hacia ...., si $k > 0$ o hacia ...., si $k < 0$ respecto de la gráfica de $f(x) = ax^2$.	✓ Ecuación del eje de simetría: .... ✓ Coordenadas del vértice:.....................

ACTIVIDAD 3

a) Con ayuda de una tabla de valores o utilizando algún software, grafica en un mismo sistema cartesiano las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = (x + 1)^2 \qquad h(x) = (x - 3)^2$$

b) Observando lo que construiste, charla con tus compañeros las características de estas funciones y completa los siguientes cuadros:

	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
Conjunto Imagen			
Vértice			
Eje de Simetría			
Máximo			
Mínimo			
Crece en			
Decrece en			
Positiva en			
Negativa en			

CONCLUSIONES	
La gráfica de $f(x) = a(x - h)^2$ es una parábola que se encuentra desplazada $\|h\|$ unidades: hacia ...., si $h > 0$ o hacia ...., si $h < 0$ respecto de la gráfica de $f(x) = ax^2$.	✓ Ecuación del eje de simetría: .... ✓ Coordenadas del vértice:......................

ACTIVIDAD 4

a) Escribe la fórmula correspondiente a la gráfica de la función $y = x^2$ trasladada 1 unidad hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo.

b) Grafica dicha función y realiza un análisis completo de la misma.

EN GENERAL:	
La expresión $y = a(x - h)^2 + k$ se denomina **expresión canónica** de la función cuadrática. Su gráfica es la de $y = ax^2$ desplazada $\|h\|$ unidades horizontalmente y $\|k\|$ unidades verticalmente.	✓ Ecuación del eje de simetría: .... ✓ Coordenadas del vértice:......................

ACTIVIDAD 5

1) Dadas las siguientes ecuaciones de parábolas determina: el vértice, el eje de simetría, dominio, conjunto imagen, valor mínimo o máximo e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $y = (x+2)^2 - 3$ b) $y = -2(x+1)^2$ c) $y = -(x-1)^2 - 1$

d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ e) $y = 3(x-2)^2 + 1$ f) $y = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$

2) En una isla, en la que no había venados, se introduce una cierta cantidad de estos animales. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo, por falta de alimentos, la población comenzó a decrecer. La cantidad de venados en relación al tiempo viene dado por:

$$N(t) = -1(t-11)^2 + 196$$

Donde t es el tiempo medido en años y N es el número de venados a lo largo del tiempo.

a) ¿Cuántos venados se introdujeron en la isla?

b) Determina los valores de t para los cuales la población aumenta y para cuales disminuye.

c) ¿Cuál fue la mayor cantidad de venados que hubo en la isla?

d) ¿Se extinguen en algún momento los venados? ¿Cuántos años pasan?

3) Encuentra todos los valores de dos números reales x e y que cumplan con la siguiente condición "el segundo de ellos aumentado cuatro unidades equivale al cuadrado de la diferencia entre el primero y dos."

INTERSECCIONES, DE LA PARÁBOLA, CON LOS EJES COORDENADOS

Con el eje y:

En el punto donde la función interseca al eje de las ordenadas, el valor de la abscisa es igual a cero. Por lo tanto, para hallar la ordenada al origen reemplazamos x por cero y obtenemos el valor correspondiente de y.

Si se tiene la forma polinómica de la función, la ordenada al origen es igual a c. Esto es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(0) = a0^2 + b0 + c$$
$$f(0) = c$$

En este caso, la intersección de la función con el eje y es $(0 ; c)$. En general: $(0 ; f(0))$.

Con el eje x:

En el punto, o en los puntos, donde la función interseca al eje de las abscisas, el valor de la ordenada es igual a cero.

Por lo tanto, para hallar las raíces (valores de las abscisas que anulan la función) reemplazamos y o $f(x)$ por cero. Luego despejamos el valor o los valores correspondientes de x. Lo que estaríamos resolviendo, es una ecuación de segundo grado.

Si se tiene la forma canónica de la función:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

$$0 = a(x - h)^2 + k$$

luego despejamos x.

Siendo $x = x_1$ y $x = x_2$ las raíces de la función, los puntos de intersección son:

$$(x_1\,;\,0) \quad \text{y} \quad (x_2\,;\,0)$$

ACTIVIDAD 6

Dadas las parábolas de la actividad 5, encuentra las intersecciones con los ejes de cada una de ellas, indica los intervalos de positividad y negatividad y bosqueja cada una de ellas.

Qué sucedería si en lugar de la expresión canónica de la función cuadrática, tendríamos la polinómica, ¿podemos despejar x para hallar los ceros o raíces de la función, como lo hicimos anteriormente?

A continuación conoceremos una fórmula que nos permitirá resolver la situación.

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Llamaremos **ecuaciones cuadráticas,** o de segundo grado, a las ecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \Re$ y $a \neq 0$, siendo ésta su forma implícita.

Antes de llegar a una fórmula general que nos sirva para resolver cualquier ecuación cuadrática, vamos a analizar algunos casos particulares.

ACTIVIDAD 7

Resuelve e indica el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 8 = 0$ b) $-3x^2 + 27 = 0$ c) $x^2 + 9 = 0$ d) $-2x^2 - 10 = 0$

EN GENERAL:

Si el coeficiente lineal es igual a cero $(b = 0)$, la ecuación nos queda:

$$ax^2 + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

Este es el caso más sencillo para hallar x:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$ [4♣♣]

ACTIVIDAD 8

Resuelve e indica el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 9x = 0$ b) $2x^2 + 10x = 0$ c) $-3x^2 + 6x = 0$ d) $-x^2 = x$ e) $2x^2 = -7x$

EN GENERAL:

Si el término independiente es igual a cero $(c = 0)$, la ecuación nos queda:

$$ax^2 + bx = 0 \text{ con } a \neq 0.$$

Usando la propiedad recíproca de la distributiva podemos expresar la igualdad como sigue:

$$ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$$

Luego, si un producto es igual a cero, uno o todos los factores son iguales a cero, entonces:

$$ax = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \qquad \text{o} \qquad x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

ACTIVIDAD 9

I) Analiza cada uno de los siguientes ejemplos:

☑ **Ejemplos:**

a)

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x-3)^2 = 0$$
$$x = 3$$

C.S. = $\{3\}$

b)

$2x^2 + 8x + 8 = 0$ sacamos factor común

$2(x^2 + 4x + 4) = 0$ aplicamos T. C. P.

$2(x+2)^2 = 0$

$x = -2$

C.S. = $\{-2\}$

[4♣♣] ¿Qué valores pueden tomar a y c para que la ecuación tenga solución en reales?

c)

$$x^2+4x-5=0$$
$$x^2+4x=5$$
$$x^2+4x+4=5+4$$
$$(x+2)^2=9$$
$$x+2=\pm\sqrt{9}$$
$$x+2=3 \quad \wedge \quad x+2=-3$$
$$x_1=1 \quad \wedge \quad x_2=-5$$

C.S. = $\{-5;1\}$

d)

$$3x^2+30x+9=0$$
$$3x^2+30x=-9$$
$$3\left(x^2+10x\right)=-9$$
$$x^2+10x=-3$$
$$x^2+10x+25=-3+25$$
$$(x+5)^2=22$$
$$x+5=\pm\sqrt{22}$$
$$x+5=-\sqrt{22} \quad \wedge \quad x+5=\sqrt{22}$$
$$x_1=-\sqrt{22}-5 \quad \wedge \quad x_2=\sqrt{22}-5$$

C.S. = $\{-\sqrt{22}-5;\sqrt{22}-5\}$

✓ Si tenemos una ecuación completa, en el caso que sea un trinomio cuadrado perfecto, podemos expresarlo como cuadrado de un binomio. En otros casos, podemos **Completar Cuadrados**. Este es un procedimiento por el cual transformamos una ecuación cuadrática en forma polinómica a una en forma canónica, dado que es más fácil de resolver.

II) Resuelve e indica el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+10x+25=0$ b) $x^2-6x=7$ c) $2x^2=18-16x$ d) $3x^2+147=42x$

<table>
<tr><td colspan="3">EN GENERAL:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Si tenemos la ecuación completa y en forma implícita: $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$$ax^2+bx=-c$$ $$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=-c$$ $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$</td><td rowspan="2">$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$ $$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$</td><td>$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$</td></tr>
<tr><td>$$x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Esta última expresión se llama FÓRMULA RESOLVENTE</td></tr>
</table>

☑ **Ejemplo:** Resolución de una ecuación cuadrática mediante la fórmula resolvente.

$x^2+2x-3=0$ (a = 1 b = 2 c = -3)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

entonces $x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$ o $x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$ C.S. = $\{-3;1\}$

ACTIVIDAD 10

1) Resuelve las siguientes ecuaciones, cuando sea posible.

a) $x^2 - 9 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $1 - x^2 = 0$

d) $3x - x^2 = 3x - 2$ e) $5x - x^2 = 0$ f) $4x^2 + 3x = 0$

g) $x(3x - 2) = x^2 - 5x$ h) $4 - 3x - x^2 = (3x - 2)^2$ i) $x(x + 2) = 2x(x - 1)$

j) $2x^2 - 12x + 10 = 0$ k) $x^2 + 4x + 1 = 7 - x^2$ l) $8x - 26 = x^2 + 7$

m) $-0,5x^2 - 3x = 4,5$ n) $x(x + 2) = -1$ o) $x^2 - 4x = 5$

¿Podríamos, sin resolver la ecuación cuadrática, determinar la cantidad de raíces reales que tiene?

2) Resuelve la ecuación de la situación inicial 3.

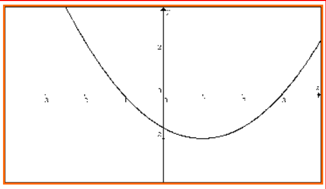
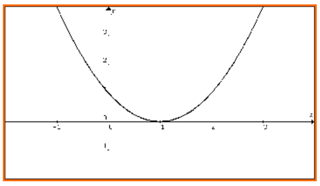
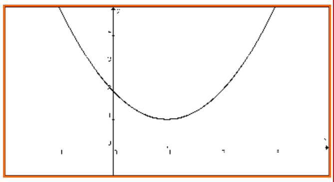
3) ¿Cuánto mide el radio de un círculo, si su área se duplica cuando éste aumenta 4 [cm]?

ANÁLISIS DEL DISCRIMINANTE

En la fórmula resolvente aparece una operación, la raíz cuadrada, que de acuerdo a sus propiedades nos presentará distintas posibilidades. Al resultado de la expresión $b^2 - 4ac$ lo llamaremos **Discriminante** y lo denotaremos con la letra griega mayúscula delta:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

A continuación mostraremos las distintas posibilidades y su relación con la función cuadrática.

✓ Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales distintas.	La parábola corta al eje x en dos puntos.	
✓ Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene dos raíces reales iguales o se dice también, una raíz real (doble).	La parábola toca al eje x en un punto.	
✓ Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene raíces reales.	La parábola no corta al eje x.	

Conociendo las raíces (x_1 y x_2) podemos escribir la **expresión factorizada** de la función cuadrática:

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ siendo $a \neq 0$ el coeficiente cuadrático

Coordenadas del Vértice de una Parábola V = (h , k)	
Si tenemos la expresión polinómica: $f(x) = ax^2 + bx + c$ Verifica completando cuadrados.	$h = -\dfrac{b}{2a}$ Esta fórmula nos da la abscisa del vértice; para encontrar la ordenada hay que reemplazar el valor de h encontrado en la función. V = $\left(-\dfrac{b}{2a}; f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$
Si tenemos la expresión factorizada: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	$h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ El vértice esta posicionado en el eje de simetría, por tanto la abscisa del mismo tiene que estar en el punto medio de las dos raíces, dado que éstas son valores simétricos de la parábola. De igual modo, hallamos el valor de k, reemplazando el valor de h en la función dada.
Si tenemos la expresión canónica: $y = a(x - h)^2 + k$	V = (h ; k)
Propiedades de las Raíces	
Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y siendo x_1 y x_2 sus raíces, se cumple que:	
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$

ACTIVIDAD 11

Demuestra las propiedades de las raíces.

ACTIVIDAD RESUELTA

El director de un teatro estima que si cobra \$30 por localidad, podría contar con 500 espectadores y que cada vez que descuenta \$1 asistirían 100 personas más.

a) Calcula los ingresos obtenidos en función del descuento realizado.

b) Calcula el ingreso máximo que se puede obtener.

Observa la tabla:

Descuento (\$)	0	1	2	X
Precio (\$)	30	30 – 1	30 – 2	30 – x
Nº de espectadores	500	500 + 100.1	500 + 100.2	500 + 100x
Ingresos	30·500	(30-1)·(500+100.1)	(30-2)·(500+100.2)	(30-x)·(500+100.x)

Los ingresos obtenidos son

$$G(x) = (30 - x)\cdot(500 + 100x) = -100x^2 + 2500x + 15000$$

siendo x el descuento realizado.

El ingreso máximo lo encontraremos calculando las coordenadas del vértice de la función G(x).

$h = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2500}{2\cdot(-100)} = 12{,}5$ $\qquad$ $k = -100(12{,}5)^2 + 2500.12{,}5 + 15000 = 30625$

El ingreso máximo será \$30625, si realiza un descuento de \$12,5.

ACTIVIDADES DE FUNCIÓN y ECUACIÓN CUADRÁTICA

1) Halla la ecuación de la parábola simétrica a $y = x^2$ respecto de:

a) La recta vertical x = 5. $\qquad$ b) La recta horizontal y = 3.

2) Si una parábola pasa por los puntos A = (2 ; -3) y B = (-1 ; -3), ¿cuál es su eje de simetría?

3) Halla la ecuación de una parábola, en forma polinómica, de vértice (2 ; 1) y que pasa por el punto (0 ; 13).

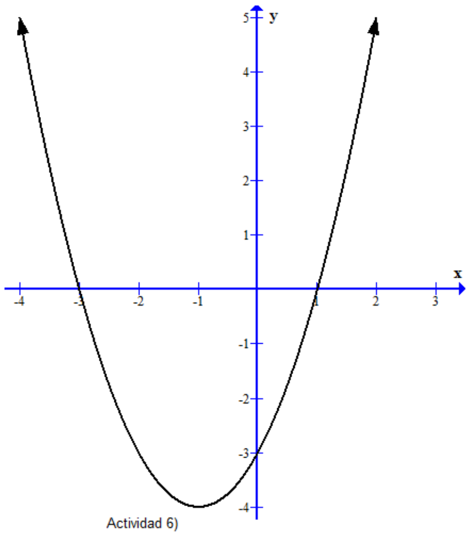
4) Dadas las siguientes ecuaciones de parábolas determina de cada una de ellas: las coordenadas del vértice, el eje de simetría, conjunto imagen, valor mínimo o máximo, intervalos de positividad y negatividad e intervalo de crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = 2x^2 - 10x + 5$ $\qquad$ b) $g(t) = 12t - 2t^2 - 10$ $\qquad$ c) $y = 2 + 4x + 2x^2$

d) $h(a) = a^2 + a + 1$ $\qquad$ e) $m(e) = -e(e + 5)$ $\qquad$ f) $k(u) = 2(u - 1)(u + 3)$

5) Grafica las siguientes funciones y encuentra, analíticamente, los puntos de intersección de cada una con los ejes coordenados:

$f(x) = 3x^2 – 6x + 3$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 6x – 5$



6) Determina la ecuación de la parábola de la derecha.

7) Una función cuadrática admite en x = 1 un mínimo que es y = -3. Por otra parte, f(0) = -1, f(3) = 5. Determina sin cálculo f(2) y f(-1) ayudándote de su representación gráfica.

8) Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

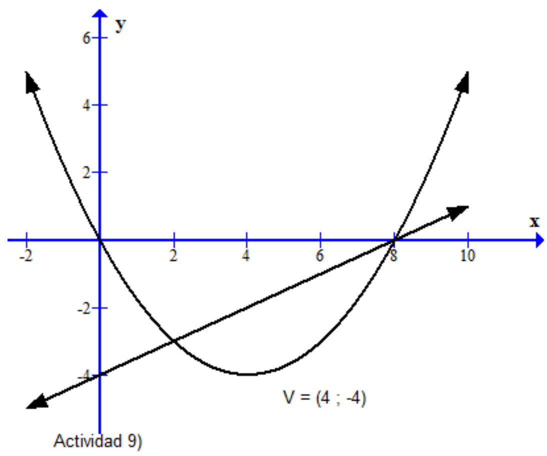
a) $–2.(5 – x).(3x + 2) + 6(x – 2)^2 = 7x + 3 – (4 – 4x)$ Rta: C.S. = $\left\{\frac{1}{12};5\right\}$

b) $(x – 1)^2 + 2x + 3.(2 – x) = (2x – 1)^2$ Rta: C.S. = $\left\{\frac{-1+\sqrt{73}}{-6};\frac{-1-\sqrt{73}}{-6}\right\}$

c) $3(x + 2)^2 – 6(x – 1) > 9(2x + 1)$ Rta: C.S. = $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$

d) $(x – 3)^2 + (x – 1). (x + 2) < -x +3$ Rta: C.S. = $\{\ \}$

9) Determina, analíticamente, las ecuaciones de las funciones de la derecha, así como sus puntos de corte:



10) Dada $f(x) = x^2 + mx + 1$, determina el o los valores de *m* (si es posible) en cada uno de los casos:

a) f(-2) = 8
b) Que la gráfica contenga al punto P = (3 ; 3).
c) Pase por el origen de coordenadas.
d) Que la función tome un valor mínimo en x = -1.
e) Corte al eje x en un único punto.
f) No corte al eje x.

11) Determina el valor de k en la ecuación $2x^2 + kx + 9 = 0$ para que una raíz sea el doble de la otra.

12) Dadas $f(x) = 2x^2 + x – 3$ y $g(x) = -2x + 2$ halla los valores para los cuales:

a) $f(x) = g(x)$.
b) $f(x) < g(x)$.
c) $f(x) > g(x)$.

Sugerencia: Realiza un gráfico.

13) En la ecuación $5x^2 – x + c = 0$ halla c para que las raíces sean:

a) Dos reales y distintas
b) Dos reales e iguales
c) No tenga raíces reales.

14) JUSTIFICA cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

a) El eje de simetría de $d(x) = -x^2 + x + 6$ es $x = 0,5$.

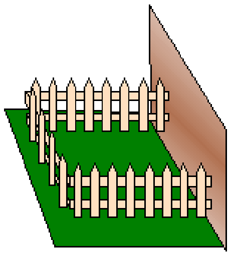
b) La función $f(x)=a(x+4)^2-7$ corta al eje x en dos puntos distintos para cualquier valor de a.

c) La función $f(x)=-2(x-1)^2+k$ corta al eje de las abscisas en dos lugares distintos para todo valor de k.

15) De la función cuadrática f(x) conocemos tres puntos: (-3 ; 5), (1 ; -1) y (3 ; 11). Determina f(0) y f(10).

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

1) En un triángulo rectángulo la medida de los lados son números enteros consecutivos. ¿Cuáles son dichos números?



2) Un agricultor posee 50 [m] de valla para cercar una parcela rectangular de terreno adosada a un muro. ¿Qué área máxima puede cercar de esta manera?

3) Lanzamos un proyectil. La altura **y** alcanzada (en kilómetros) y los kilómetros recorridos **x** están relacionados por la ecuación $\mathbf{y = -4x^2 + 8x}$. Calcula la máxima altura alcanzada por el proyectil y para cuántos kilómetros recorridos sucede.

4) Se quiere construir una parcela rectangular y dividirla, con dos cercas paralelas a uno de sus lados, en tres sectores para realizar distintos cultivos. Se desea cercar la parcela en todo su perímetro y las divisiones con dos líneas de alambre, para ello se cuenta con 800 [m] de alambre. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de la parcela para que la medida de la superficie a plantar sea máxima?

5) En una isla se introduce una cantidad de abejas el 1 de marzo. La siguiente función permite calcular la cantidad de abejas que hay en la isla x días después:

$$C(x) = -5(x + 20)(x - 80)$$

Responde:

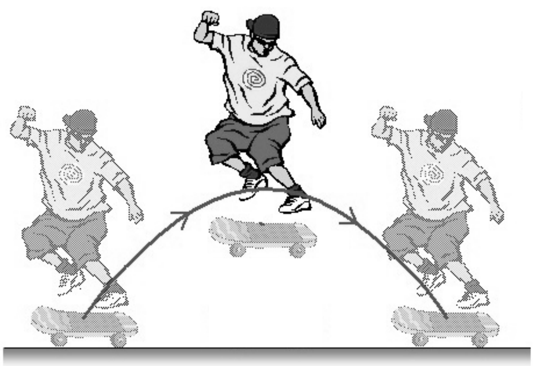
a) ¿Qué día la población de abejas es mayor?
b) ¿Cuál es la mayor cantidad de abejas que llega a haber en la isla?
c) ¿Cuántas abejas habrá en la isla el 5 de abril?
d) ¿Cuántas abejas se introdujeron en la isla?
e) ¿Cuándo se extinguen las abejas?

Para debatir: ¿cuál es el dominio, codominio y conjunto imagen de C(x)?

6) Se sabe que si se plantan 65 manzanos en una huerta el rendimiento promedio por árbol será de 1500 manzanas por año. Para cada árbol adicional que se plante en ese lugar el rendimiento anual baja en 20 manzanas por árbol. Responde:

a) Si no se agrega ningún árbol, ¿cuántas manzanas se cosecharán?
b) ¿Cuántos árboles se deben plantar para producir la cosecha máxima anual?
c) ¿Cuántas manzanas representan la cosecha máxima?
d) ¿Cuántos árboles se deben plantar para que la cosecha sea nula?

7) Después de que el skater salta, la gravedad se hace cargo y se sigue un arco parabólico mientras vuela a través del aire (como se muestra), luego aterriza de nuevo en la tabla.



Se conocen los siguientes puntos de esa trayectoria parabólica: (0 ; 1/10), (3/10 ; 181/640) y (13/10 ; 181/640), donde la primer coordenada indica una distancia horizontal (en metros) y la segunda, una distancia vertical (en metros).

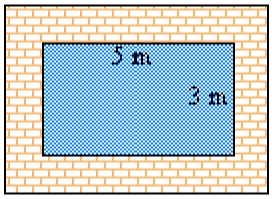
a) Obtiene la función cuadrática que modelice el salto del skater.

b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el salto?

8) PARA ENTRETENERSE...

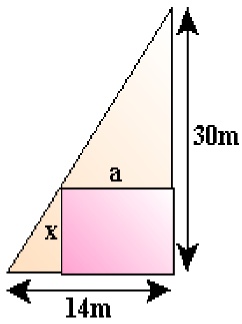
Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Una de las personas advirtió que los apretones fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

9) El costo (en \$) de la fabricación de x juguetes es $C(x) = 220 – 4x + 0{,}02x^2$. ¿Para qué producción de juguetes se obtiene un costo mínimo? ¿Cuál es ese costo? (Rta.: 100 juguetes; \$20)



10) Una mujer tiene un estanque rectangular de 5x3 metros. Quiere hacer un camino alrededor del estanque como muestra el siguiente dibujo:
La anchura del camino ha de ser constante en todo el contorno.

a) Llama **x** a la anchura constante del camino. ¿Cuál será la expresión del área A del camino?
b) Si el área del camino ha de ser de 30 [m^2], utiliza lo hallado anteriormente y averigua el ancho x del camino. (Rta.: Aprox. 1,4 [m])



11) Se desea construir una casa de forma rectangular en un ángulo recto de un terreno triangular.

a) Obtener a en función de **x**.
b) Obtener el área de la casa en función de **x**.
c) ¿Para qué valor de **x**, el área que ocupa la casa es máxima?

12) Una pelota de fútbol que está sobre el piso recibe una patada hacia arriba; si la altura que alcanza en metros viene dada por $y = -3/4\ t^2 + 3\ t$, donde t se mide en segundos. ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura? ¿A los cuántos segundos vuelve a tocar el piso?

13) La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Plantea las ecuaciones correspondientes y resuelve para hallar dichos números.

14) Una moneda de cobre tiene a una temperatura de 0 [ºC], un radio de 5 [mm] y aumenta de tamaño al ser sometida a un aumento de temperatura: su radio aumenta 1 [mm] cada vez que subimos su temperatura 100 [ºC].

a) Completa la tabla:

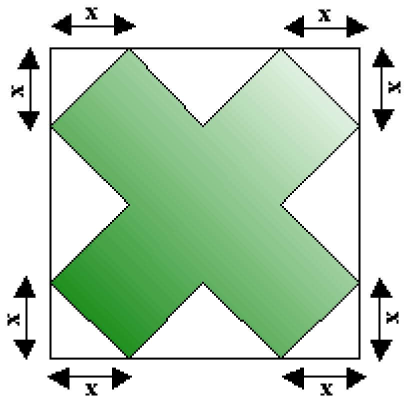
Temperatura (°C)	**0**	**100**	**200**	**300**	**400**
Área (mm^2)					

b) Obtiene la ecuación que relaciona el área de la moneda con el aumento de temperatura.

c) Si el cobre no se funde hasta los 1000 [ºC], ¿Cuál es el área máxima alcanza la moneda?

d) Si queremos que la moneda no se cuele por un agujero de 14,5 [mm] de diámetro, ¿a qué temperatura debe estar la moneda?

15) Sea ABCD un cuadrado de lado 6. Calcula el valor de x para que el área de la cruz sea máxima:



16) La tabla muestra el número de turistas, en millones, que entraron en España en el período 1995 - 2005.

Año	1995	2000	2005
Turistas	54,4	74,6	92,6

a) Estima, mediante interpolación cuadrática, los valores para 1998 y 2002.

b) ¿En qué año se superaron los 80 millones?

17) Cierta empresa ha observado que los ingresos por ventas están estrechamente relacionados con el gasto asignado a publicidad y ha recogido algunos datos de años anteriores en una tabla.

Años	2005	2006	2007
Gasto en publicidad (x 1000 €)	1	3	5
Ingresos (por 1000 €)	4	26	64

a) Observa las variaciones que se producen en los gastos y en los ingresos y decide qué tipo de interpolación es la más conveniente para reflejar la situación.

b) Calcula, mediante interpolación, qué ingresos se esperan con un gasto en publicidad de 4000 euros.

c) Usando la función hallada en el ítem anterior determina cuánto dinero hay que invertir en publicidad para obtener un ingreso de 30000 euros.

18) En la siguiente imagen se muestra cómo se van armando cuadrados cuadriculados con fósforos.

Responde:

a) ¿Cuántos fósforos serán necesarios para la figura que aparezca en la octava posición?

b) ¿En qué posición estará la figura que necesite 19012 fósforos para su construcción?

El ***equilibrio químico*** es un proceso dinámico donde participan distintas sustancias, como reactivos y productos; el mismo se alcanza cuando las velocidades de las reacciones en un sentido y en otro, se igualan, y las concentraciones de los reactivos y productos permanecen constantes.

No es nuestro objetivo entrar en detalles de este proceso, pero sí nos concentraremos en un concepto importante, la “constante de equilibrio”. Al conocer dicha constante se pueden calcular las concentraciones que actúan en el equilibrio utilizando ecuaciones cuadráticas.

ACTIVIDAD RESUELTA

Sea una reacción: $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$

Donde a, b, c y d son coeficientes estequiométricos de las especies reactivas A, B, C y D.

Para la reacción, a una temperatura dada, la constante de equilibrio se define:

$$K = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

Siendo $[A]$, $[B]$, $[C]$ y $[D]$ la concentración de A, B, C y D respectivamente, en [mol/L].

Si conocemos la constante de equilibrio para una concentración dada, podemos calcular las concentraciones de la mezcla en equilibrio a partir de las concentraciones iniciales.

Supongamos que en un recipiente de acero inoxidable de 1 [L] se coloca, a una temperatura de 430 [°C], una mezcla de 0,00623 [mol] de H_2 y 0,00414 [mol] de I_2 logrando un producto de 0,0224 [mol].

Para la reacción:

$$H_2(g) + I_2(g) \rightleftharpoons 2HI(g)$$

La contante de equilibrio K_c, a esta temperatura, es de 54,3.

Si queremos calcular las concentraciones en el equilibrio podemos hacer el siguiente proceso.

	H_2	+	I_2	$\rightleftharpoons$	$2HI$
Inicial (M)	0,00623		0,00414		0,0224
Cambio (M)	$-x$		$-x$		$+2x$
Equilibrio (M)	$(0,00623-x)$		$(0,00414-x)$		$(0,0224+2x)$

x representa la disminución en las concentraciones en el equilibrio.

La contante de equilibrio está dada por:

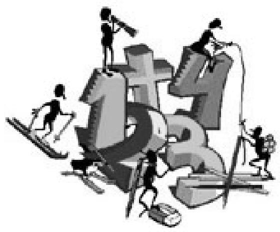
$$K_c = \frac{[HI]^2}{[H_2]^1[I_2]^1}$$

Al sustituir los valores, tenemos:

$$54,3 = \frac{\left(0,0224+2x\right)^2}{\left(0,00623-x\right)\left(0,00414-x\right)}$$

Resolviendo esta ecuación concluimos que el valor de x es 0,00156, por lo que las concentraciones en el equilibrio son 0,00467 [mol/L] de H_2 y 0,00258 [mol/L] de I_2.

(Rta. de la situación *Para ir pensando… de la página 36:* 7 [m]; 2,45 [m]; 2,64 [m]; 3,18 [m]; 4,09 [m]; 5,36 [m] y 9 [m]. Algunas longitudes son aprox.)



Para entretenernos un rato!! Solo cuando hayas terminado las actividades asignadas!!

Sodoku: Anota un número, del 1 al 9, en cada casilla vacía, de modo que cada número aparezca una sola vez en cada fila horizontal, como también, en cada columna y en cada uno de los cuadrados remarcados de 3x3.

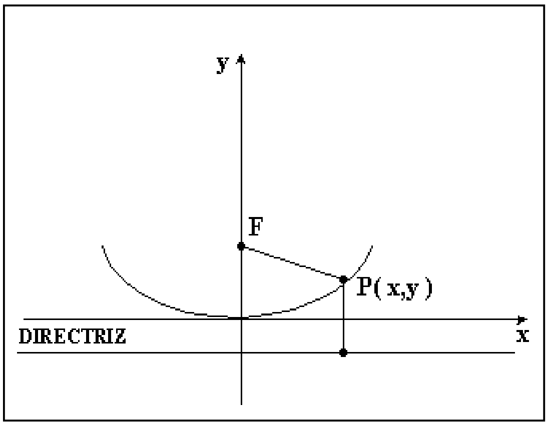
3		1						
	5		9					
8	7			6			1	
	8	3	5					6
7		5				4		8
9					3	5		
	1			9			2	4
				2	8		6	3
				4		8		

		4			8	3		
	2		5			1	7	
		9			2			
				6	5			3
9								5
8			7	3		9		
	4		2			5		
	9	5			7		8	
		1	3			4		

Información Complementaria

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LA PARÁBOLA

La parábola es el conjunto de puntos del plano que se encuentra a la misma distancia de un punto fijo F, que se llama foco, y de una recta también fija d, que se llama directriz.



Nota: En este capítulo no se trabajó esta definición; se desarrolló un enfoque analítico de las funciones, cuya representación es una parábola. Estudiamos sus aplicaciones a modelos físicos y fundamentalmente a problemas de optimización.

Pasos para realizar una parábola, mediante un software, utilizando la definición geométrica.

1. Empieza por incluir los elementos de la parábola, como se muestra en la Ilustración 1.
   a. Coloca un punto F, el foco, en el plano y una recta r, la directriz, que no contenga a F.
   b. Coloca un punto P sobre la recta r.

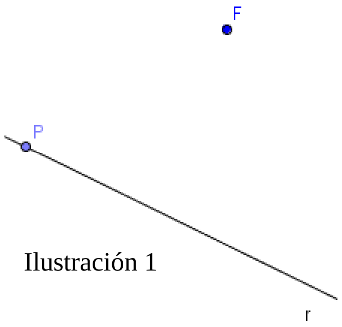


Ilustración 1

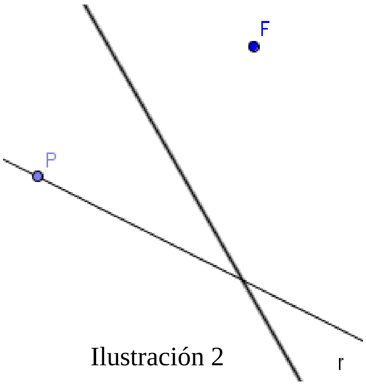


Ilustración 2

2. Traza la mediatriz (recta más oscura) entre los puntos F y P, como se ve en la Ilustración 2.

3. Mueve el punto P sobre la recta y "activa rastro" de la mediatriz. ¿Qué observas?

Función Polinómica
Factorización de Polinomios
Ecuaciones Polinómicas

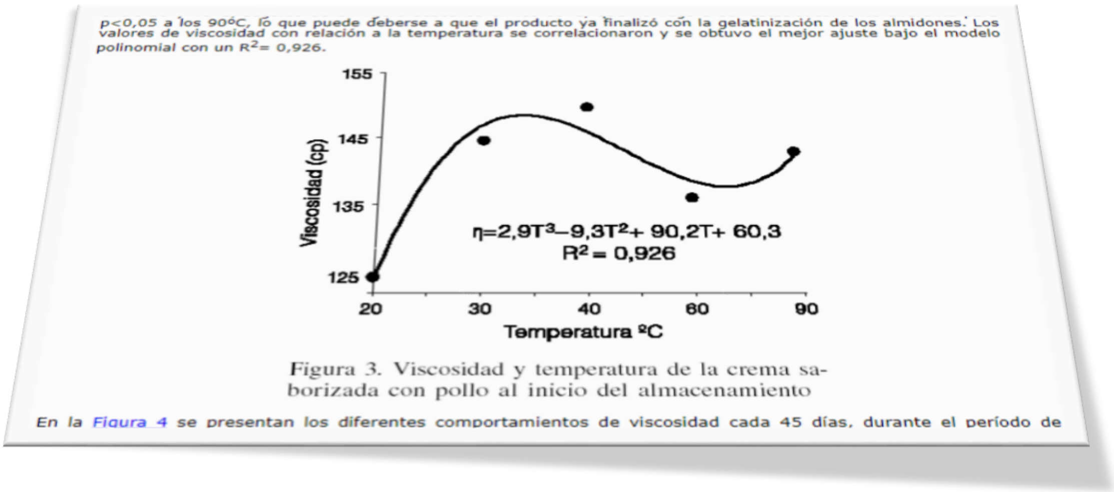

p<0,05 a los 90ºC, lo que puede deberse a que el producto ya finalizó con la gelatinización de los almidones. Los valores de viscosidad con relación a la temperatura se correlacionaron y se obtuvo el mejor ajuste bajo el modelo polinomial con un R^2= 0,926.

Figura 3. Viscosidad y temperatura de la crema saborizada con pollo al inicio del almacenamiento

En la Figura 4 se presentan los diferentes comportamientos de viscosidad cada 45 días, durante el período de

Situación 1:

Un depósito de combustible consta de una sección central cilíndrica de 4 [m] de largo y dos secciones extremas semiesféricas, como se ilustra en la imagen.

a) El volumen V de dicho depósito puede expresarse, en relación al radio r, de la siguiente manera:

V(r) = ... (1)

- La expresión que escribiste, ¿de qué tipo es? ¿Por qué?
....
....
- Destaca todo lo que recuerdes de ese tipo de expresiones.
....
....
- La relación entre ambas variables, V y r, ¿qué es? ¿Por qué?
....
....

b) Si el recipiente tiene un volumen de $\frac{16}{3}\pi\left[m^3\right]$, ¿cuál es la medida del radio?, ¿es única la solución?

Si no puedes resolver el ítem b) se te recomienda responder las siguientes preguntas orientativas:

b_1) Al reemplazar el valor del volumen en la ecuación (1):

.... (2)

¿Qué tipo de ecuación queda planteada?
....

b_2) Aplica la propiedad uniforme en (2) para que te quede una expresión igual a cero. ¿Qué tipo de expresión te queda en el miembro de la igualdad que no está el cero?
....
....

b_3) Ahora, ¿qué es lo que tienes que buscar para dar solución al ítem b)?
....
....

b_4) En un software, o aplicación apropiada, introduce la expresión del ítems b_2) e indica que la *factorice*. ¿Qué observas en la nueva expresión?
....
....

b_5) Responde adecuadamente las preguntas del ítem b).

Situación 2:

Con una plancha de cartón de 10 [cm] de largo y 8 [cm] de ancho se fabricará una caja sin tapa y, para ello, se recortará en cada esquina un cuadrado de lado x [cm].

a) Realiza una figura de análisis y halla la expresión polinómica correspondiente al volumen de la caja en relación a x.

b) Si el volumen de la caja tiene que ser 48 [cm^3], ¿qué dimensiones podrían tener?

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué significa factorizar un número? ¿Y un polinomio?

....

....

b) ¿Cuándo una factorización está completa?

....

c) ¿Qué es un número primo? ¿Y un polinomio primo?

....

....

d) ¿Cuándo un polinomio está normalizado?

....

e) ¿Qué significa factorizar completamente un polinomio?

***Factorizar Completamente** un polinomio es expresarlo como .... del coeficiente principal por polinomios .... y ....*

✓ Un polinomio $P(x)$ (de grado no nulo) es ***primo*** cuando no puede expresarse como producto de otros polinomios de grado positivo menor.

✓ Cuando un polinomio puede expresarse como producto de otros, de menor grado, se dice compuesto.

Nota: Todos los polinomios de primer grado son primos. Los polinomios de grado cero y el polinomio nulo no son ni primos, ni compuestos.

☑ **Ejemplo:**

$P(x) = 2x^2 - 8$

$P(x) = 2(x - 2)(x + 2)$

✓ 2, $(x - 2)$ y $(x + 2)$ son los tres factores que generan $P(x)$.

✓ $(x - 2)$ y $(x + 2)$ son factores primos normalizados.

✓ Cuando decimos que 2, $(x - 2)$ y $(x + 2)$ son factores de $P(x)$, también podemos decir que son divisores de $P(x)$, o que $P(x)$ es divisible por cada uno de ellos.

✓ Recuerda que un valor "r" es raíz de $P(x)$ si $P(r) = 0$.

✓ Si $(x - 2)$ es factor de $P(x)$, $x = 2$ es raíz del polinomio.

✓ Si $(x + 2)$ es factor de $P(x)$, $x = -2$ es raíz del polinomio.

✓ La propiedad usada, para identificar las raíces en un polinomio factorizado, es la siguiente:

Si $a.b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$

✓ Al tener completamente factorizado un polinomio, podemos identificar fácilmente las raíces (o ceros) del mismo.

Esto último es importante cuando se resuelven ecuaciones polinómicas y/o analizan funciones polinómicas.

Además es necesario saber factorizar para simplificar otro tipo de expresiones.

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio, con coeficientes reales, de grado n tiene n raíces.

Su consecuencia en la factorización de polinomios:

Todo polinomio $P(x)$ de grado n, con n raíces reales, puede factorizarse como:

$$P(x) = a_n.(x - x_1).(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

donde a_n es el coeficiente principal del polinomio $P(x)$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son sus n raíces reales.

Un polinomio $P(x)$ tiene una **raíz múltiple** si al factorizarlo hay factores iguales; el orden de multiplicidad de la misma está dado por el número de veces que se repite el factor.

☑ **Ejemplos**:

Polinomio Factorizado	**Raíces**	**Multiplicidad**
$P(x) = 2(x+1)(x+2)(x-5)$	$x_1 = -1 \wedge x_2 = -2 \wedge x_3 = 5$	Tres raíces Simples
$Q(p) = (p-2)(p-2)=(p-2)^2$	$p_1 = 2 \wedge p_2 = 2$	Una raíz doble
$T(s) = s.s.s.(s+3)$ $= s^3(s+3)$	$s_1 = 0 \wedge s_2 = 0 \wedge s_3 = 0 \wedge s_4 = -3$	Una raíz simple y otra triple

ACTIVIDAD 1

1) Justifica cuáles de los siguientes polinomios son primos en R.

M(t) = 0 R(s) = $2s^2 - 8$ T(x) = 2x + 3 D(w) = $w^2 + 4$ C(p) = 5

2) Responde las siguientes preguntas. Justifica cada respuesta.

a) Si dos polinomios, con coeficientes principales iguales a 1, tienen los mismos ceros, ¿podemos asegurar que son iguales? ¿Por qué?

b) Dados los siguientes polinomios primos en R: A(t) = $t^2 + 6$ y B(t) = $t^2 + 3$. El producto obtenido al realizar A(t).B(t), ¿es también un polinomio primo?, ¿Por qué?

3) Se ha pedido a un estudiante que factorice completamente algunos polinomios y sus respuestas fueron las siguientes.

a) $-x^4 + 5x^3 = -x^3(x-5)$

b) $2x^3 + 2x^2 - 4x = (2x^2 + 4x)\cdot(x-1)$

c) $2x^2 - 1x - 3 = (2x-3)\cdot(x+1)$

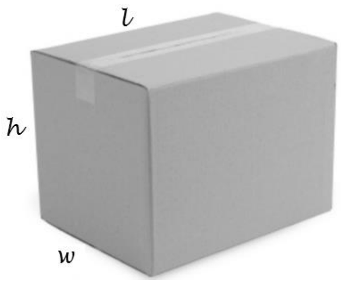
d) $-\frac{3}{2}b^2 - \frac{1}{2}b = -\frac{3}{2}b\left(b + \frac{1}{3}\right)$

e) $2e^6 - e = e(e^5 - 1)$

f) $5p^6 + 40p^2 = 5p^2(p^3 + 8)$

Indica las respuestas correctas.

Situación 3:



Observación: La caja está representada por un prisma recto de base rectangular.

Completa los siguientes ítems de modo que resulten verdaderos los enunciados dados:

a) La expresión del área total, S, de una caja cerrada en función del largo l, el ancho w y la altura h es la siguiente:

S = ...

b) Expresa h en relación a las otras variables.

h = ...

Extracción de Factor Común		
✓ Dados a; b; $n \in \Re$, sabemos que: $n.(a + b) = n.a + n.b$ es la propiedad .... de la multiplicación con respecto a la .... ✓ Análogamente: $n.a + n.b = n.(a + b)$ donde n es el factor .... **Nota:** Para ***normalizar*** un polinomio, se debe extraer como factor común el coeficiente principal.	Primero se debe reconocer cuál es el o los factores que se encuentran repetidos en cada término del polinomio y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término del polinomio por el o los factores comunes. El factor común puede ser la variable del polinomio con el menor exponente, y/ o un número que es factor en todos los coeficientes.	☑ **Ejemplo**: $3ab^3 - 15a^2b + 6ab =$ $\mathbf{3ab}b^2 - \mathbf{3}.5a\mathbf{ab} + 2.\mathbf{3ab} =$ $3ab(b^2 - 5a + 2).$ ☑ **Ejemplo:** $35x^3 + 10x = 5.7xx^2 + 5.2x$ $= 5x.(7x^2 + 2)$ o $35x^3 + 10x = 35x.(x^2 + \frac{2}{7})$ En este caso el factor entre paréntesis está normalizado.

ACTIVIDAD 2

1) Expresa los siguientes polinomios como el producto de su o sus factores comunes por el polinomio correspondiente:

a) $5m^2 - 10m^3 + 15m =$

b) $\frac{1}{4}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{4}t^5 =$

c) $2x^3 + 5x^4 =$

d) $15a + 3b + 18c =$

2) La siguiente fórmula nos da la tensión en el cordel, que conecta dos cuerpos de masas m_1 y m_2 en una situación determinada: $T = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} g$. Despeja m_1.

Situación 4:

a) Sabiendo que el área de un rectángulo está expresada como sigue:

$$A = ac + db + ad + bc,$$

expresa la misma en forma factorizada.

b) Expresa en forma factorizada el polinomio $P(a) = a^3 - a^2 + 3a - 3$.

Factor Común en Grupos de igual cantidad de términos cada uno.

✓ Si $a; b; c; d \in \Re$, sabemos que:

$(a + b).(c + d) =$ ....

Aplicamos dos veces consecutivas la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

✓ Análogamente:

$ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd)$

$= a.(c + d) + b.(c + d)$

$= (a + b).(c + d)$

Primero asociamos los términos que tengan factores comunes (no existe un único modo), luego sacamos factor común de cada agrupación y para finalizar, volvemos a aplicar factor común para volver al producto de dos sumas. Este procedimiento puede aplicarse si hay 4, 6 o grupos de igual cantidad de términos.

☑ **Ejemplo:**

$x^5 - 2x^4 + 3x - 6 = (x^5 - 2x^4) + (3x - 6)$

$= x^4(x - 2) + 3(x - 2)$

$= (x – 2).(x^4 + 3)$

Si asociamos de otro modo:

$x^5 - 2x^4 + 3x - 6 = (x^5 + 3x) +(-2x^4 – 6)$

$= x(x^4 +3) – 2(x^4 + 3)$

$= (x – 2).(x^4 + 3)$

☑ **Ejemplo**:

$2t^6 – t^5 + 6t^4 + 6t^2 - 3t + 18 =$

$(2t^6 – t^5 + 6t^4) + (6t^2 - 3t +18) =$

$2t^4(t^2 - \frac{1}{2}t + 3) + 6(t^2 - \frac{1}{2}t + 3) =$

$(2t^4 + 6).(t^2 - \frac{1}{2}t + 3) = 2(t^4 + 3)(t^2 - \frac{1}{2}t + 3)$

Intenta esta factorización agrupando de dos en dos.

ACTIVIDAD 3

Expresa los siguientes polinomios como el producto de otros de menor grado:

a) $x^3 + xa + 2x^2 + 2a =$

b) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5} - \frac{2}{15}x + x^2 =$

c) $m^7 + m^6 + m^4 - 5m^3 - 5m^2 - 5 =$

d) $3g^3 + 6g^2 + 5g + 10 =$

Situación 5:

a) Sabiendo que el área de un rectángulo esta expresada como sigue: $A = x^2 + 2.x.y + y^2$, expresa la misma en forma factorizada.

b) ¿Cuál es la expresión factorizada del polinomio $P(d) = 9d^2 + 42d + 49$?

Trinomio Cuadrado Perfecto

✓ *Cuadrado de un binomio:*

$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (T. C. P)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

✓ Análogamente:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

☑ **Ejemplo:**

$4z^2 + 12z + 9 = (2z + 3)^2 = [\,2.(z + \frac{3}{2})]^2 =$

$= 4.(z + \frac{3}{2})^2$

☑ **Ejemplo**:

$m^6 - 10m^3p + 25p^2 = (m^3 - 5p)^2$

ACTIVIDAD 4

1) Une con flechas las expresiones de la izquierda con sus equivalentes a la derecha.

a)	$(x-2)^2$	i)	$x^2 - 4$
b)	$(x+2)^2$	ii)	$x^2 - 4x + 4$
c)	$(-x-2)^2$	iii)	$x^2 + 4$
d)	$(2-x)^2$	iv)	$x^2 - 4x - 4$
		v)	$x^2 + 4x + 4$
		vi)	$x^2 - 2x + 4$

2) Marca con una **X** los polinomios que son trinomios cuadrados perfectos. Justifica tu elección.

a) $P(x) = x^2 - 10x - 25$ ☐   b) $Q(r) = r^2 - 10r + 25$ ☐   c) $T(q) = q^2 - q + \frac{1}{4}$ ☐

d) $Q(a) = a^2 + 10a - 25$ ☐   e) $S(x) = x^2 + 5x + \frac{25}{4}$ ☐   f) $H(b) = b^2 - 8b + 4$ ☐

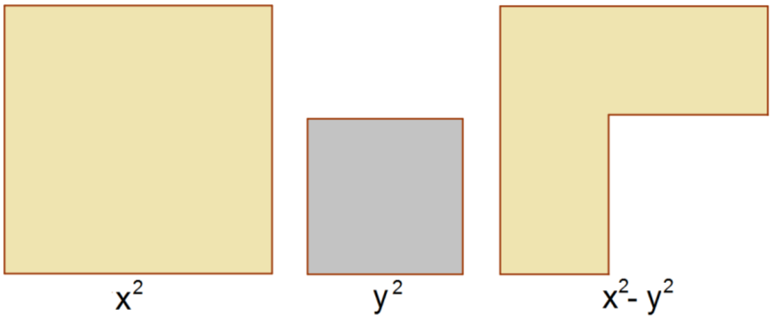
3) Expresa cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

a) $R(s) = 4s^2 - 4s + 1$ b) $S(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

c) $T(y) = y^6 + 4y^3 + 4$ d) $G(c) = c^2 - \frac{4}{3}c + \frac{4}{9}$

Situación 6:

Teniendo en cuenta las áreas de las siguientes figuras, expresa en forma factorizada $x^2 - y^2$.



Diferencia de Cuadrados

✓ *Producto especial*: $(a + b).(a - b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$ ✓ Análogamente: $a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$	☑ **Ejemplo:** $36v^2 - 49 = (6v - 7).(6v + 7) = 6(v - \frac{7}{6}).6\,(v + \frac{7}{6})$ $= 36\,(v - \frac{7}{6}).(v + \frac{7}{6})$ ☑ **Ejemplo:** $x^{10} - \frac{9}{25} = (x^5 - \frac{3}{5}) \cdot (x^5 + \frac{3}{5})$

ACTIVIDAD 5

1) Factoriza los siguientes binomios.

a) $A(x) = 25x^2 - 1$ b) $B(x) = 16x^4 - 49$

2) Contesta las siguientes preguntas:

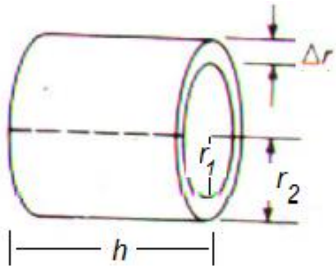
a) ¿Qué significa que el valor $x = \mathbf{a}$ sea raíz del polinomio $P(x)$?

b) Si x = a es raíz de P(x), ¿qué es (x – a) del polinomio?

c) ¿Cómo es la división P(x) $\div$ (x – a)?

3) Una alcantarilla está construida mediante cascarones cilíndricos colados en concreto. Teniendo en cuenta los datos de la figura, el volumen del cascarón cilíndrico puede expresarse de la siguiente manera:

V = ...



Sabiendo que el espesor es Δr y el radio promedio es $\frac{r_2 + r_1}{2}$, factoriza para demostrar que:

$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor}$$

Como hemos visto, al conocer una raíz del polinomio se conoce un factor del mismo. A continuación veremos un teorema que nos permite hallar las posibles raíces racionales de un polinomio.

Teorema de Gauss

Si el polinomio $P(x)$, de grado n, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces p es divisor del término independiente y q lo es del coeficiente principal.

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$

✓ Se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal.

p = {divisores de a_0}

q = {divisores de a_n}

✓ Se forman con ellos fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$, para obtener las posibles raíces.

✓ Se verifica cuál o cuáles de esos valores es raíz del polinomio, especializando el mismo en estas fracciones.

Nota: Especializar $P(x)$ en un valor determinado, es obtener el valor numérico de $P(x)$ para ese valor.

☑ **Ejemplo**:

Factoricemos $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$.

En este caso tenemos que:

$p = \{\pm 1, \pm 3\}$ $\quad q = \{\pm 1, \pm 2\}$ $\quad$ entonces

$$\frac{p}{q} = \left\{\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 3,\ \pm\frac{3}{2}\right\}$$

Luego especializamos el polinomio $P(x)$ en alguna de las posibles raíces:

$P(1) = 2.1^3 - 3.1^2 - 8.1 - 3 = 2 - 3 - 8 - 3 = -12 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ no es raíz de $P(x)$

$P(-1) = 0 \Rightarrow x =$ **-1 es raíz de P(x)**

$P(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ **es raíz de P(x)**

$P(3) = 0 \Rightarrow x =$ **3 es raíz de P(x)**

Luego:

$$P(x) = \mathbf{2}.(x + 1).(x + \frac{1}{2}).(x - 3)$$

A través del teorema de Gauss, ¿podemos hallar cualquier raíz de un polinomio?

☑ **Ejemplo**:

Factoricemos $P(x) = x^3 + 2x^2 – x – 2$ sabiendo que $(x + 2)$ es factor del polinomio.

Si se sabe que $(x + 2)$ es factor de $P(x)$, también podemos decir que divide a $P(x)$ y que -2 es raíz del polinomio.

Utilizando la regla de Ruffini, obtenemos:

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	2	-1	-2
-2		-2	0	2
	1	0	-1	0

$$\frac{P(x)}{x+2} = x^2 - 1$$

Despejando $P(x)$ obtenemos que

$$P(x) = (x + 2).(x^2 – 1)$$

$$P(x) = (x + 2).(x – 1).(x + 1)$$ ¡¡Polinomio completamente factorizado!!

¿Cuáles son las raíces de $P(x)$?

ACTIVIDAD 6

Factoriza utilizando el teorema de Gauss, si es posible, los siguientes polinomios e indica sus raíces y la multiplicidad de cada una.

a) $P(x) = -x^3 + 4x^2 – x – 6$ b) $T(b) = -4b^3 + 7b – 3$

c) $Q(h) = h^4 + 6h^3 + 8h^2 – 6h – 9$ d) $S(x) = -4x^4 + 12 x^3 – 7x^2 – 3x + 2$

e) $R(m) = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m +1$ f) $M(g) = 2g^3 – 5g^2 + 4g + 3$

Analicemos un caso especial

Dado el siguiente polinomio: $P(x) = x^4 + 4$, ¿se puede factorizar usando lo que hasta el momento estudiamos?

No todos los polinomios podrán ser factorizados con lo que estudiemos este año, ni tampoco usando un solo procedimiento. En algunas ocasiones tendremos que combinar más de un caso de factoreo y en otros hasta usar algunos artificios matemáticos.

El polinomio $P(x) = x^4 + 4$ puede expresarse como sigue:

$$P(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

La última expresión es una diferencia de cuadrados, entonces:

$$P(x) = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

ACTIVIDAD 7

1) a) Explica por qué la factorización del polinomio $E(b) = \left(4b^2 - \frac{4}{3}b + \frac{1}{9}\right) \cdot (b+2)$ no está completa.

b) Factoriza completamente $E(b)$.

c) ¿Cuántas raíces tiene $E(b)$? Indica cuáles son dichas raíces.

2) Dado $P(x) = 9x^3 + 18x^2 - x - 2$

a) Calcula el resto de la división de $P(x)$ por $(x - 3)$. ¿Es $(x - 3)$ factor de $P(x)$?, ¿Por qué?

b) Factoriza completamente $P(x)$ e indica sus raíces.

3) Factoriza completamente los siguientes polinomios.

a) $4x^3 - 2x^2 + 6x - 3$ b) $x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 4$ c) $1 - n^2$

d) $x^4 - 36$ e) $p^6 - 64$

4) Indica la multiplicidad de las raíces de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = -4 \cdot (x-3)^2 \cdot (x+3)^2$ b) $Q(e) = -3\left(e - \frac{3}{4}\right)^3 \cdot (e+2)$

c) $T(r) = 2(r+1)^5 \cdot r^2$ d) $R(x) = (x+4) \cdot (x+1)^4$

5) Factoriza los siguientes polinomios e indica la multiplicidad de las raíces.

a) $A(x) = x^4 - x^2$ b) $B(x) = \frac{2x^3 - 16}{9}$ c) $D(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x$

6) a) Si un polinomio es de grado 5, ¿cuántas raíces debe tener?

b) Se sabe que ellas toman únicamente 2 valores reales distintos, $x = 5$ y $x = -2$, ambas de multiplicidad mayor que 1; escribe todas las formas posibles que tomaría el polinomio factorizado, sabiendo que el coeficiente del término de mayor grado es 2.

7) Para el polinomio: $R(x) = -(x - 4)^2(x + 1)^3(x^2 - 9)$, indica

a) el grado del polinomio y el coeficiente principal,

b) las raíces y su multiplicidad

c) el cociente y el resto de la división $R(x) \div (x - 3)$

8) Completa las siguientes factorizaciones, observa la regularidad y extrae una conclusión:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \\
&x^3 - 8 = (x-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x^4 - 16 = (x-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x^5 - 32 = (x-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\vdots \\
&x^n - a^n = (x-a)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ecuaciones polinómicas

Siendo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n , llamaremos ecuación polinómica de grado n a la siguiente igualdad o a toda aquella que, mediante propiedad uniforme, sea equivalente a :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Para resolverla, es decir para hallar los valores de x que la verifican, se puede factorizar (si es posible) el polinomio y determinar sus raíces.

El desarrollo del Álgebra a través de la historia ha sido impulsado principalmente por el interés en resolver ecuaciones. Ecuaciones lineales o de grado 1 (del tipo $ax+b=0$), ecuaciones cuadráticas o de grado 2 (del tipo $ax^2+bx+c=0$), ecuaciones cúbicas o de grado 3 (del tipo $ax^3+bx^2+cx+d=0$) y ecuaciones de cualquier grado, en general.[5]

¿Cómo definirías Inecuación polinómica?

ACTIVIDAD 8

1) Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\Re$:

a) $(x + 4).(x + 9) = 0$ b) $(x + 2)^2 = 0$ c) $x^2 = 7x$

d) $x^4 - 4x^2 = 3x^3 - 12x$ e) $-u^4 + 2u^2 = 0$ f) $x^4 + x^3 = 3x^2 + 4x + 4$

g) $x^3 + x \leq 4x^2 - 6$ h) $2x^3 - 5x^2 - 3x > 0$ i) $x^3 - x^2 \geq 10 - 3x$

j) $x^4 = (x^3 + 2x^2 + 4x + 8)(x-2) + 16$ k) $x^2 + 4x + 9 = (x + 2)^2$

[5] Los polinomios tienen su historia…
http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=70279

2) Despeja de las siguientes fórmulas las variables indicadas.

a) $V = PR2h - PTh$, despejar h

b) $a = \frac{x}{1+x}$, despejar x

c) $c^2(c - x) - b^2(x - b) = b^2(x - b)$, despejar x

d) $x(x + a) = (x - a)^2$, despejar x

e) $(x + a)(x - b) - x(x + a) = 0$, despejar x

3) A través de un sistema de navegación se rastreó la posición de un globo meteorológico. Su altura sobre el nivel del mar se modelizó con la siguiente fórmula:

$$h(x) = \frac{x^3 - 12x^2 + 47x + 68}{16}$$

con x medido en días y h en miles de metros.

¿Llegó en algún momento a una altura de 8000 metros? Si es así, obtiene dicho/s momentos.

4) Calcula $(a^2 + b^2)$ sabiendo que a y b son enteros positivos y que verifican las siguientes igualdades:

$$a.b + a + b = 71 \qquad a^2.b + a.b^2 = 880$$

SI NECESITAS MÁS EJERCICIOS…

1) Factoriza los siguientes polinomios.

a) $m^4 - m^3 + m - 1$

b[6]) $2u^5 - u^4 + 6u^3 - 3u^2 + 8u - 4$

c) $t^4 - \frac{1}{81}$

d) $x^2 - \frac{49}{121}$

e) $25h^2 - 4$

2) Factoriza los siguientes polinomios e indica sus raíces y la multiplicidad de cada una.

a) $R(c) = c^3 - 3c + 2$

b) $B(m) = m^4 + 6m^3 + 13m^2 + 12m + 4$

3) Factoriza completamente los siguientes polinomios e indica sus raíces y la multiplicidad de cada una.

a) $C(x) = x^3 - x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$

b) $F(x) = x^6 - \frac{1}{16}x^2$

c) $E(x) = -x^4 + 3x^3 - \frac{9}{4}x^2$

d) $M(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x$

e) $T(m) = m^5 - 4m^3 - 8m^2 + 32$

f) $V(z) = 3z^4 - 4z^2 + 1$

g) $Z(v) = 20v^3 - 60v^2 + 45v$

4) Expresa los siguientes polinomios en forma completamente factorizada.

a) $P(x) = -4x^3 - 2x^2 + 4x + 2$

b) $R(a) = -4a^3 - 4a^2 + a + 1$

c) $G(b) = \frac{3}{4}b^5 - \frac{3}{32}b^2$

d) $M(c) = c^4 - c^3 + 64c - 64$

e) $S(d) = d^4 + d^3 - d^2 - d$

f) $Q(e) = 6e^4 - 3e^3 - 24e^2 + 12e$

[6] Puedes usar un artificio matemático para factorizar.

5) ¿Es el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^2$ divisible por $(x - 1)$? Factorízalo completamente en R.

Respuestas

1) a) $(m-1)\cdot(m+1)\cdot(m^2-m+1)$ b) $2\left(u-\frac{1}{2}\right)\cdot(u^2+u+2)\cdot(u^2-u+2)$

c) $\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(t^2+\frac{1}{9}\right)$ d) $\left(x-\frac{7}{11}\right)\cdot\left(x+\frac{7}{11}\right)$ e) $25\left(h-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(h+\frac{2}{5}\right)$

2) a) R(c) = $(c-1)^2\cdot(c+2)$ la raíz c = 1 tiene multiplicidad 2 y c = - 2 tiene multiplicidad 1.

b) B(m) = $(m+1)^2.(m+2)^2$ la raíz m = - 1 tiene multiplicidad 2 y la raíz m = - 2 tiene multiplicidad 2.

3) a) C(x) = $(x-1).(x-1{,}5).(x+1{,}5)$ las 3 raíces tienen multiplicidad 1.

b) F(x) = $x^2(x-0{,}5)(x+0{,}5)(x^2+0{,}25)$ la raíz x = 0 es de multiplicidad 2, las raíces x = 0,5 y x = - 0,5 tienen multiplicidad 1 y hay 2 raíces no reales.

c) E(x) = $-x^2.(x-1{,}5)^2$ la raíz x = 0 es de multiplicidad 2 y la raíz x = 1,5 es de multiplicidad 2.

d) M(x) = $0{,}5x(x-2)^3$ la raíz x = 0 es de multiplicidad 1 y la raíz x = 2 es de multiplicidad 3.

e) T(m) = $(m+2)(m-2)^2(m^2+2m+4)$ la raíz m = -2 es simple, la raíz m = 2 es doble y hay 2 raíces no reales.

f) V(z) = $3(z-1)(z+1)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ las 4 raíces de V(z) son simples.

g) Z(v) = $20v(v-1{,}5)^2$ la raíz v = 0 es de multiplicidad 1 y la raíz x = 1,5 es de multiplicidad 2.

4) a) P(x) = $-4(x+0{,}5)(x-1)(x+1)$ b) R(a) = $-4(a+1)(a-0{,}5)(a+0{,}5)$

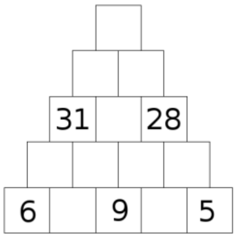
c) G(b) = $0{,}75b^2(b-0{,}5)(b^2+0{,}5b+0{,}25)$ d) M(c) = $(c-1)(c+4)(c^2-4c+16)$

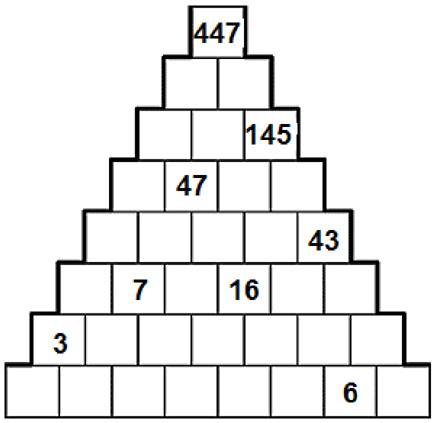
e) S(d) = $d(d-1)(d+1)^2$ f) Q(e) = $6e(e-0{,}5)(e-2)(e+2)$

5) (x – 1) no es factor de P(x). P(x) = x^2(x – 2).(x + 2)

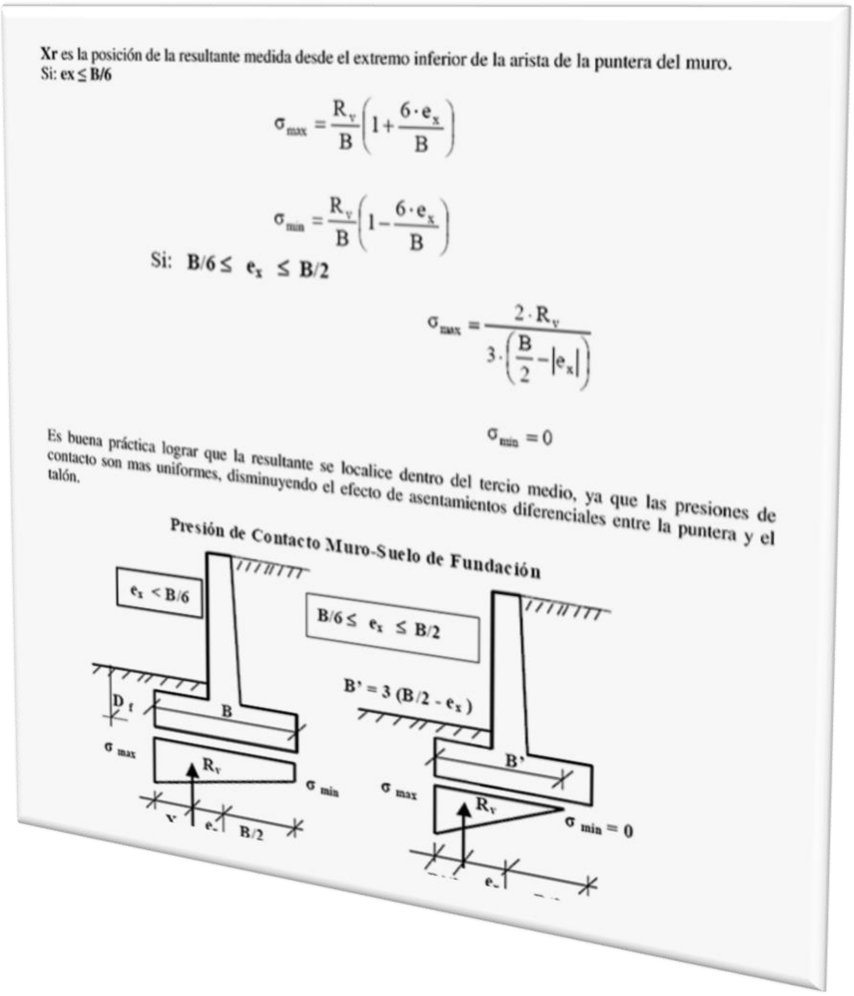
Para entretenernos un rato!! Solo cuando hayas terminado las actividades asignadas!!

Pirámides Numéricas: Completa las pirámides colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga la suma de los dos números de las casillas inferiores.





Expresiones y Ecuaciones Algebraicas Racionales Fraccionarias



Xr es la posición de la resultante medida desde el extremo inferior de la arista de la puntera del muro.
Si: **$e_x \leq B/6$**

$$\sigma_{max} = \frac{R_v}{B}\left(1 + \frac{6 \cdot e_x}{B}\right)$$

$$\sigma_{min} = \frac{R_v}{B}\left(1 - \frac{6 \cdot e_x}{B}\right)$$

Si: **$B/6 \leq e_x \leq B/2$**

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot R_v}{3 \cdot \left(\frac{B}{2} - |e_x|\right)}$$

$$\sigma_{min} = 0$$

Es buena práctica lograr que la resultante se localice dentro del tercio medio, ya que las presiones de contacto son mas uniformes, disminuyendo el efecto de asentamientos diferenciales entre la puntera y el talón.

Presión de Contacto Muro-Suelo de Fundación

Situación 1:

Un avión voló desde la ciudad A hasta la ciudad B, distante 4200 [km]. La velocidad para el viaje de regreso fue de 100 [km/h] más rápido que la velocidad de ida. Si el viaje total dura 13 [h], ¿cuál es la velocidad del avión en el viaje de ida? Considera velocidad constante.

Completa la siguiente tabla:

	Velocidad [km/h]	ΔD [km]	Δt [h]
Ida	v	4200	$\Delta t_1 =$
Vuelta			$\Delta t_2 =$

Considerando que $t_1 + t_2 = 13$, plantea una ecuación que modelice la situación. Dicha ecuación, ¿es polinómica? ¿Por qué?

Expresiones algebraicas racionales

Dados 2 polinomios P(x) y Q(x), tal que Q(x) sea distinto del polinomio nulo, se denomina **expresión algebraica racional** a toda expresión de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Nota: Si Q(x), además de no ser el polinomio nulo, es distinto del polinomio de grado cero, diremos que la expresión es algebraica racional **fraccionaria**.

Expresiones Algebraicas Racionales

→ **Enteras (Polinomios)**

→ **Fraccionarias**

☑ **Ejemplos:**

a) En deducciones de fórmulas del movimiento armónico simple amortiguado (oscilaciones) podemos encontrar la siguiente igualdad:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}$$

El radicando es una diferencia de expresiones fraccionarias considerando a m como la variable[7].

b) Trabajando con campo y potencial eléctrico podemos encontrar:

$$v = \frac{kq}{x - \left(\frac{l}{2}\right)} - \frac{kq}{x + \left(\frac{l}{2}\right)}$$

Siendo x la variable también tenemos una diferencia es expresiones algebraicas fraccionarias.

[7] La expresión completa es irracional.

c) En resistencia de materiales, para calcular determinada tensión en una sección rectangular se usa las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + G\frac{Ne}{bh^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{N}{bh} - G\frac{Ne}{bh^2}$$

ACTIVIDAD 1

Marca con una X las expresiones algebraicas fraccionarias.

a) $3x^2 - \frac{1}{2}x - 5$ ☐   b) $5d^{-1}$ ☐   c) $\frac{g-2}{3}$ ☐   d) $(n+3) \div n^5$ ☐

Dominio

El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de valores reales que puede tomar la variable de modo que se puedan resolver las operaciones que intervienen.

☑ **Ejemplos:**

a) $\frac{3}{x - x^2}$ Dom: $\Re - \{0, 1\}$

b) $\frac{5c^2 - 3}{3c + 1}$ Dom: $\Re - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $\frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ Dom: $\Re - \{2\}$

d) $\frac{1}{b^4 + 8}$ Dom: $\Re$

Expresión Algebraica Racional Irreducible

Una expresión algebraica racional es **irreducible** si no existen en ella factores comunes al numerador y al denominador.

☑ **Ejemplos:**

a) $\frac{a}{a-3}$ Dom: .... Expresión irreducible

b) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ = ... Dom:......... Expresión reducible

c) $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{x(x+1)}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x(x+1)}{\underbrace{x(x+1)}(x-3)} = \frac{1}{x-3}$. Dom: ....

factores comunes al numerador

y al denominador

Simplificación de expresiones algebraicas racionales

Para simplificar una expresión algebraica fraccionaria conviene factorizar el denominador y el numerador y dividir ambos por sus factores comunes (D.C.M); se obtiene así una expresión irreducible equivalente a la original.

☑ **Ejemplos:**

a) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2-x+3}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\dfrac{1}{x+1}$ Dom: ....

b) $\dfrac{k^2-4}{k-2}=\dfrac{(k-2)(k+2)}{k-2}=k+2$ Dom: ....

✓ Al simplificar, antes debemos determinar el dominio de la expresión.

✓ Algunas fracciones algebraicas resultan equivalentes a expresiones algebraicas enteras.

✓ El objeto de simplificar es reducir la expresión y poder efectuar operaciones en forma más sencilla.

ACTIVIDAD 2

1) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{5x^2-5}{x+1}$ b) $\dfrac{1-d}{d-1}$ c) $\dfrac{1+4y+4y^2}{1-4y^2}$ d) $\dfrac{x^3-x^2}{x^3+x^2-2x}$

e) $\dfrac{e^5-16e}{e^2-2e}$ f) $\dfrac{n^2+7n+10}{n^2-25}$ g) $\dfrac{3ax^2-15ax+6ax-30a}{6a^2x^2+24a^2x+24a^2}$

2) ¿0 es igual a 1? Al parecer, los pasos siguientes dan ecuaciones equivalentes, lo cual parece demostrar que 1 = 0. Explica qué se hace en cada uno de los pasos y encuentra el error.

$$x=1$$
$$x^2=x$$
$$x^2-x=0$$
$$x(x-1)=0$$
$$\frac{x(x-1)}{(x-1)}=\frac{0}{(x-1)}$$
$$x=0$$
$$1=0$$

Multiplicación y División de E. A. R.

Multiplicación

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas racionales es otra expresión algebraica racional cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)} \qquad Q(x) \neq 0 \ \wedge \ S(x) \neq 0$$

☑ **Ejemplos**:

a) $\frac{2x}{x^3} \cdot \frac{x^5}{8x} = \frac{2x^6}{8x^4} = \frac{x^2}{4}$ Dom: $\Re - \{0\}$

b) $\frac{x^2}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{3x^3-x} = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x+2}{x(3x^2-1)} = \frac{x}{(x-2)(3x^2-1)}$ Dom: $\Re - \left\{\pm 2, 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

c) $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x^2-x}{x^3+2x^2} =$ ....

✓ Para que el resultado de la multiplicación sea una expresión irreducible, recomendamos factorizar los numeradores y denominadores, identificar el dominio, simplificar y luego realizar la operación indicada.

División

El resultado de dividir dos expresiones algebraicas racionales es otra expresión que se obtiene multiplicando la primera expresión por la recíproca de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)} \qquad Q(x) \text{ ....}$$

☑ **Ejemplos**:

a) $\frac{m^2-2m+1}{m^3} \div \frac{3m-3}{m} = \frac{(m-1)^2}{m^3} \cdot \frac{m}{3(m-1)} = \frac{m-1}{3m^2}$ Dom: ....

b) $\frac{g^2-2g-15}{g^2-1} \div \frac{g^2+6g+9}{g^2+2g+1} =$ .... Dom: ....

✓ Al igual que en la multiplicación en la división conviene simplificar, siempre que sea posible, antes de realizar las operaciones.

ACTIVIDAD 3

Resuelve simplificando previamente.

a) $\frac{3v^3}{2v} \cdot \frac{4v^2}{9v} =$ b) $\frac{5y^4}{3y} \div \frac{10y}{21y^3} =$ c) $\frac{x^3-8}{x^2-4} \div \frac{2x^4+4x^3+8x^2}{2x^3+4x^2} =$

d) $\frac{2}{t^2-3t} \cdot \frac{t-3}{t} =$ e) $\frac{x^2-y^2}{a^3-a^2b+ab^2} \div \frac{a+b}{ax^2+ay^2} =$

Adición y Sustracción de E. A.R.

☞ Si las expresiones tienen igual denominador, se suman o restan sus numeradores según corresponda.

☑ **Ejemplos**:

a) $\frac{s}{s-2}+\frac{s+2}{s-2}=\frac{s+(s+2)}{s-2}=\frac{2s+2}{s-2}$ Dom: ....

b) $\frac{1}{x-1}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1-(2x-1)}{x-1}=\frac{-2x+2}{x-1}=\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2$ Dom: ....

☞ Para las expresiones con distinto denominador, primero debemos buscar el **común denominador**, que es el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

☑ **Ejemplos**:

a) $\frac{n}{n-2}+\frac{3n-1}{n^2-2n}=\underbrace{\frac{n}{n-2}+\frac{3n-1}{n(n-2)}}_{\text{primero se factorizan los denominadores}}=\underbrace{\frac{n^2+3n-1}{n(n-2)}}_{\text{luego, se busca el común denominador y resuelvo}}$ Dom.: ....

b) $\frac{z}{z+1}-\frac{2}{z-1}=\frac{z(z-1)-2(z+1)}{(z+1)(z-1)}=\frac{z^2-3z-2}{z^2-1}$ Dom: ....

c) $\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=$

$$\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x+1)+2\cdot 2-x\cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{x+1+4-2x^2+2x}{2(x-1)(x+1)}=$$

$$\frac{-2x^2+3x+5}{2x^2-2}=\frac{-2\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)\cdot(x+1)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-1\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x-1}=\frac{x-\frac{5}{2}}{1-x}$$

Dom: …………........

ACTIVIDAD 4

1) Resuelve la situación 1.

2) Efectúa las siguientes sumas y restas de igual denominador.

a) $\frac{2q}{q+4}+\frac{8}{q+4}=$ b) $\frac{6w^2}{4w-8}-\frac{12w}{4w-8}=$ c) $\frac{3r^3+1}{12r^2}+\frac{5r^3-1}{12r^2}=$

3) Efectúa las siguientes sumas y restas.

a) $\frac{a-1}{a-2}-\frac{a+3}{a-3}=$ b) $\frac{u}{2}+\frac{1}{u}+1=$ c) $\frac{3}{x}+\frac{2x}{x^2}=$ d) $\frac{p}{2p-6}-\frac{3}{p-3}=$

4) Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, entonces la resistencia total R es: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Expresa en forma reducida la resistencia total.

5) Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases}\frac{1}{2q_1}+\frac{1}{q_2}=2\\ \frac{3}{q_1}-\frac{1}{q_2}=5\end{cases}$$

Operaciones Combinadas

Para resolver las operaciones combinadas es conveniente:

∗ separar en términos,

∗ establecer el dominio de las expresiones,

∗ efectuar las operaciones indicadas en cada término (multiplicación, división, suma o resta de expresiones algebraicas),

∗ simplificar si es posible.

☑ **Ejemplo**:

$$\left(\frac{1}{x}-2\right)\div\frac{x+1}{x^2}-\frac{3x}{x+1}=\left(\frac{1-2x}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x+1}\right)-\frac{3x}{x+1}=\frac{x-2x^2}{x+1}-\frac{3x}{x+1}=\frac{x-2x^2-3x}{x+1}=$$

$$=\frac{-2x-2x^2}{x+1}=\frac{-2x(1+x)}{x+1}=-2x \qquad \text{Dom}: \ \Re - \{-1,0\}$$

Ecuaciones Fraccionarias

En la situación 1 ya resolviste una ecuación fraccionaria.

Situación 2:

Los asistentes a una cena tienen que pagar en total \$ 3900. Pero se decide que dos de ellos no paguen la cena, por lo cual los demás tienen que pagar cada uno \$ 40 más de lo que les correspondía pagar originalmente. Con base en la información anterior determina el número de personas que asistieron a la cena.

Considera que hay "x" asistentes a la cena y que cada uno pagaría "y" pesos.

Completa las siguientes oraciones:

Si todos pagan, la ecuación que relaciona ambas variables es: ....

Si no pagan dos, la ecuación que relaciona ambas variables es:........................

Respuesta:………………

Ecuaciones Fraccionarias

Llamaremos ecuaciones fraccionarias a aquellas que en uno, o en ambos miembros, haya una expresión algebraica racional fraccionaria.

Resuelve las siguientes ecuaciones.

1) $\dfrac{2-x^2}{2x^2}+\dfrac{\frac{1}{2}x+1}{x}=\dfrac{2+3x^2}{3x^3}$

2) $\dfrac{5}{3a-9}-\dfrac{a+4}{a^2-9}=\dfrac{1}{a+3}$

3) $\dfrac{1-h}{h-1}+\dfrac{4h}{2h+1}=1$

4) $\dfrac{4d}{d^2-4d+4}-\dfrac{1}{d+2}=\dfrac{3}{d-2}$

ACTIVIDAD 5

1) Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{1}{2p-1}+\dfrac{2p}{1-2p}=$

b) $\dfrac{3x^3}{(x+2)(x-2)}-\dfrac{24x}{x^2-4}+\dfrac{48}{x^3-4x}=$

c) $(s-1)\div\left(s-\dfrac{1}{s}\right)=$

d) $\left(\dfrac{d}{d-3}+\dfrac{2}{d^2-6d+9}\right)\div\dfrac{d-2}{d-3}=$

e) $\dfrac{x-7}{x^2-16}\div\dfrac{x^2-14x+49}{x+4}-(x+4)\div\dfrac{x^2-16}{4}=$

f) $\dfrac{g^2-25}{g^2-2g-3}\cdot\dfrac{g-3}{g^2+10g+25}-\dfrac{g+5}{g^2+6g+5}=$

2) Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\dfrac{m^3-3}{m^{1/2}+3m}$ es una expresión algebraica racional fraccionaria.

b) El dominio de $\dfrac{6x-18}{3x^2-27}$ es $\Re-\{-3\}$

c) $\dfrac{3x+2}{\sqrt{5}}$ es una expresión algebraica racional fraccionaria.

3) Despeja la variable *m* de la siguiente expresión: $i=\dfrac{m}{1-m\,p}$

4) Elige la opción correcta. Justifica tu elección para que se considere válida

a) La expresión fraccionaria $\dfrac{2n+5}{3n-2}$ no está definida para n igual a:

i) $-\dfrac{5}{2}$ ii) $\dfrac{2}{3}$ iii) $-\dfrac{2}{3}$ iv) $\dfrac{5}{2}$

b) Si despejamos m de la expresión $\dfrac{1}{am}+\dfrac{1}{bm}=\dfrac{1}{c}$ nos queda que:

i) $m=\dfrac{c}{a+b}$ ii) $m=\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}$

5) Plantea y resuelve las siguientes situaciones.

a) El denominador de una fracción es 4 unidades mayor que el numerador. Si al numerador y al denominador de la fracción se le agrega 5 unidades, la fracción resultante es equivalente a $\dfrac{2}{3}$. Halla la fracción original. (Rta. $\dfrac{3}{7}$)

b) La velocidad de un avión respecto del aire es de 250 [millas/h]. Su piloto observó que tardaba 24 [min] más en volar una distancia de 495 [millas] contra el viento que en volar a dirección del viento. Determina la velocidad del viento. (Rta. 25 [millas/h])

c) La velocidad de la corriente de un río es de 3 [km/h]. Un bote tarda el mismo tiempo en navegar 8 [km] río abajo que en navegar 5 [km] río arriba. ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila? (Rta. 13 [km/h])

d) Si al numerador de la fracción $\frac{4}{21}$ se le suma el duplo de cierto número y al denominador se le resta el triple del mismo número se obtiene una fracción equivalente a $\frac{5}{6}$. Halla el número. (Rta. El número es 3)

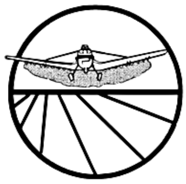
e) Una pasajera va por la cinta transportadora de un aeropuerto, después de 25 [m] comienza a caminar a 0,50 [m/s]. Si la longitud del andador es 75 [m] y el recorrido duró 145,83 [s], ¿Cuál es la velocidad del andador? (Rta. Aprox. 0,42 [m/s])

f) Una lancha de motor tiene una velocidad de 25 [km/h] y puede navegar cierta distancia río abajo en dos tercios del tiempo que tarda en navegar la misma distancia río arriba. Halla la velocidad de la corriente del río. (Rta. 5 [km/h])

g) Un tanque puede llenarse utilizando dos canillas A y B. Con la canilla A el tanque se llena en 18 [h]. Con las 2 canillas el tiempo que tarda en llenarse es de 9,9 [h]. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque usando la canilla B? (*Puedes usar en el planteo cocientes de incrementos*) (Rta. 22 [h])

h) Un tanque tiene tres grifos, A, B y C. Los tres abiertos lo llenan en dos horas. Si se abren solo A y B, se llena en 5 horas. ¿Cuánto se tarda en llenarlo solo con el grifo C abierto? (Rta. Aprox. 3,3 [h])

i) Dos aviones se utilizan para fumigar una parcela. Si uno de ellos se demora la mitad del tiempo que el otro, y juntos se demoran 5[h], encuentra el tiempo que le toma a cada avión por sí solo cubrir toda la parcela. (Rta. Un avión tardará 7,5 [h] y el otro 15 [h])



6) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{2x-4}=\frac{x}{3x-6}-\frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{m^2-m-6}=\frac{3}{m^2-4}+\frac{1,5}{m^2-5m+6}$

b) $\frac{p+1}{3p-6}-\frac{p-1}{2p+4}=\frac{10-p^2}{6p^2-24}$

7) Despeja x de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2 \quad b\neq 0 \wedge a\neq 0$

b) $\frac{2x}{x-1}-\frac{bx-b}{x^2-2x+1}:\frac{bx+b}{x-1}=2 \quad b\neq 0$

SI NECESITAS MÁS EJERCICIOS…

1) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{5a^4-5}{(3a^2+3)\cdot(a^2+2a+1)}$

b) $\frac{z^2-z-6}{z^2-3z}$

2) Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{10}{t-2}+\frac{8}{t+2}=$

b) $\frac{12}{y^2+2y}-\frac{2}{y}+\frac{6}{y+2}=$

c) $\frac{u^2+6u+9}{u+3}+\frac{u^2-9}{u-3}=$

d) $\frac{8}{i^2-4}+\frac{i+4}{i+2}=$

e) $\frac{a+5}{a^2+10a+25}-\frac{a+4}{a^2-16}=$

f) $\frac{x^2+2}{(x-2)(x^4-1)}-\frac{3x}{x^5-2x^4-x+2}=$

g) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-2x+4}\cdot(x^3+8)\cdot\frac{-8x}{2x^2+3x-2}=$

h) $\frac{x^2+x-6}{x^2-1}\div\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}=$

i) $\frac{2e-e^3}{e^2}-\frac{e(e+2)}{e^2}=$

j) $\frac{1+x}{x^2-1}+\frac{5x^2+x}{x^2-1}-\frac{4x^2}{x^2-1}=$

3) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x^3+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}=1$

b) $\frac{m-2}{m+2}-\frac{m+2}{m-2}=\frac{16}{m^2-4}$

Respuestas

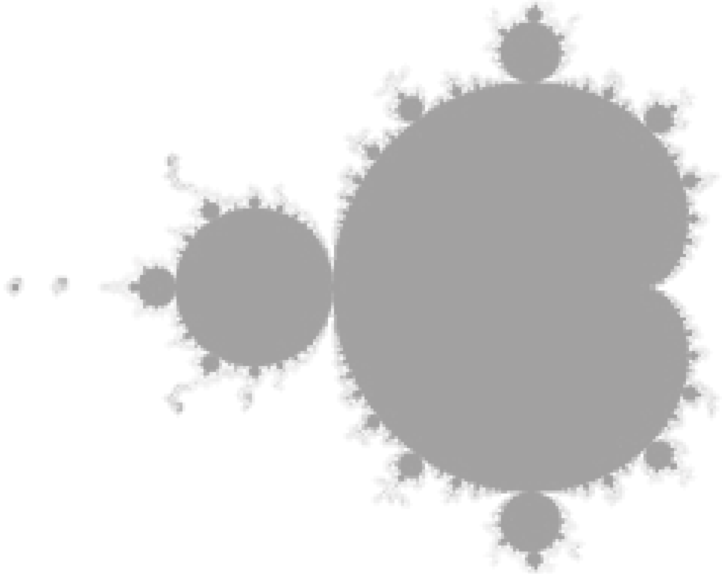
1) a) $\frac{5(a-1)}{3(a+1)}$ Dom: $\Re-\{-1\}$ 1) b) $\frac{z+2}{z}$ Dom: $\Re-\{0,3\}$ 2) a) $\frac{18t+4}{t^2-4}$ Dom: $\Re-\{\pm 2\}$

2) b) $\frac{4}{y}$ Dom: $\Re-\{-2,0\}$ 2) c) $2u+6$ Dom: $\Re-\{\pm 3\}$ 2) d) $\frac{i}{i-2}$ Dom: $\Re-\{\pm 2\}$

2) e) $\frac{-9}{(a+5)(a-4)}$ Dom: $\Re-\{-5,-4,4\}$ 2) f) $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ Dom: $\Re-\{-1,1,2\}$

2) g) $-4x$ Dom: $\Re-\left\{\frac{1}{2},-2\right\}$ 2) h) $\frac{x-2}{x+1}$ Dom: $\Re-\{-3,-2,-1,1\}$ 2) i) $-e-1$ Dom: $\Re-\{0\}$

2) j) $\frac{x+1}{x-1}$ Dom: $\Re-\{-1,1\}$ 3) a) $x=-\frac{1}{2}$ 3) b) No tiene solución.



Números Complejos

Para recordar…

Ya has resuelto ecuaciones como las siguientes:

x + 5 = 12; 3m = 15; 2 p + 7 =19

cuyas soluciones son 7, 5 y 6, respectivamente, *números naturales*.

Pero una ecuación como: x + 12 = 5, no tiene solución en **N** (conjunto de los números naturales). Por eso se creó el conjunto **Z** de los *números enteros*.

Análogamente una ecuación como: 3.m = 16, no tiene solución entera, por ello se creó el conjunto de los *números racionales*: **Q**.

Ecuaciones como x^2 - 2 = 0 tienen por solución números que no son racionales: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son *números irracionales*, que junto a los números racionales forman el conjunto de los *números reales*: **R**.

El problema de Cardano

En el año 1545, el matemático italiano Gerónimo Cardano (1501-1576) trabajaba en la resolución del siguiente problema:

> ¿Es posible expresar al número 10 como suma de dos números reales tales que el producto de ellos sea igual a 40?

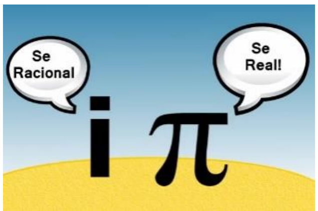
Para resolver este problema, llamamos x e y a los números buscados, planteamos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=10 \\ x.y=40 \end{cases}$. Despejando y de la primera ecuación, sustituyendo en la segunda y resolviendo el producto nos queda: $-x^2 + 10x = 40$.

Si aplicamos la fórmula resolvente, se obtiene: $x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{-60}}{-2}$ lo que resulta equivalente a: $x = 5 \pm \sqrt{-15}$.

Cardano advirtió que el problema así planteado no podía ser resuelto, porque las soluciones halladas no tienen sentido dentro del conjunto de los números reales: $\sqrt{-15}$ no es un número real, es decir, no hay ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -15. Entonces no es posible expresar el número 10 como la suma de dos números reales tales que el producto de ellos sea igual a 40.

<u>Un primer número para empezar:</u>

Más tarde, en el año 1777, Leonardo Euler (1707-1783) introdujo el símbolo **i** (por *imaginario*) para indicar un número tal que $i^2 = -1$.



Entonces, si tenemos la ecuación: $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$
podemos afirmar que sus soluciones son: $x = i$ y $x = -i$.
En efecto: $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$
$(-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

Volviendo al problema de Cardano, tenemos: $\sqrt{-15} = \sqrt{15.(-1)} = \sqrt{15.\,i^2} = \sqrt{15}.\,i$

y las soluciones de la ecuación cuadrática $-x^2 + 10x - 40 = 0$ pueden expresarse como:

$$x_1 = 5 + \sqrt{15}\,.i \qquad\qquad x_2 = 5 - \sqrt{15}.i$$

LOS NÚMEROS COMPLEJOS – DEFINICIONES

Podemos pensar en otras ecuaciones como: $x^2 + 4 = 0$ y $x^2 - 2x + 2 = 0$ cuyas soluciones son, respectivamente: 2i y -2i ; 1+ i y 1 – i.

En general, cualquier ecuación cuadrática que no tenga solución en el conjunto de los números reales, admitirá como soluciones a dos números de la forma: a + b i.

✓ Se llama *número complejo* a todo número que se escribe en la forma:

a + b.i

donde **a** y **b** son números reales, e **i** es la unidad imaginaria, tal que $i = \sqrt{-1}$ o $i^2 = -1$.
✓ Al número **a** se lo denomina *parte real* del número complejo y al número **b**, *parte imaginaria*.
✓ Se denomina con la letra **C** al conjunto de todos los números complejos.

☑ Ejemplos:

Número complejo	Parte real	Parte imaginaria
$5 + \sqrt{15}$ i	5	$\sqrt{15}$
2i	0	2
1 - i	1	-1
-0,5 – 3 i	-0,5	-3
-7	-7	0
π i	0	π
0	0	0

✓ Todo número complejo cuya parte imaginaria es cero ($b = 0$ y $a \neq 0$) se corresponde con un número real, por eso se lo llama ***complejo real***.

☑ Ejemplo: $-7+0\,i = -7$.

✓ Todo número complejo cuya parte real es cero ($a = 0$ y $b \neq 0$) se denomina ***complejo imaginario puro***.

☑ Ejemplos: $2\,i$, $\pi\,i$, $-i$.

✓ El número complejo cuya parte real e imaginaria es cero ($a = 0$ y $b = 0$) se denomina ***complejo nulo.***

✓ Dos números complejos son iguales si sus respectivas partes reales son iguales y también lo son sus respectivas partes imaginarias.
Simbólicamente:

$$a + bi = c + di \quad \text{si y solo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

✓ Dos números complejos se llaman ***conjugados*** si tienen la misma parte real y las partes imaginarias son opuestas.

✓ Dos números complejos se llaman ***opuestos*** si tienen parte real e imaginaria opuestas.

¿Se te ocurre alguna manera de ordenar los números complejos?
Para investigar:
http://gaussianos.com/los-numeros-complejos-estan-desordenados/

✓ A diferencia de los otros conjuntos numéricos que conoces, C no está ordenado. Al menos no se le puede dar el orden de mayor o menor que le asignamos a los números reales.

✓ Toda ecuación cuadrática, con coeficientes reales, que no tiene raíces reales tiene dos raíces complejas conjugadas.

También hay ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos con soluciones complejas.

☑ Ejemplo:

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

Puede factorizarse aplicando el teorema de Gauss o sacando factor común por grupos, resultando:

$$(x - 1)\ (x^2 + 4) = 0$$

Cuyo conjunto solución es {1, 2i y -2i}.

ACTIVIDAD 1

1) Escribe dos números complejos imaginarios puros, dos números complejos reales y dos números complejos cualesquiera.

2) En cada caso, indica:

a) un número complejo cuya parte real sea el doble de la imaginaria.

b) Un número complejo cuya parte real sea racional y cuya parte imaginaria sea irracional.

c) Dos números complejos que sean soluciones de la ecuación $3x^2 + 27 = 0$.

3) Resuelve las siguientes ecuaciones en C:

a) $x^2 - 7x + 13 = 0$; b) $5x(x + 2) = 4x(x + 3) - 2$; c) $8x^2 + 20 = -28 + 5x^2$

¿Cómo son las partes real e imaginaria de las raíces obtenidas al resolver cada ecuación?

4) Halla los valores de $x \in \Re$ y de $y \in \Re$ en las siguientes ecuaciones:

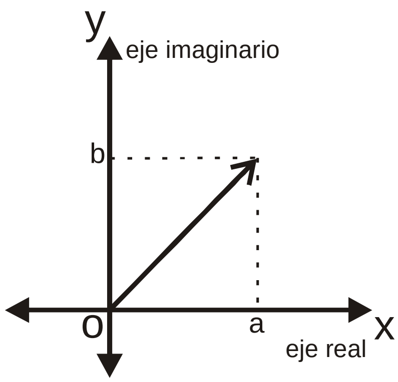
a) $(x + 2) - 3i = 4 + yi$ b) $(x + 2) - (x - y)i = 3y + 2i$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Fijado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas, los números complejos pueden representarse mediante puntos de ese plano haciendo corresponder a cada número complejo a + b i el punto de coordenadas (a ; b).

Los números complejos con parte imaginaria nula se representan sobre el eje horizontal, por esta razón al eje horizontal se lo llama *eje real.*

Los números complejos imaginarios puros se los representa sobre el eje vertical, por esta razón se llama *eje imaginario* al eje vertical.



Representación vectorial:

Como cada punto A = (a , b) del plano determina un vector de origen (0 ; 0) y extremo A, a cada número complejo a + bi le corresponde un vector $\overrightarrow{OA}$.

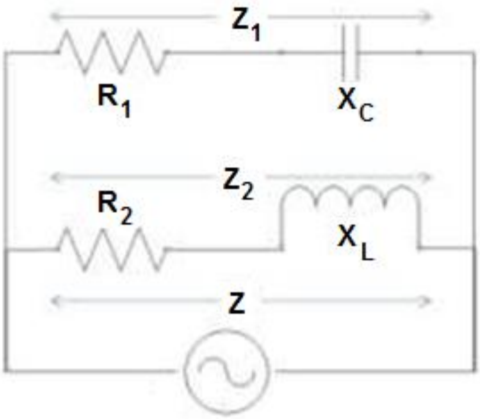
ACTIVIDAD 2

Representa gráficamente cada uno de los siguientes números complejos con sus respectivos conjugados:

a) 2 - 3 i b) 5 c) -7i d) 3 + 4i e) -2 - 4i f) - 1 + i g) 4i

APLICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS A LA ELECTRICIDAD (I)

La **impedancia** (Z) es la medida de oposición que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica un voltaje. La impedancia posee magnitud y fase, a diferencia de la resistencia, que sólo tiene magnitud.



La razón entre el voltaje (V) y la corriente (I) se define como Impedancia: $Z = \frac{V}{I}$.

La impedancia puede representarse como la suma de una parte real y una parte imaginaria, $Z = R \pm j.X$ donde R es la resistencia y X es la reactancia. Básicamente hay dos clases o tipos de reactancias:

- Reactancia inductiva o X_L, debida a la existencia de inductores.
- Reactancia capacitiva o X_C, debida a la existencia de capacitores.

La magnitud de la impedancia viene dada por la fórmula: $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$

☑ Ejemplo**:**

Para el circuito en paralelo mostrado en la figura, se sabe que R_1 = 2 Ω, R_2 = 6Ω, X_C = 4Ω, X_L = 2Ω.

Por lo que:

$Z_1 = R_1 - X_C\, i = 2 - 4i$;

$Z_2 = R_2 + X_L\, i = 6 + 2i$.

Puesto que los circuitos están en paralelo, tenemos:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

a) Expresa Z en función de las otras variables, Z = ...

b) Obtiene la magnitud de la impedancia.

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Adición de números complejos

Para sumar dos números complejos, debemos sumar las partes reales entre sí y las imaginarias entre sí.

Nota: Se aplican propiedades conmutativa y asociativa de la adición en R

☑ Ejemplo:

$$(5 + 2i) + (2 – 7\ i) = (5+2) + (2\ -7)\ i = 7 – 5\ i$$

En general:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)\ i$$

Multiplicación de números complejos

Para multiplicar dos números complejos, como las partes reales e imaginarias son números reales, se aplican propiedades distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, conmutativa y asociativa de la adición y además se tiene en cuenta que $i^2 = -1$.

☑ Ejemplo:

$$(3+2\ i)\ .\ (4 – 5\ i) = 3.\ 4 – 3.5i + 2i.\ 4 – 2i\ .\ 5i. = (12 + 10) + (-15 + 8)\ i = 22 – 7\ i\ .$$

En general:

$$(a+bi)\ .\ (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)\ i$$

ACTIVIDAD 3

1) Resuelve las siguientes operaciones entre números complejos:

a) (2 - i) – (-1+ 0,5 i) + (1,5 - 3i) =

b) (6 -5i) + (3 – i) – 2. (-5 + 6i) =

c) $\sqrt{-16}+\sqrt{-25}-\sqrt{36}-\sqrt{-49}+\sqrt{-1}=$

d) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\right)=$

e) (4+2i). (5-3i) =

f) $(1-i)^2=$

2) Resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$ y comprueba que las raíces obtenidas verifican dicha ecuación.

3) Escribe una ecuación polinómica de segundo grado cuyo coeficiente principal sea -2 y una de sus raíces sea $3 - 0{,}5i$.

4) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 - 3 = 0$ c) $x^2 + 4 = 0$.

d) $x^3+x^2+x+1=0$ e) $z^3-1=0$

5) Halla todos los valores de t para los cuales la ecuación $3x^2 + 6x - t = -1$ tiene raíces complejas conjugadas.

6) Halla el valor de $m \in \Re$ para que $(m - 2i)^2$ sea un número complejo imaginario puro.

7) Halla los números reales x e y que verifican las siguientes ecuaciones:

a) $y - 3i + xi = 2 - y + 5i$ b) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$ c) $(3 + xi).(y - 4i) = -23 - 7i$

8) Escribe dos números complejos conjugados. a) Súmalos. b) Multiplícalos. c) Analiza el resultado obtenido en cada caso y extrae alguna conclusión.

División de números complejos

Para calcular un cociente de números complejos, hay que multiplicar dividendo y divisor por el conjugado de este último.

☑ Ejemplo:

$$\frac{26-13i}{3+2i}=\frac{(26-13i).(3-2i)}{(3+2i).(3-2i)}=\frac{78-52i-39i+26i^2}{9-4i^2}=\frac{(78-26)-(52+39)i}{9+4}=\frac{52-91i}{13}=4-7i$$

Potencias de i

Completa la siguiente lista aplicando propiedades y extrae una conclusión.

$i^0=\dots$	$i^4=\dots$	$i^8=\dots$
$i^1=\dots$	$i^5=\dots$	$i^9=\dots$
$i^2=\dots$	$i^6=\dots$	$i^{10}=\dots$
$i^3=i^2\cdot i^1=\dots$	$i^7=\dots$	$i^{11}=\dots$

Obtiene ahora el resultado de $i^{425}=\dots$ y el de $i^{1032}=\dots.$

ACTIVIDAD 4

1) Resuelve las siguientes operaciones entre números complejos:

a) $\dfrac{2-5i}{4+2i}=$

b) $3i\cdot\dfrac{-2i+1}{-1+3i}=$

c) $\dfrac{(2+2i).(3-i)}{1-i}+(2+3i)=$

d) $(1-4i)\cdot(3+11\,i)-(1+i)^{-1}=$

e) $\left(\dfrac{2i}{i-3}\right)^{2}=$

f) $i^{18}-3i^{7}+i^{2}\cdot\left(1-i^{4}\right)-(-i)^{26}=$

g) $3i^{13}-4\cdot\left(2-i^{5}\right)+i^{127}=$

h) $\left(5i^{14}-\dfrac{1}{2}i^{3}\right)\cdot\left(4i^{10}+2i^{28}\right)=$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que $z\in C$:

a) $\dfrac{z+3i}{1-z}=2+5i$

b) $\dfrac{z+2i}{5+i}-\dfrac{z}{4-i}=2$

NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA

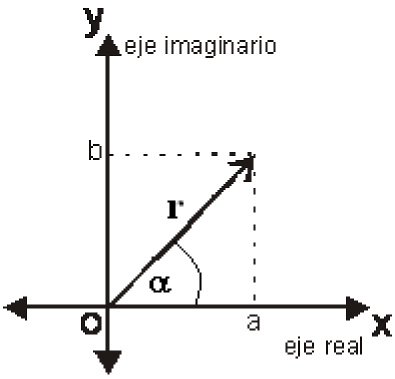
✓ Un número complejo escrito en la forma a + b i está expresado en ***forma binómica***.

Como ya hemos visto, puede representarse por un vector de componentes a y b. El módulo de dicho vector será:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

Además se define como argumento del número complejo al ángulo α que forma con el eje de abscisas positivo (orientado en sentido positivo, es decir, contrario al movimiento de las agujas del reloj). De esta manera, se tiene que:

$$\alpha = arc\ tg\,\frac{b}{a}$$



✓ El número a + b i queda perfectamente determinado si indicamos su módulo r y su argumento α. Podemos escribirlo en la llamada ***forma polar*** r_α.

☑ Ejemplo:

Para expresar en forma polar el número 1+ i, es necesario realizar los siguientes cálculos:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\frac{1}{1} = 45^{o} \qquad Luego: 1+i \rightarrow \sqrt{2}_{45^{o}}$$

¿Y si tenemos un número complejo en forma polar y necesitamos expresarlo en forma binómica… como procedemos?

Recuerda las razones trigométricas y completa las siguientes igualdades usando la notación del gráfico anterior:

$$sen(\alpha) = \frac{b}{r} \Rightarrow b = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad cos(\alpha) = \ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Usando estas igualdades, podemos expresar al número complejo

$$z = r.cos(\alpha) + r \cdot sen(\alpha)i = a + bi$$

A la expresión $z = r.(cos(\alpha) + sen(\alpha)i)$ se la llama **forma trigonométrica** de un número complejo cuyo módulo es *r* y cuyo argumento es α.

ACTIVIDAD 5

1) Escribe los siguientes números complejos en forma polar o binómica, según corresponda:

a) 1 b) i c) –i d) $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e) $3_{240^{o}}$ f) $2_{315^{o}}$

2) Dados $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{3} + i$:

a) Pasa a forma polar ambos números.

b) Resuelve las siguientes operaciones y luego expresa en forma polar el resultado.

I) $z_1 \cdot z_2 =$ II) $z_1 \div z_2 =$ III) $(z_2)^2 =$ IV) $(z_2)^3 =$

c) Observa los resultados de a) y b) y extrae conclusiones.

d) Si no estás seguro de tus conclusiones, repite los ítems a), b) y c) considerando ahora

$$z_1 = -5 + 5\sqrt{3}i \qquad y \qquad z_2 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

3) Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}_{35°} \cdot \sqrt{8}_{55°} =$ b) $\dfrac{18_{90°}}{6_{30°}} =$ c) $\left(\sqrt{5}_{20°}\right)^4 =$

APLICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS A LA ELECTRICIDAD (II)

En Electrotecnia, a las magnitudes vectoriales las representamos mediante números complejos.

Recuerda, la impedancia Z se la representa así: $Z = R \pm j\,X$

Donde j es el equivalente al versor i, que no se utiliza en Electrotecnia para no confundirlo con el símbolo de intensidad de corriente (i).

a) Dada una tensión $V = 220V_{0°}$ y una intensidad de corriente $I = 2\ A_{-33°}$, calcular la impedancia Z.

$$Z = \frac{V}{I} \quad por\ lo\ que \quad Z = \frac{220V_{0°}}{2A_{-33°}} = 110\Omega_{33°}$$

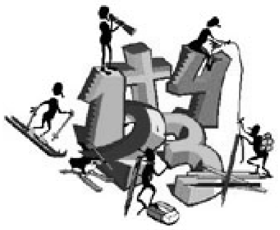
b) de la impedancia obtenida en a) calcular los valores de resistencia R y de reactancia X_L.

Para resolver este problema se pueden utilizar las relaciones trigonométricas o la transformación de forma polar a rectangular que la mayoría de las calculadoras tiene incorporada.

$$X_L = Zsen\alpha \qquad R = Z\cos\alpha$$

$$R = 110\Omega\ \cos 33^o = 92{,}25\Omega$$

$$X_l = 110\Omega sen 33^o = 0{,}54\Omega$$

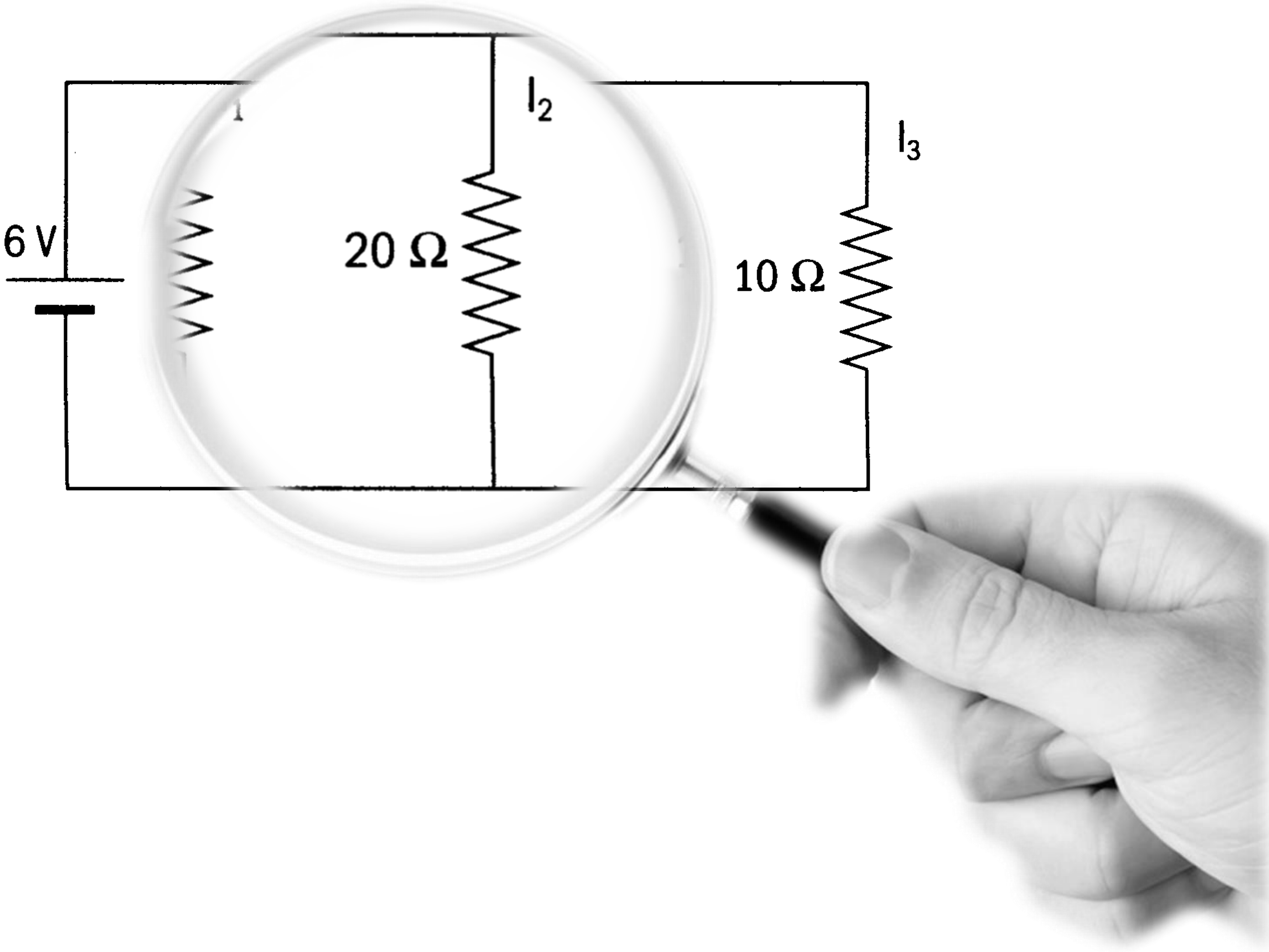


Para entretenernos un rato!! Solo cuando hayas terminado las actividades asignadas!!

3	1			8		9		
				4	5			2
			2					8
1		9					5	
	7	6	1		9	4	2	
	5					1		
4					2			
5			6	7		2		
		8		1			6	9

	4			7				3
				6	3		4	5
	6		9				7	
		6		8		3		1
8								7
7				9	5	4		
	1				6		5	
				1				
4			2			1	8	

Función Racional Fraccionaria e Irracionales



Situación 1:

Un problema usual abordado en el área de la física es el correspondiente al desplazamiento de un móvil, por ejemplo un auto, que recorre una distancia constante. Supongamos que un móvil recorre 150 [km]. Entonces en este caso, si consideramos como variables la velocidad (medida en Km/h) y el tiempo (medido en horas), se cumple que la relación entre estas variables es inversamente proporcional.

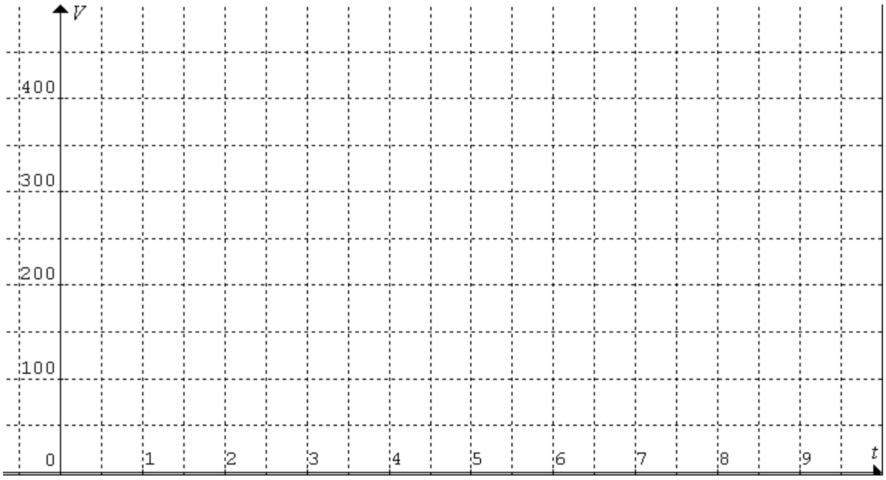
a) Si consideramos a V (la velocidad medida en km/h) en función de t (el tiempo medido en horas), la ecuación que indica esta dependencia es:

……………………….

b) ¿Cuál es el dominio y codominio de esta función? ¿Cuál es el conjunto imagen?

c) Completa la siguiente tabla y representa gráficamente la función anterior.

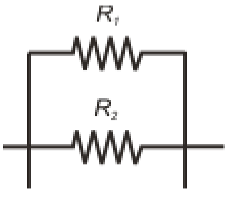
t	V(t)
1/2	
1	
2	
4	
5	
8	
10	



d) Si fuese posible, ¿qué sucede con las imágenes de t si ésta toma valores cada vez más grandes?, ¿Y si toma valores cercanos a cero?

Situación 2:

Cuando dos resistores con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, su resistencia



combinada (o equivalente) R está dada por la fórmula: $R = \dfrac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$.

Supongamos que un resistor fijo de 8 ohms (unidad para medir resistencia), se conecta en paralelo con un resistor variable como se muestra en la figura. Si la resistencia del resistor variable se denota por x, entonces la resistencia combinada R es una función de x. En nuestro caso sea $R_1 = 8$ ohms y $R_2 = x$.

a) Escribe la ecuación de la función R(x).
b) Grafica R(x), teniendo en cuenta que la resistencia no puede ser negativa.
c) ¿Qué observas a medida que les vas dando valores cada vez más grandes a x?
d) Realiza alguna interpretación a partir de la gráfica.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN RACIONAL

Se denomina **Función Racional** a:

$$f : A \to B \,/\, y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

en la que y se expresa como la razón de dos polinomios P y Q en la variable x.

De la definición se deduce que, toda función polinómica es una función racional.

Algunos ejemplos de funciones racionales son:

a) $y = f(x) = 4 - x^2$ b) $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{4x + 6}$ c) $p = f(q) = \dfrac{8}{q}$

La función racional tratada en la situación 1 responde a la forma:

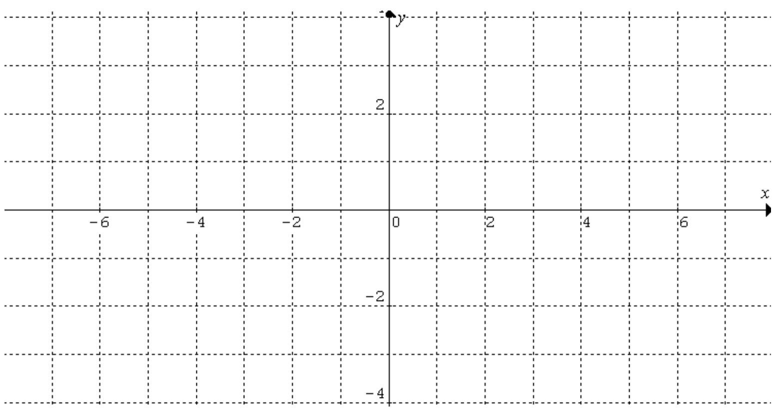
$$y = \frac{a}{x} \qquad \text{o} \qquad xy = a$$

Puesto que en este caso *el producto de dos variables es una constante fija*, estas funciones racionales representan una *relación inversamente proporcional* entre las variables x e y. De ahí que estas funciones se emplean para modelizar situaciones de distintas áreas.

En la función de la situación 2, ¿existe una relación de proporcionalidad inversa entre las variables?

GRÁFICA Y CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN CUYA ECUACIÓN: $y = a/x$

Analizando la expresión $y = \dfrac{a}{x}$ sacaremos algunas conclusiones a los efectos de poder representarla gráficamente.



Para facilitar dicho estudio consideremos $a = 1$, es decir analizaremos la función:

$$f : \Re - \{0\} \to \Re \,/\, y = f(x) = \frac{1}{x}$$

a) Realiza una tabla de valores y grafica dicha función.

b) Indica su conjunto imagen, intervalo de positividad, negatividad, y dónde crece o decrece.

De lo anterior, se observa que:

- Como x e y no pueden tomar el valor cero, la curva nunca corta a los ejes coordenados.
- La gráfica de f presenta una ***discontinuidad*** en x = 0, a diferencia de las funciones analizadas hasta el momento.
- A medida que la variable x aumenta en valor absoluto, la variable y tiende a cero.

Lo que nos dice que a medida que nos alejamos del origen la curva se acerca al **eje** x**.** Por tal motivo el eje x se denomina **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de la curva.

- Si los valores de la variable x disminuyen en valor absoluto, los valores de la variable y aumentan (en valor absoluto) indefinidamente.

De donde se infiere que si nos acercamos a cero en la dirección del eje x, la curva se acerca al eje y. Por tal motivo el eje y se denomina **ASÍNTOTA VERTICAL** de la curva.

ACTIVIDAD 1

a) Con ayuda de una tabla de valores o utilizando algún software, grafica en un mismo sistema cartesiano las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{3}{x} \qquad h(x) = \frac{-2}{x}$$

b) Indica dominio, codominio, conjunto imagen, intersecciones con los ejes (si las hay), ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales, dónde crece/decrece, intervalos de positividad y negatividad.

c) ¿Qué puedes señalar de las últimas 2 funciones comparadas con la primera?

EN GENERAL:

Dada la función de expresión $y = \frac{a}{x}$ con $a \in \Re - \{0\}$;

- Si $a > 0$ observamos que la función es ....
- Si $a < 0$ observamos que la función es ....
- A medida que el valor absoluto de a aumenta las ramas de su gráfica se .... del origen de coordenadas.

Situación 3:

La cantidad de pulgadas de lluvia durante una tormenta de t horas de duración, es modelada por la función: $C(t) = \frac{2t}{t+8}$

a) Completa las siguientes oraciones de modo que resulten verdaderas:

- La función $C(t)$ puede expresarse de la siguiente manera $C(t)$ = 2 + ...

- La intensidad media de la lluvia en pulgadas por hora es: $I(t) = \dfrac{C(t)}{t} = ...$

b) ¿Qué sucede con la intensidad media de las tormentas cuando éstas, son de mucha duración? c) ¿Y, qué sucede con la cantidad de lluvia? Justifica tus respuestas.

DESPLAZAMIENTOS DE LA CURVA DE ECUACIÓN: $y = a/x$

ACTIVIDAD 2

Dadas las funciones:

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{1}{x} + 2 \qquad y = \frac{1}{x} - 1 \qquad y = \frac{1}{x-1} \qquad y = \frac{1}{x+3}$$

a) Grafica cada una de ellas en un gráfico cartesiano.

b) Indica dominio, codominio, conjunto imagen, intersecciones con los ejes (si las hay), ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales, dónde crece/decrece, intervalos de positividad y negatividad.

c) ¿Qué puedes señalar de las últimas 4 funciones comparadas con la primera?

EN GENERAL:	
Dada la función de expresión $y = \dfrac{1}{x} + k$ con $k \in R$; - Si $k > 0$ observamos que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ se desplaza $\|k\|$ unidades hacia .... - Si $k < 0$ observamos que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ se desplaza $\|k\|$ unidades hacia	Dada la función de expresión $y = \dfrac{1}{x-h}$ con $h \in R$; - Si $h > 0$ observamos que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ se desplaza $\|h\|$ unidades hacia …………………………………………… - Si $h < 0$ observamos que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ se desplaza $\|h\|$ unidades hacia ....

☑ Ejemplo:

Grafica la función de ecuación: $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$ partiendo de $y = \dfrac{2}{x}$. Luego indica dominio, conjunto imagen, ecuaciones de las asíntotas y puntos de intersección con los ejes coordenados. Observando la expresión: $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$ deducimos que $h = -3$ y $k = -1$. Luego la gráfica de $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$ es la de $y = \dfrac{2}{x}$ desplazada 3 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia abajo:

Para la función de ecuación: $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$

Dominio = R – {-3}   Codominio = R

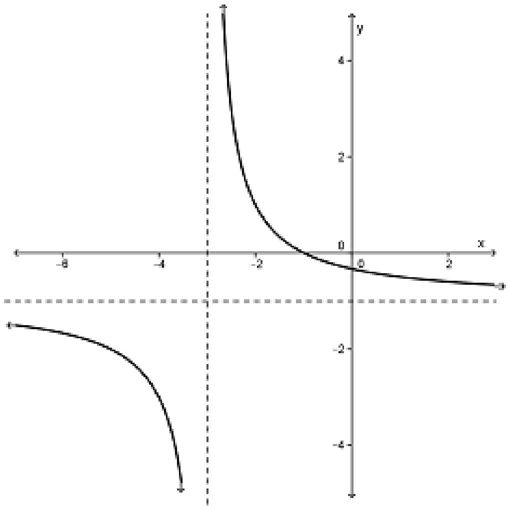
Conjunto imagen = R- {-1}

Asíntota Vertical: x = -3

Asíntota Horizontal: y = -1

Intersecciones con los ejes:

(0 ; -1/3)   y   (-1 ; 0)



EN GENERAL:

Dada la función de ecuación $y = \dfrac{a}{x-h} + k$ con $h,\ k,\ a \in \Re \wedge a \neq 0$,

La recta $y = k$ es la asíntota horizontal.

La recta $x = h$ es la asíntota vertical.

Situación 4:

La intensidad del sonido y que nos llega procedente de un parlante responde a la expresión:

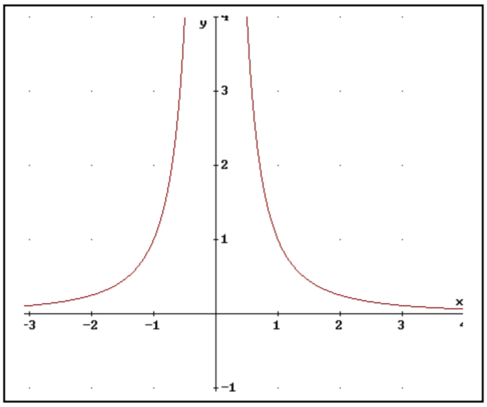
$$y = \frac{100}{d^2}$$

donde d es la distancia, medida en metros, que nos separa del parlante. ¿A qué distancia hay que colocar un grabador que sólo graba cuando el sonido llega con una intensidad de 64 decibeles?

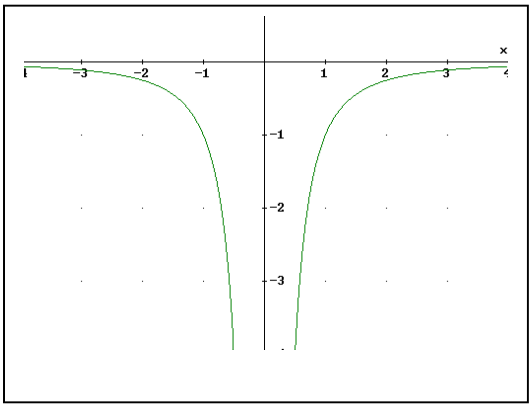
FUNCIONES CUYA ECUACIÓN $y = a/x^2$

Verifica que:

Si $a > 0$



Si $a < 0$



Caracteriza las funciones graficadas.

ACTIVIDADES

1) Grafica cada conjunto de curvas en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

a) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ b) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x+2}$

c) $y = \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x}$ d) $y = \frac{3}{x^2}$, $y = \frac{3}{x^2} + 3$

2) Para cada una de las siguientes funciones realiza su gráfica e indica dominio, conjunto imagen, asíntotas y puntos de Intersección con los ejes coordenados.

a) $y = -\frac{1}{x^2} + 2$ b) $y = \frac{1}{x+4} - 2$ c) $y = \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$ d) $y = -\frac{1}{2x} + 2$

3) Para cada una de las siguientes funciones realiza su gráfica e indica dominio, conjunto imagen, asíntotas y puntos de Intersección con los ejes coordenados.

a) $y = \frac{x+2}{x+3}$ b) $y = \frac{2x+4}{x-2}$

4) Para cada uno de los siguientes casos, determina el valor del parámetro "a" que cumpla las siguientes condiciones:

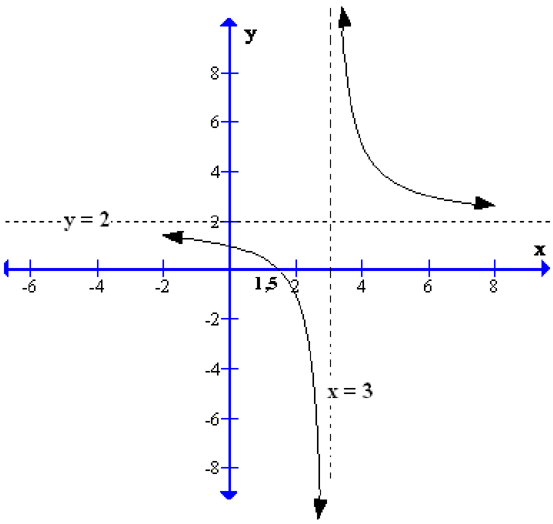
a) La curva de ecuación: $(x-1)(y+a) = 1$ tenga por asíntotas a las rectas $x = 1$, $y = -3$

b) La gráfica de $y = -\frac{1}{x} + a$ se obtenga al desplazar la curva de ecuación $y = -\frac{1}{x}$ 1 unidad hacia abajo

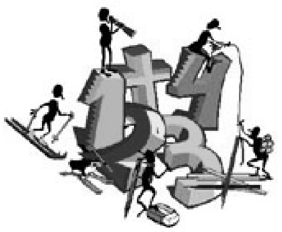
c) La curva de ecuación: $(x+4).y = a$ pase por el punto (-1, 3)

5) Halla la ecuación de la función de ley: $(x-h)(y-k) = 1$ sabiendo que su dominio es $R - \{6\}$ y que corta al eje de ordenadas en $y = 2$.

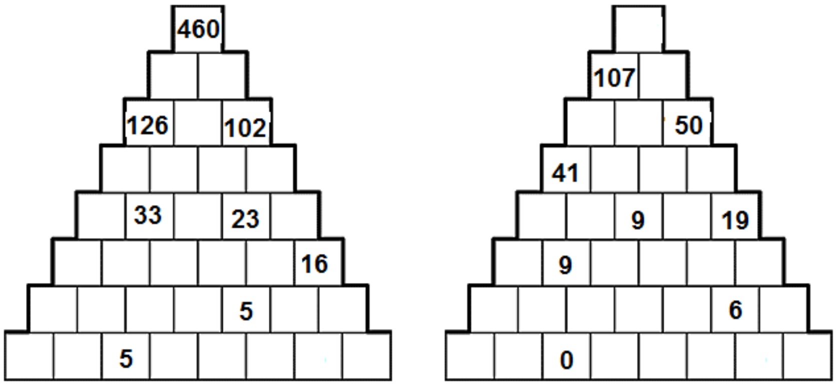
6) Obtiene la ecuación de la hipérbola cuya gráfica es:



7) Busca en distintos medio (libros, internet, revistas, textos de las asignaturas específicas) información referente a datos que se puedan modelar con funciones racionales como las abordadas.



Para entretenernos un rato!! Solo cuando hayas terminado las actividades asignadas!!



Situación 5:

El período de la oscilación de un péndulo simple restringido a oscilaciones de pequeña amplitud puede aproximarse mediante la siguiente fórmula:

$$T = 2 \cdot \sqrt{l}$$

siendo l la longitud del péndulo.

a) ¿Qué valores puede tomar l?

b) Representa en un sistema de coordenadas cartesianas T.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN IRRACIONAL

Se denomina **Función Irracional** a toda función cuya ecuación tiene su variable independiente afectada por una raíz.

Algunos ejemplos de funciones irracionales son:

a) $y = f(x) = \sqrt{x}$ b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x+8}$ c) $p = f(q) = \sqrt[3]{q^2}$

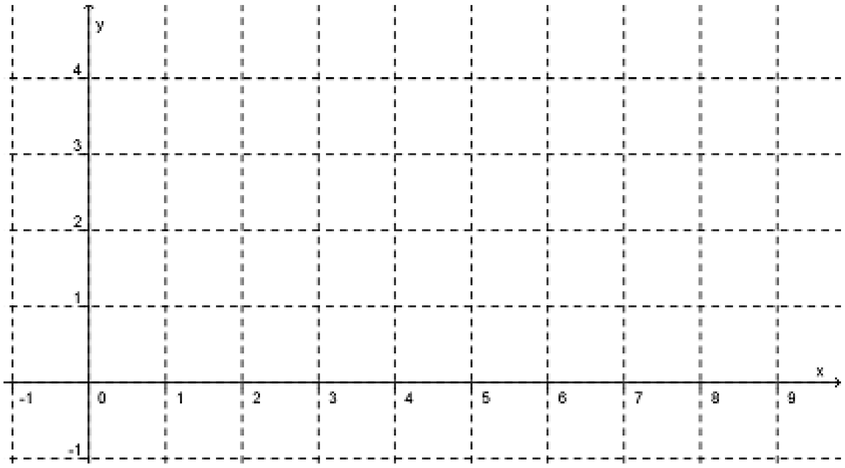
A continuación estudiaremos el comportamiento de una de las más sencillas y sus transformaciones.

Gráfica y características de la función cuya ecuación es: $y = \sqrt{x}$

a) ¿Cuál es el dominio y codominio de la función $y = \sqrt{x}$?

b) ¿Cuál es su conjunto imagen?

c) Realiza una tabla de valores y grafica dicha función.



d) ¿Cuál es la raíz de la función? ¿Y, cuál es su ordenada al origen?

e) Describe el comportamiento de la función. Ten en cuenta los intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad, negatividad, máximos o mínimos.

ACTIVIDAD 3

Con ayuda de una tabla de valores o utilizando algún software graficador de funciones, representa gráficamente cada conjunto de funciones en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

a) $y = \sqrt{x}$, $y = 2 \cdot \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}$, $y = \sqrt{9x}$

b) $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$

c) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$

EN GENERAL:	
Dada la función de expresión $y = a \cdot \sqrt{x}$ con $a \in \Re - \{0\}$;	Dada la función de expresión $y = a \cdot \sqrt{-x}$ con $a \in \Re - \{0\}$;
- Su dominio es ………………….	- Su dominio es ………………….
- Si $a > 0$ la gráfica de $y = a \cdot \sqrt{x}$ es……………	- Si $a > 0$ la gráfica de $y = a \cdot \sqrt{-x}$ es……………
- Si $a < 0$ la gráfica de $y = a \cdot \sqrt{x}$ es.................	- Si $a < 0$ la gráfica de $y = a \cdot \sqrt{-x}$ es.................
- Si $\|a\| > 1$, la gráfica se “acerca” al eje ………	- Si $\|a\| > 1$, la gráfica se “acerca” al eje ………
- Si $0 < \|a\| < 1$, la gráfica se “acerca" al eje……	- Si $0 < \|a\| < 1$, la gráfica se “acerca" al eje……

ACTIVIDAD 4

1) Con ayuda de una tabla de valores o utilizando algún software graficador de funciones, representa gráficamente cada conjunto de curvas en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

a) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x-3}$, $y = \sqrt{x+2}$, b) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x}+1$, $y = \sqrt{x}-\frac{1}{2}$

c) $y = \sqrt{-x}$, $y = \sqrt{-x}-2$ d) $y = \sqrt{x-4}+1$

2) Realiza un análisis completo de las funciones del ítem 1). Ten en cuenta dominio, conjunto imagen, intersecciones con los ejes coordenados, intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad, negatividad, etc.

EN GENERAL:	
La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}+k$ es una curva que se encuentra desplazada $\|k\|$ unidades: hacia ...., si $k > 0$ o hacia ...., si $k < 0$ respecto de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.	La gráfica de $f(x) = \sqrt{x-h}$ es una curva que se encuentra desplazada $\|h\|$ unidades: hacia ...., si $h > 0$ o hacia ...., si $h < 0$ respecto de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

ACTIVIDAD 5

Representa gráficamente y realiza un análisis completo de las siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{x+4}-2$ b) $y = 2\sqrt{-x+1}+3$ c) $y = -\sqrt{x-1}+2$

ACTIVIDAD 6

1) Representa gráficamente ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = x^2$ con Dom: $\Re_0^+$

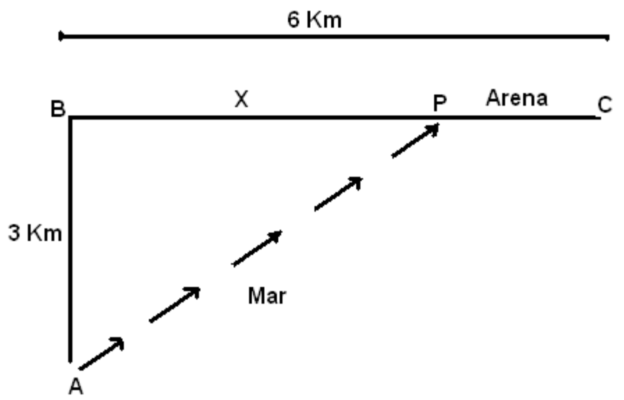
2) ¿Cómo son las gráficas de las funciones anteriores con respecto a la recta $y = x$?

ACTIVIDAD 7

Con ayuda de una tabla de valores o utilizando algún software graficador de funciones, representa gráficamente la siguiente función y realiza un análisis completo de la misma.

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Situación 6:



Para ir de A hasta C, se ha pasado por P. La velocidad que hemos llevado en el agua ha sido de 4 [km/h] y, por la arena de 5 [km/h].

Si hemos tardado 99 minutos (es decir, $\frac{99}{60}$ horas), ¿qué distancia x, hay de B a P?

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN IRRACIONAL

Se denomina **Ecuación Irracional** a toda ecuación cuya incógnita está afectada por una raíz.

ACTIVIDAD 8

1) Indica el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+1} = x$ b) $\sqrt[3]{2x^2 - x} = x$ c) $\sqrt{2x-3} + 1 = x$ d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1$

TRABAJOS PRÁCTICOS

Debe evitarse hablar de los jóvenes del éxito como si se tratase del principal objetivo de la vida. La razón más importante para trabajar en la escuela y en la vida es el placer de trabajar, el placer de su resultado y el conocimiento del valor del resultado para la comunidad.

Albert Einstein

Estudiantes:………………………………………………………………Fecha de entrega: …………………………

1) Una florería prepara arreglos florales y uno de los modelos que ofrece es una combinación de rosas blancas (✺) y rosas rojas (✱), dispuestas en una forma particular como se ve en la siguiente figura:

✱ ✱ ✱　　　　✱ ✱ ✱ ✱
✺ ✺　　　　　✺ ✺ ✺
✱ ✱ ✱　　　　✱ ✱ ✱ ✱

a) Respondan: ¿Cuántas rosas rojas se necesitan para rodear a cinco rosas blancas? ¿Y para 84 rosas blancas?
b) Expresen una ecuación con la que puedan calcular la cantidad necesaria de rosas rojas, conociendo la cantidad utilizada de rosas blancas. Justifiquen la respuesta.
c) Respondan: ¿Cuántas rosas blancas tiene un arreglo floral construido con el mismo esquema y con 184 rosas rojas?

2) De una función lineal f(x) se sabe que f(5) - f(2) = 4.
a) Expresen la pendiente de la recta que representa a f(x).
b) Respondan: ¿alcanza la información dada para obtener la fórmula de f(x)? Si respondes que sí, escribe la fórmula. Si respondes que no, explica por qué.
c) Obtengan la amplitud del ángulo de inclinación de la recta.

3) Realicen el procedimiento adecuado para:
a) encontrar la ecuaciones de las rectas R y S, una paralela y la otra perpendicular a la de ecuación 2x - 0,5y -1 = 0 que pasan por el punto (-1 ; 1).
b) graficar todas las rectas en un mismo sistema cartesiano.
c) obtener la distancia entre las dos rectas paralelas.

4) Justifiquen si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.
a) Toda función lineal es también directamente proporcional.
b) Considerando la función g(x) = 6x + 1 con dominio real, por cada dos unidades que se aumenta la abscisa de un punto de la recta, la ordenada aumenta doce.

5) Para conectar Santa Fe - Paraná una de las alternativas es un puente paralelo al túnel subfluvial a 1,5 [km] de distancia aproximadamente. Si se conocen las coordenadas del punto de entrada al Túnel E = (0,31; 2,30) y el punto de salida S = (0,61; 0), considerando como origen de coordenadas la Playa del Thompson.
a) obtengan las coordenadas de un punto sobre el nuevo puente.
b) determinen la ecuación de la recta que contendrá dicho punto.

6) Un investigador ha observado que la vida media de una bacteria varía con la temperatura media en la siguiente forma

Temperatura (°C)	6	9	12	15	16
Vida media (min)	104,2	140,4	181,7	220,2	257,6

a) Respondan: ¿los resultados indican que la vida media varía linealmente con respecto a la temperatura? ¿Por qué?
b) Estimen la vida media, mediante interpolación lineal, para la siguiente temperatura: 15,3 [ºC].

Actividad	1	2	3	4	5	6	Total
Puntaje Considerado	15%	15%	25%	10%	20%	15%	100 %
Puntaje Obtenido							

Estudiantes:……………………………………………… Fecha de entrega: ………………

El siguiente trabajo tiene por objetivo repasar algunos puntos notables y sus propiedades desde la geometría analítica, integrando esto con ecuaciones de rectas, cálculo de distancias y el uso del programa Geogebra.

1) Considerando tres puntos cuyas coordenadas son A = (-2 ; -1) B = (2 ; 5) y C = (8 ; 1):

a) Dibujen, en un sistema de coordenadas cartesianas, el triángulo ABC cuyos vértices son los puntos dados.

b) Clasifiquen el triángulo según la medida de sus lados.

c) Calculen las coordenadas de los puntos medios de cada lado. Denoten con D el punto medio de $\overline{AB}$, con E el punto medio de $\overline{BC}$ y con F el de $\overline{AC}$.

d) Tracen las medianas del triángulo y obtengan las coordenadas del baricentro. Denoten con G al baricentro.

e) Respondan: ¿a qué distancia del lado $\overline{AC}$ está el baricentro? Expliquen el procedimiento realizado.

f) Calculen el área del triángulo AGD. Expliquen el procedimiento realizado.

g) Verifiquen todo lo anterior con ayuda del Geogebra.

2) Considerando tres puntos cuyas coordenadas son A = (-1 ; 4) B = (7 ; 1) y C = (2 ; -1):

a) Dibujen, en un sistema de coordenadas cartesianas, el triángulo ABC cuyos vértices son los puntos dados.

b) Calculen las coordenadas de los puntos medios de cada lado. Denoten con D el punto medio de $\overline{AB}$, con E el punto medio de $\overline{BC}$ y con F el de $\overline{AC}$.

c) Hallen las ecuaciones de las mediatrices. Expliquen el procedimiento realizado.

d) Obtengan las coordenadas del centro de la circunferencia que contiene los vértices de ABC. Expliquen el procedimiento realizado. Dibujen la circunferencia circunscripta.

e) Respondan: ¿qué medida tiene el radio de dicha circunferencia?

f) Clasifiquen el triángulo según la amplitud de sus ángulos interiores.

g) Verifiquen todo lo anterior con ayuda del Geogebra.

Actividades	1	2	Total
Puntaje Considerado	50%	50%	100 %
Puntaje Obtenido			

Estudiantes:…………………………………………… Fecha de entrega: ………………

1) Resuelvan las siguientes situaciones problemáticas:

a) Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial en el cual introdujeron un conjunto de peces para analizar la evolución de la población. En un principio, la colonia crece reproduciéndose normalmente, pero al cabo de unos meses algunos peces mueren, a causa de hacinamiento.
Uno de los científicos plantea: He llamado "x" a los días que han transcurrido y "n" al número de peces. Mis registros indican que el conjunto de peces evoluciona según la ley:

$$n(x) = -\frac{(x-120)\cdot(x+20)}{10}.$$

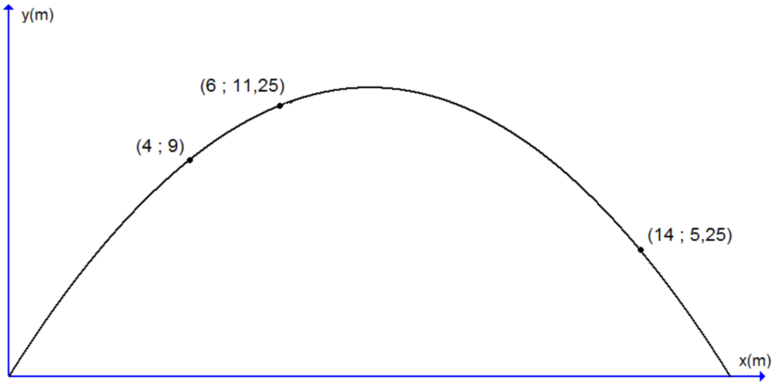
En base de los datos dados por este científico, contesten:

i. ¿Cuántos peces introdujeron en el lago?
ii. ¿Cuál fue la cantidad máxima que llegó a haber? ¿En qué momento?
iii. ¿Cuándo se extinguirá la población si no se hace algo rápidamente?

b) Un libro se abre al azar. El producto de los números de las páginas observadas es 3192. Respondan: ¿cuál es el número de las páginas en que se abrió el libro?

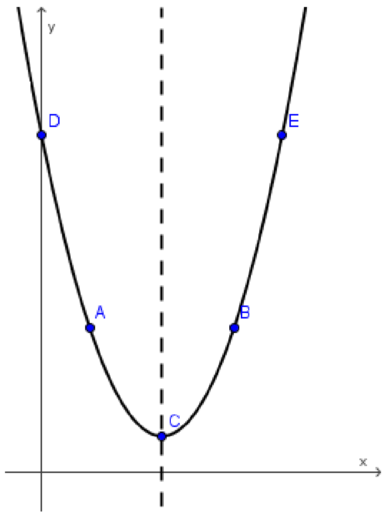
c) Un puente para ferrocarril tiene la forma de una parábola. Un topógrafo tomó los datos que se muestran en el esquema.

i. Obtengan analíticamente la ecuación de la función que modeliza el arco del puente.
ii. Respondan: ¿cuál es la máxima altura de dicho arco?



2) Completen cada oración de modo tal, que resulte verdadera. Justifiquen cada una de ellas con el procedimiento adecuado.

a) De la parábola $f(x) = a(x - h)^2 + k$ se sabe que su conjunto imagen es $(-\infty, 2]$, entonces el número a ∈ ……… y k = ……………
b) El conjunto solución de $-v^2 - 2v + 15 < 0$ es …………………………



3) a) Expresen las coordenadas de los puntos indicados en el gráfico de la derecha, sabiendo que $y = x^2 - 5x + 7$ y que A = (1 ; 3).
b) Indiquen el conjunto imagen de la función dada.

4) Despejen v de la siguiente igualdad: $\dfrac{m \cdot v}{\frac{1}{v} + 2} = h \cdot v$

Actividades	1	2	3	4	Total
Puntaje Considerado	45	15	25	15	100
Puntaje Obtenido					

Estudiantes:…………………………………………..…Fecha de entrega: ………………………….

1) Resuelvan la siguiente multiplicación (sin calculadora) pensando en el producto especial:

998 . 1002 =

2) Determinen todos los números naturales "n" tales que "n" y "n + 475" son ambos cuadrados perfectos.

3) Despejen m de la siguiente expresión: $\frac{a-m}{m-b} = \frac{N}{k}$

4) Dado el polinomio: $P(x) = -7\,(x+3)^2\,(2x+4)$, justifiquen cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

a) El grado del polinomio P(x) es 2

b) El polinomio se encuentra completamente factorizado

c) El resto de la división entre P(x) y (x+3) es cero

d) El coeficiente principal de P(x) es -7

5) Completen el siguiente cuadro, indicando por filas, lo que se solicita para cada polinomio:

	Polinomio	Polinomio completamente factorizado	Raíces y Multiplicidad
a	$10 - 2x^2$		
b	$4x^2 - 4x + 1$		
c	$(x^3 - x^2) : 5$		
d	$x^3 + x^2 + 27x + 27$		
e	$x^3 - 2x^2 - 3x$		

6) Teniendo en cuenta la ecuación del equilibrio térmico:

$$m_A \cdot ce_A \cdot (T_{eq} - T_{0A}) = -m_B \cdot ce_B \cdot (T_{eq} - T_{0B})$$

Determinen la temperatura de equilibrio T_{eq} en función de las demás variables.

Actividades	1	2	3	4	5	6	Total
Puntaje Considerado	10	10	10	10	50	10	100
Puntaje Obtenido							

Estudiantes:……………………………………………….Fecha de entrega: ………………………….

El objetivo de estas actividades es integrar los temas: factorización de polinomios, raíces de polinomios, funciones, gráficos de funciones y valor absoluto; utilizando el software que creas conveniente.

1) Dado las siguientes funciones polinómicas:

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$ $\qquad$ $R(x) = -5x^4 + 20x^2$

a) Hallen, analíticamente, las intersecciones con los ejes coordenados.

b) Grafiquen cada función polinómica y copien dicha curva en la hoja que van a entregar.

c) Indiquen si las raíces halladas tienen multiplicidad par o impar. Relacionen esto último con el comportamiento del gráfico en esos puntos.

d) Indiquen los intervalos de positividad y negatividad de cada función.

e) Grafiquen las siguientes funciones y compáralas con las tres funciones anteriores:

$f(x) = \left|2x^3 - 3x^2 + 1\right|$ $\qquad$ $g(x) = \left|x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x\right|$ $\qquad$ $h(x) = \left|-5x^4 + 20x^2\right|$

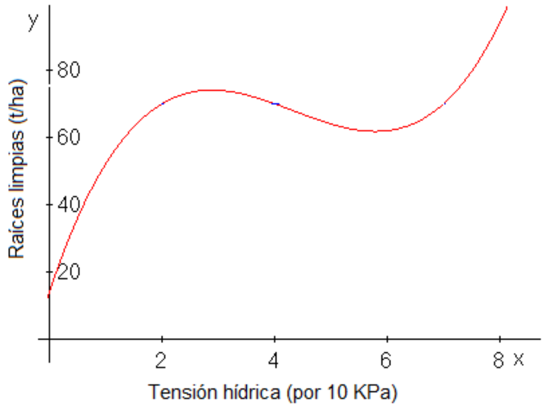
f) Respondan: ¿Cómo modifica la aplicación del valor absoluto a las funciones anteriores?

2) El gráfico muestra el rendimiento de raíces limpias de remolachas (en t/ha) en función de la tensión hídrica (por 10 [KPa]) del suelo.

Dicha relación está representada por la siguiente ecuación:

$$y = x^3 - 13x^2 + 50x + 14$$

Obtengan, analíticamente, para qué valores de la tensión el rendimiento es menor a [70 t/ha].



Actividades	1	2	Total
Puntaje Considerado	70	30	100
Puntaje Obtenido			

Estudiantes:……………………………………………………Fecha de entrega: …………………………

El objetivo de estas actividades es integrar los temas: factorización de polinomios, raíces de polinomios, funciones, gráficos de funciones; utilizando el software que crean conveniente.

1) Dado la siguiente función polinómica $f(x) = 2x^3 + x^2 – 4x – 3$

a) Hallen, analíticamente, las intersecciones con los ejes coordenados. Expliquen su proceder.

b) Grafiquen la función polinómica y copia dicha curva en la hoja a entregar. Verifiquen lo obtenido en el ítem anterior.

2)

a) En la función f(x) reemplacen la variable "x" por "x – 1" y obtengan la función $g(x) = f(x – 1)$

g(x) = …………………………..

b) Hallen, analíticamente, las intersecciones con los ejes coordenados. Expliquen su proceder.

c) Grafiquen la función polinómica y copien dicha curva en la hoja a entregar. Verifiquen lo obtenido en el ítem anterior.

3)

a) En la función f(x) reemplacen la variable "x" por "x + 2" y obtengan la función $h(x) = f(x + 2)$

h(x) = …………………………..

b) Hallen, analíticamente, las intersecciones con los ejes coordenados. Expliquen su proceder.

c) Grafiquen la función polinómica y copien dicha curva en la hoja a entregar. Verifiquen lo obtenido en el ítem anterior.

d) Comparando las gráficas de g(x) y h(x) con la de f(x), respondan: ¿qué conclusiones puedes obtener?

4)

a) Considerando las funciones $r(x) = f(x) + 2$ y $s(x) = f(x) – 3$

r(x) = ………………………….. s(x) = …………………………

b) Grafiquen cada función polinómica y copien dicha curva en la hoja a entregar.

c) Comparando las gráficas de r(x) y s(x) con la de f(x), respondan: ¿qué conclusiones puedes obtener?

Actividades	1	2	3	4	Total
Puntaje Considerado	25	25	25	25	100
Puntaje Obtenido					

Estudiantes:……………………………………Fecha de entrega: …………………………

1) Justifiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El dominio de $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ es $R-\{2\}$.

b) La expresión $\frac{1+x}{x^{-2}-5}$ es una expresión algebraica fraccionaria.

c) Si despejamos *h* de la expresión $\frac{1}{h}=\frac{2g}{V^2}-\frac{1}{R}$ obtenemos $\frac{V^2-R}{2g-1}$.

2) Simplifiquen hasta obtener la EARF irreducible:

$$\frac{b+ab-c-ca}{ab^2+b^2-2bc-2abc+c^2+ac^2}=$$

3) Resuelvan la siguiente operación y expresa el resultado como una EARF irreducible:

$$\frac{7a}{a^2-4}-\frac{1}{1+m}+\frac{a+m}{a+am-2-2m}=$$

4) Resuelvan la siguiente operación y expresa el resultado como una EARF irreducible:

$$\frac{x+1}{x+9}\cdot\frac{-x^2-9x}{x-6}=\frac{81-x^2}{2x+18}:\frac{3}{x+1}$$

5) Resuelvan el siguiente sistema:

$$\begin{cases}\frac{1}{w}+\frac{1}{f}=\frac{2}{5}\\ \frac{1}{w}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

6) Dos canillas pueden llenar un depósito en 18 horas. Calcula el tiempo que tardaría cada una de ellas, por separado, en llenar el mismo depósito, sabiendo que, usando sólo la primera, tardaría 27 horas más que si se utilizara sólo la segunda.

Actividades	1	2	3	4	5	6	Total
Puntaje Considerado	25	15	15	15	10	20	100
Puntaje Obtenido							

Estudiantes:……………………………………………………Fecha de entrega: …………………………

Los objetivos de estas actividades son:

- Integrar los conceptos de E.A.R. enteras y fraccionarias, simplificación y dominio de las mismas, en relación al análisis de funciones racionales.
- Utilizar los software adecuados.
- Introducir, de manera intuitiva, los conceptos de límite, discontinuidad y asíntota de una función.

1) Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = x + 2 \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

a) Teniendo en cuenta las operaciones que se realizan sobre la variable independiente, respondan: ¿cómo se clasifican?
b) Determinen el dominio de cada una.
c) Obtengan, si es posible, la imagen de x = 2 en ambas funciones.
d) Teniendo en cuenta *g(x)*, completen la siguiente tabla y escriban una conclusión:

x	1,9	1,999	2	2,001	2,1
g(x)					

e) Simplifiquen *g(x)*.
f) Grafiquen ambas funciones en distintos sistemas de coordenadas cartesianas.
g) Comparen los dominios con el comportamiento de las funciones y extraigan alguna conclusión.

2) Dadas las siguientes funciones:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x - 1} \qquad\qquad j(x) = x^2 - 3x - 4$$

a) Teniendo en cuenta las operaciones que se realizan sobre la variable independiente, respondan: ¿cómo se clasifican?
b) Determinen el dominio de cada una.
c) Obtengan, si es posible, la imagen de x = 1 en ambas funciones.
d) Respondan: ¿a qué valor tiende *h(x)* cuando los valores de x tienden a x = 1?
e) Simplifiquen *h(x)*.
f) Grafiquen ambas funciones en distintos sistemas de coordenadas cartesianas.
g) Comparen los dominios con el comportamiento de las funciones y extraigan alguna conclusión.

3) Dadas las siguientes funciones:

$$m(x) = \frac{1}{x + 2} \qquad\qquad p(x) = \frac{x}{x^2 + 2x}$$

a) Teniendo en cuenta las operaciones que se realizan sobre la variable independiente, respondan: ¿cómo se clasifican?
b) Determinen el dominio de cada una.
c) Obtengan, si es posible, la imagen de x = -2 y de x = 0 en ambas funciones.
d) Simplifiquen $p(x)$.
e) Grafiquen ambas funciones en distintos sistemas de coordenadas cartesianas.
f) Respondan: ¿qué sucede con la función cuando los valores del dominio se acercan a x = -2 por la derecha o por la izquierda? ¿Y cuándo x tiende a tomar valores muy grandes (tiende al ∞) o muy chicos (tiende al -∞), qué sucede con la función?
g) Teniendo en cuenta los dominios y el comportamiento de las funciones, escriban una conclusión.

4) Dada la siguiente función:

$$s(x) = \frac{2x+1}{x^2-9}$$

a) Determinen el dominio.
b) Obtengan, si es posible, la imagen de x = -3 y de x = 3.
c) Grafiquen la función en un sistema de coordenadas cartesianas.
d) Respondan: ¿qué sucede con la función cuando los valores del dominio se acercan a x = -3 y a x = 3 por la derecha o por la izquierda? ¿Y cuándo x tiende a tomar valores muy grandes (tiende al ∞) o muy chicos (tiende al -∞), qué sucede con la función?
e) Teniendo en cuenta el dominio y el comportamiento de la función, escriban una conclusión.

Actividades	1	2	3	4	Total
Puntaje Considerado	25	25	25	25	100
Puntaje Obtenido					

Alumnos:…………………………………………………………Fecha de entrega: …………………………

1) Realicen las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{3+i^3}{1+i^5}=$ b) $\left(i^8-2i^9\right)+\left(1-\sqrt{-4}\right)-\left(9+4i^{11}\right)=$ c) $\dfrac{\left(3+2i^5\right)-\left(3+i^{27}\right)}{-2-3i}=$

d) $\dfrac{\sqrt{18}_{135°}}{2\sqrt{2}_{45°}}-\left(-7-5i\right)=$ e) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5=$

2) Averigüen, analíticamente, el número complejo Z para el cual se cumplen las siguientes igualdades:

I) $\dfrac{3+i}{z-2}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$ II) $\dfrac{z+i}{z-2}=2i$

3) a) Resuelvan la siguiente ecuación: $(2x - 3)^2 = 1 - 2x(5 - x)$

b) Encuentren los números reales p y q que verifiquen la siguiente ecuación:

$$(6 + pi).(1 - 4i) = 11q - 20i$$

4) Los números complejos $Z_1 = -6 + 6i$ y $Z_2 = 6\sqrt{2}_{315°}$:

a) Son iguales b) Son conjugados c) Son opuestos d) Tienen distinto módulo.

Justifica la o las respuestas elegidas.

Actividades	1	2	3	4	Total
Puntaje Considerado	50	20	20	10	100
Puntaje Obtenido					

Bibliografía

- Itzcovich y Otros - M1 Matemática - Ed. Tinta Fresca - Bs. As. 2006

- Abdala y Otros - Carpeta de Matemática 1 Polimodal - Ed. Aique - Bs. As. 2003

- Altman y Otros -Matemática/ Funciones 1 - Ed. Longseller - Bs. As. 2002

- Kaczor y Otros - Matemática 1 - Ed. Santillana – Bs. As. 2001

- Salas y Hille - Calculus - Editorial Reverté S.A. – Bs. As. 1986

- Tapia y Otros – Matemática 4 – Ed. Estrada – Bs. As. 1983

- http://problemate.blogspot.com/2010/12/piramide-numerica.html

- Revista Quijote N° 556

- http://www.juntadeandalucia.es

- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/02/actipre.html