ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Ej. 1

En la red eléctrica los elementos consumidores de energía, que son los encargados de realizar algún trabajo útil, se conectan todos en paralelo. O sea, tenemos los dos polos de una fuente de energía eléctrica y entre ellos se conectan todas las cargas, como se muestra en la figura (1) correspondiente a un circuito **paralelo** (también llamado derivación) ideal.

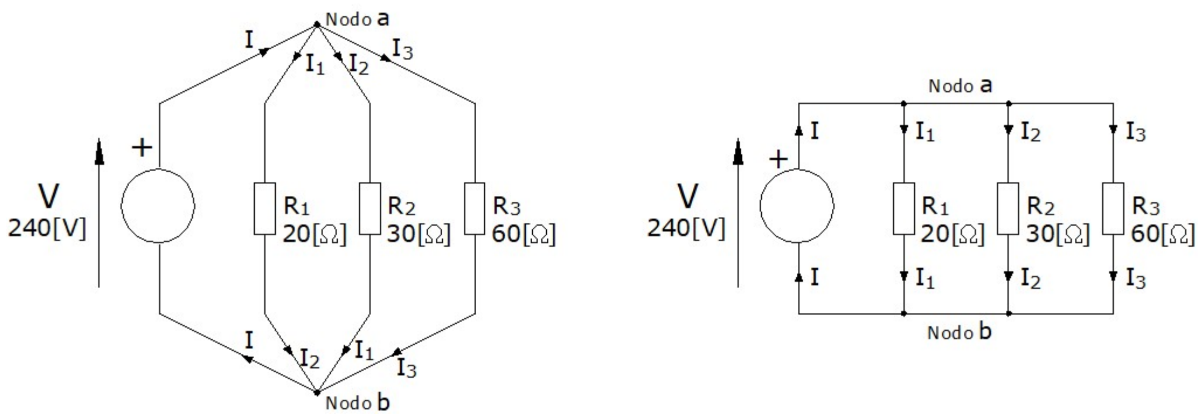


Fig. 1 (A) (B)

Estos receptores de carga consumen cada uno una corriente eléctrica de:

$\mathbf{I_1 = V / R_1}$ = 240 V / 20 Ω = 12 A; $\mathbf{I_2 = V / R_2}$ = 240 V / 30 Ω = 8 A; $\mathbf{I_3 = V / R_3}$ = 240 V / 60 Ω = 4 A

O sea, que la fuente (generador) debió proporcionar una corriente, según la 1ª ley de Kirchhoff, de:

$\mathbf{I = I_1 + I_2 + I_3}$ = 12 + 8 + 4 = 24 A

Por lo tanto el generador estuvo alimentando un circuito de resistencia equivalente:

$\mathbf{Re = V / I}$ = 240 V / 24 A = 10 Ω

Conclusión a la que abordamos si sumamos las resistencias en paralelo, según propone Kirchhoff:

$$\mathbf{1 / Re = (1/ R_1 + 1/ R_2 + 1/ R_3)} \text{ ó } \mathbf{Re = 1 / (1/ R_1 + 1/ R_2 + 1/ R_3)} \text{ ó } \mathbf{Re = (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-1}}$$

1 / Re = 1/ 20 + 1/ 30 + 1/ 60 = (3 + 2 + 1) / 60 = 6 /60 ⇒ Re = 60/ 6 ⇒ **Re** = 10 Ω

Si pensamos en la potencia consumida por los resistores (elementos pasivos del circuito), tenemos:

$\mathbf{P_1 = V \cdot I_1}$ = 240 V . 12 A = 2880 W

$\mathbf{P_2 = V \cdot I_2}$ = 240 V . 8 A = 1920 W

$\mathbf{P_3 = V \cdot I_3}$ = 240 V . 4 A = 960 W

Lo que totaliza una potencia de: $\mathbf{P_{tot} = P_1 + P_2 + P_3}$ = 5760 W. Esta potencia debe coincidir necesariamente con la suministrada por la fuente: $\mathbf{P_\varepsilon = V \cdot I}$ = 240 V . 24 A = 5760 W

Podemos resumir el circuito de tres resistencias en paralelo de la (Fig. 1), por el que se muestra en la (Fig.2), donde a la resistencia equivalente la llamamos R_0.

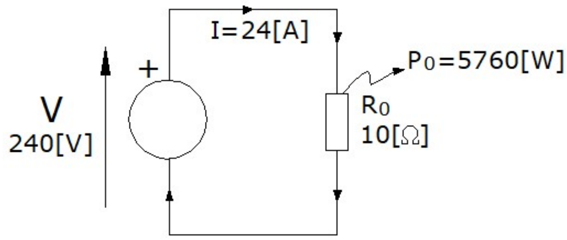
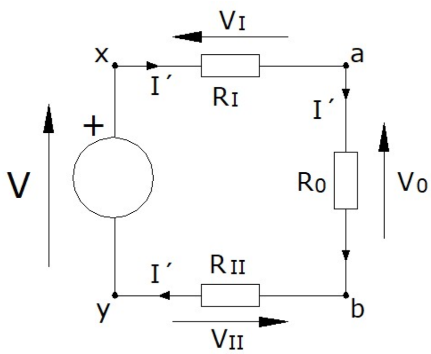


Fig.2: Circuito equivalente

Ej. 2

Ahora bien, los hilos de conexión que consideramos ideales, en realidad son conductores de cobre por ej., que poseen una resistencia eléctrica. Con lo cual el circuito anterior quedaría así:



En este circuito $R_1 = R_2 = 0{,}2\ \Omega$, representan la resistencia de los cables de conexión desde el generador hasta los nudos a y b.

Fig. 3

Ahora tenemos un circuito en serie cuya resistencia total es:

$\mathbf{R_T} = \mathbf{R_I} + \mathbf{R_{II}} + \mathbf{R_0} = 0{,}2 + 0{,}2 + 10 = 10{,}4\ \Omega$.

La corriente que sale del generador, ahora se modifica: $\mathbf{I = V / R_T} = 240\text{ V} / 10{,}4\ \Omega = 23{,}077\text{ A}$

Con esta corriente la tensión cae en $\mathbf{R_I}$, $\mathbf{R_{II}}$, $\mathbf{R_0}$ de la siguiente manera:

$\mathbf{V_I = I' . R_I} = 23{,}077\text{ A} . 0{,}2\ \Omega = 4{,}615\text{ V}$

$\mathbf{V_{II} = I' . R_{II}} = 23{,}077\text{ A} . 0{,}2\ \Omega = 4{,}615\text{ V}$

$\mathbf{V_0 = I' . R_0} = 23{,}077\text{ A} . 10\ \Omega = 230{,}77\text{ V}$

$\mathbf{V_I + V_{II} = 9{,}23\ V}$ representa la caída de tensión en los conductores de alimentación y $\mathbf{V_0 = 230{,}77\ V}$**,** es la tensión residual en la carga, donde se observa que es menor a **240 V,** con lo cual el conjunto de la carga consumirá una potencia menor que antes y entregará en consecuencia menos trabajo útil.

$\mathbf{P_0' = V_0 . I'} = 230{,}77\text{ V} . 23{,}077\text{ A} = 53325{,}44\text{ W}$

La diferencia entre 5760 W y 5325,44 W representa la potencia perdida en forma de calor en los conductores de alimentación y la menor capacidad del circuito de transportar corriente. Esta pérdida se puede calcular también de la siguiente forma:

$\mathbf{P_I + P_{II} = I'^2 . (R_I + R_{II})} = (23{,}077\text{ A})^2 . 0{,}4\ \Omega = 213{,}02\text{ W}$

Las corrientes en cada resistor también se verán depreciadas por la merma de tensión que produjeron los conductores de alimentación R_I y R_{II}:

$I_1' = V_0 / R_1$ = 230,77 V / 20 Ω = 11,5385 A

$I_2' = V_0 / R_2$ = 230,77 V / 30 Ω = 7,6923 A

$I_3' = V_0 / R_3$ = 230,77 V / 60 Ω = 3,8462 A

El análisis anterior completo, representaría a un circuito mixto o combinado (ver Fig. 4), de resistencias en serie y en paralelo.

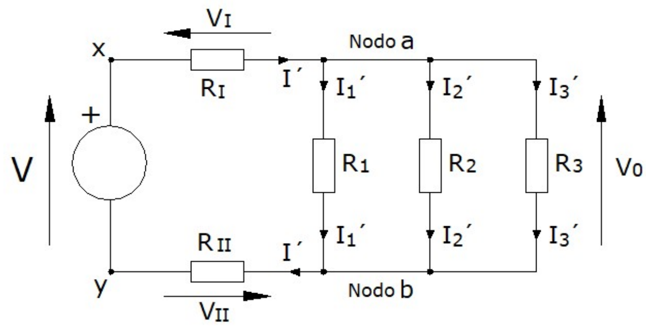


Fig. 4

Ej. 3
Teniendo en cuenta todos los análisis anteriores, se propone ahora resolver el siguiente circuito:

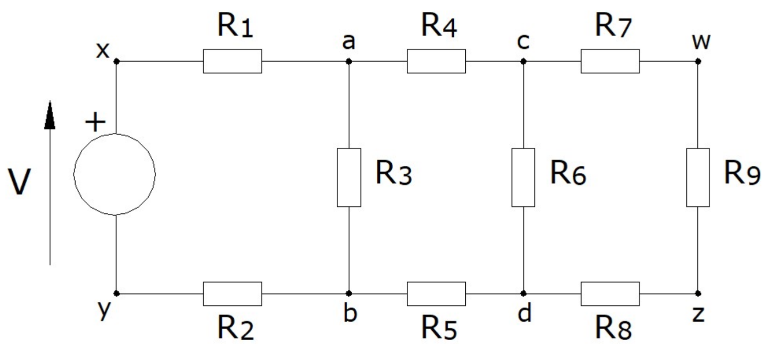


Fig. 5

Primero algunas definiciones sobre la topología del circuito. Llamaremos:

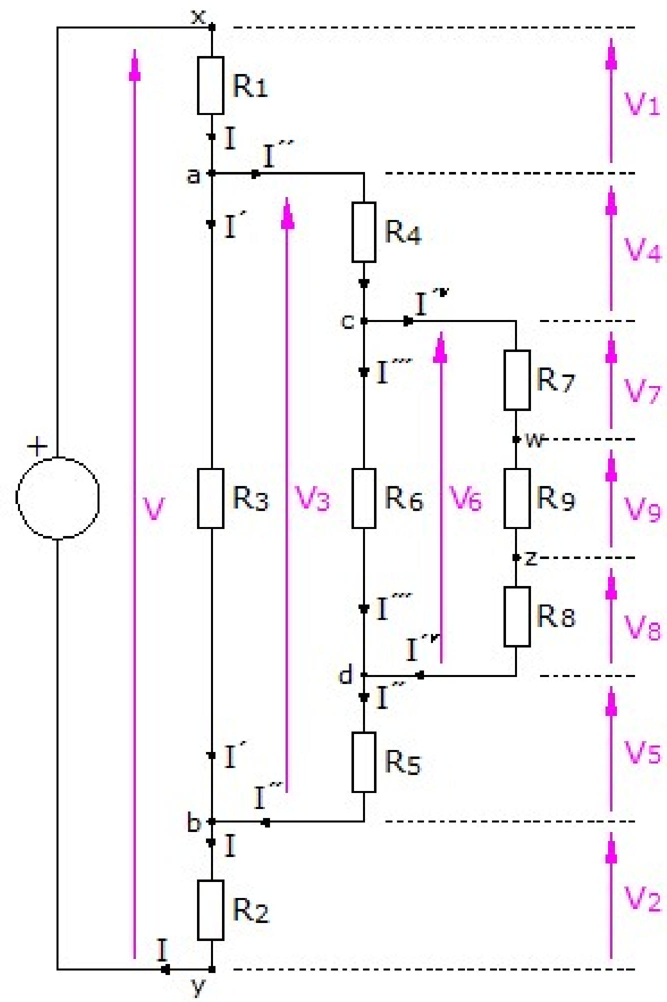
NODO SIMPLE: Unión de dos elementos del circuito (activos o pasivos). En este caso son nudos o nodos simples **x** ; **y** ; **w** ; **z**

NODO PRINCIPAL: Unión de más de dos elementos del circuito (activos o pasivos). En este caso son nodos principales **a** ; **b** ; **c** ; **d**

RAMA: Circuito en serie ubicado entre dos nodos principales por el que circula la misma corriente. En este caso constituyen ramas, los circuitos por **ab** ; **axyb** ; **ac** ; **bd**; **cd** ; **cwzd**

LAZOS o MALLAS: Caminos cerrados que se pueden formar en el circuito. En este caso **xabyx** ; **acdba** ; **cwzdc** ; **xacdbyx** ; **acwzdba** ; **xacwzdbyx**

Para resolver este circuito por equivalencia serie-paralelo, conviene dibujar todas las resistencias en el sentido vertical, ya que así se hace más visible la distribución de caídas de tensiones, pensándolas en forma homóloga a saltos o diferencias de alturas.



$$V_6 = V_7 + V_8 + V_9$$

$$V_3 = V_4 + V_5 + V_6$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$I = I' + I''$$

$$I'' = I''' + I^{IV}$$

Calcular en el circuito de la Fig. 5 o 6, la resistencia total equivalente, las corrientes y tensiones en cada resistencia del circuito. Considerando que las nueve resistencias del circuito son iguales a **15 Ω** y la tensión de la fuente **164 V**.

Respuesta parcial: Re = 41 e I = 4 A

Fig. 6

Ej. 4

Resolvemos el circuito de la Fig.7 utilizando las leyes de OHM y de KIRCHHOFF, más los criterios de equivalencias serie-paralelo:

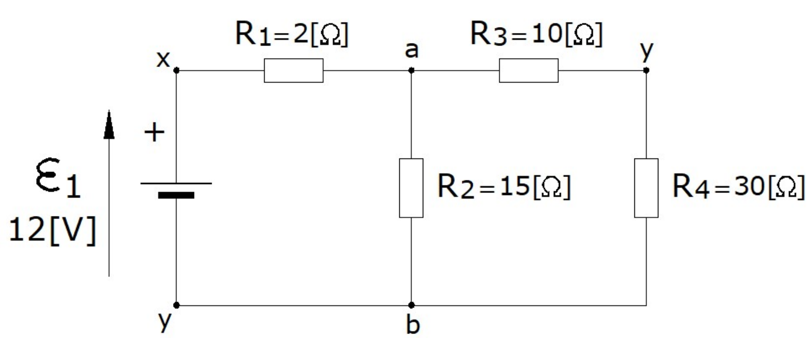


Fig. 7

1°) Dibujamos el circuito con las resistencias verticales:

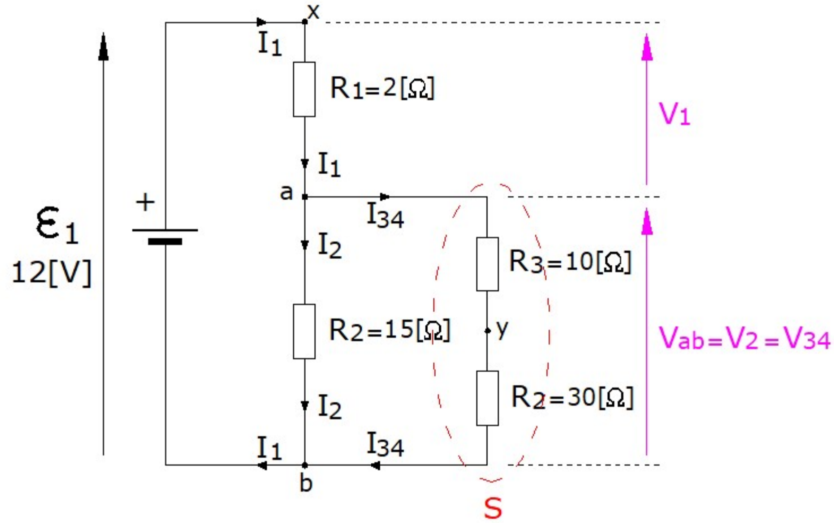


Fig. 8

2°) Calculamos **R_3** y **R_4** en serie ⇒

R_{34} = **R_3** + **R_4** R_{34} = 10 + 20 = 30 Ω

y la reemplazamos en el circuito de la Fig. 8

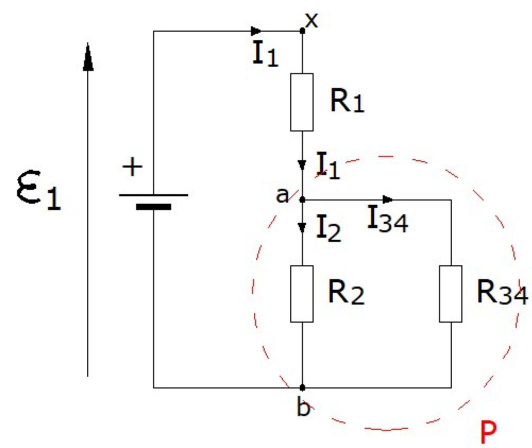


Fig. 9

3°) Calculamos **R_2** y **R_{34}** en paralelo ⇒ **R_{ab} = 1 / (1/R_2 + 1/R_{34})**

$$\text{Rab} = \frac{1}{\frac{1}{R2}+\frac{1}{R34}} = \frac{1}{\frac{1}{15}+\frac{1}{30}} = \frac{1}{\frac{2+1}{30}} = \frac{30}{3} = 10\Omega$$

Y lo reemplazamos en el circuito de la Fig. 9

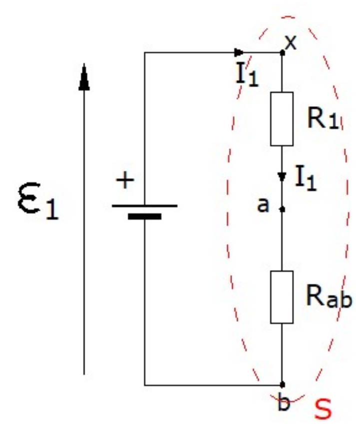


Fig. 10

4°) Calculamos **R_1** y **R_{ab}** en serie y obtenemos la resistencia total o equivalente:

R_e = **R_1** + **R_{ab}** = 2 + 10 = 12 Ω

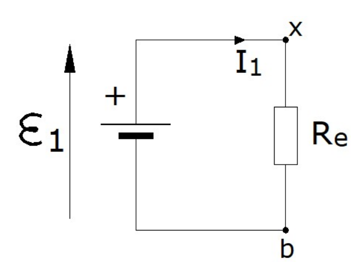


Fig. 11

5°) Calculamos ahora la corriente que entrega el generador al circuito:

I_1 = V / R_e = 12 V / 12 Ω = 1 A

6°) Calculamos en el circuito de la Fig.10, las dos caídas de tensión que conforman la total de la fuente:

$\mathbf{V_1 = I_1 . R_1} = 1\ A . 2\ \Omega = 2\ V$

$\mathbf{V_{ab} = I_1 . R_{ab}} = 1\ A . 10\ \Omega = 10\ V$

Debe verificarse la 2ª Ley de Kirchhoff: $\boldsymbol{\varepsilon_1 - V_1 - V_{ab} = 0}$

7°) Con la tensión **V_{ab}** podemos calcular las corrientes de las dos ramas que derivan del nodo **a** y se juntan en el nodo **b**:

$\mathbf{I_2 = V_{ab} / R_2} = 10\ V / 15\ \Omega = 2 / 3 = 0{,}67\ A$; $\mathbf{I_3 = V_{ab} / R_{34}} = 10\ V / 30\ \Omega = 1 / 3 = 0{,}33\ A$

Considerar que: $\mathbf{I_3 = I_4}$, puesto que están en la misma rama.

Debe verificarse en el nodo a la 1ª Ley de Kirchhoff: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

8°) Con la corriente calculamos las dos caídas de tensión en la rama donde se encuentran las resistencias 3 y 4:

$\mathbf{V_3 = I_3 . R_3} = 0{,}33\ A . 10\ \Omega = 3{,}33\ V$; $\mathbf{V_4 = I_4 . R_4} = 0{,}33\ A . 20\ \Omega = 6{,}66\ V$

El circuito en cuestión una vez resuelto quedará:

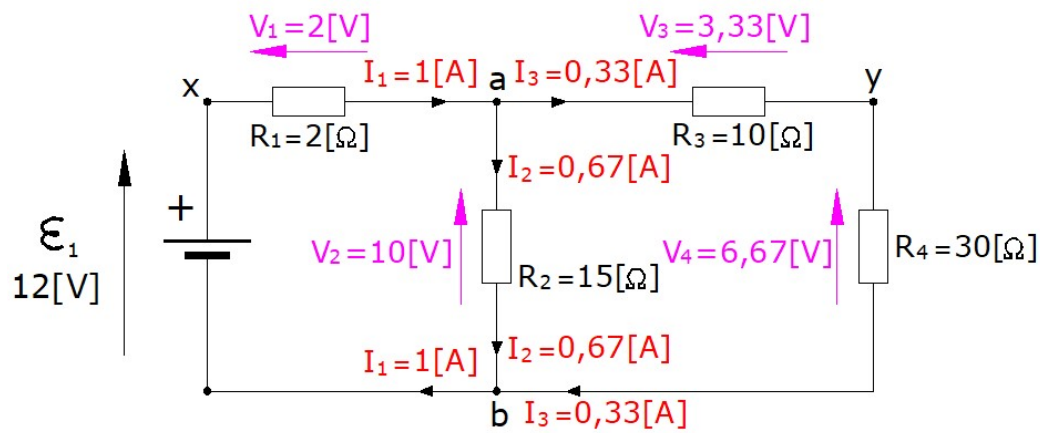


Fig. 12

9°) Balance de potencias:

Potencia suministrada por la fuente: $\mathbf{P_{\varepsilon 1} = \varepsilon_1 . I_1} = 12\ V . 1\ A = 12\ W$

Potencias consumidas por las resistencias de carga:

$\mathbf{P_1 = V_1 . I_1} = 2\ V . 1\ A = 2\ W$

$\mathbf{P_2 = V_2 . I_2} = 10\ V . 0{,}667\ A = 6{,}67\ W$

$\mathbf{P_3 = V_3 . I_3} = 3{,}33\ V . 0{,}33\ A = 1{,}11\ W$

$\mathbf{P_4 = V_3 . I_3} = 6{,}67\ V . 0{,}33\ A = 2{,}22\ W$

También podríamos haber calculado potencias consumidas como sigue:

$\mathbf{P_1 = R_1 . I_1^2} = 2\ \Omega . (1\ A)^2 = 2\ W$

$\mathbf{P_2 = R_2 . I_2^2} = 15\ \Omega . (0{,}667\ A)^2 = 6{,}67\ W$

$\mathbf{P_3 = R_3 . I_3^2} = 10\ \Omega . (0{,}33\ A)^2 = 1{,}11\ W$

$\mathbf{P_4 = R_3 . I_3^2} = 20\ \Omega . (0{,}33\ A)^2 = 2{,}22\ W$

Verificamos que la potencia suministrada es igual a la potencia consumida:

$\mathbf{P_{\varepsilon 1} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4} \Rightarrow 10\ W = (2 + 6{,}67 + 1{,}11 + 2{,}22)\ W$

Ej. 5

Ahora vamos a agregar otra fuente al circuito del Ej. 3

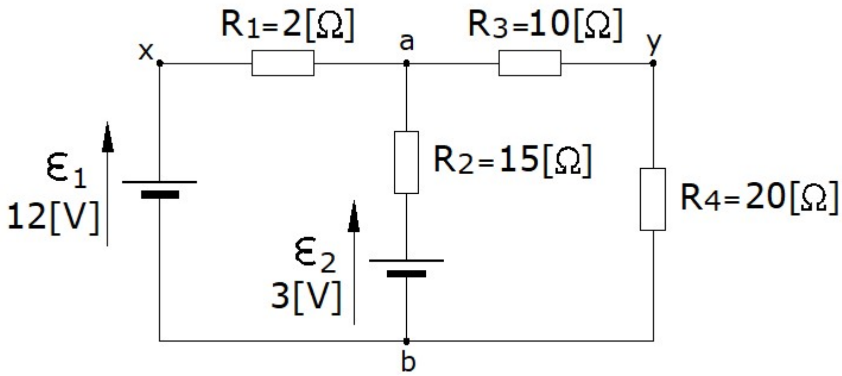


Fig. 13

En este circuito la única reducción que podemos realizar es la de la rama **ayb**, donde encontramos las resistencias $\mathbf{R_3}$ y $\mathbf{R_4}$ en serie, las cuales podemos reemplazar por:

$\mathbf{R_0 = R_3 + R_4 = 30\ \Omega}$

Luego de la reducción anterior no podemos identificar dos resistencias en serie o dos en paralelo. A este tipo de circuitos lo resolvemos aplicando las leyes de Kirchhoff de la siguiente manera, en la que es indistinto realizar la única reducción posible mencionada anteriormente:

Propondremos que, al nudo **a** ingresa la corriente I_1 y egresan las corrientes I_2 e I_3 . Y en el nudo **b** ocurre todo lo contrario.

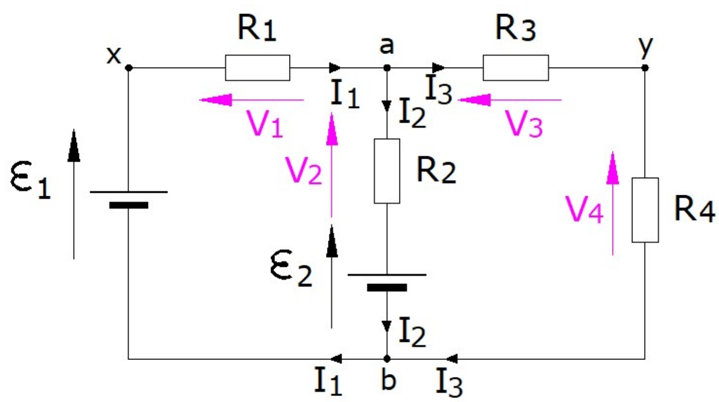


Fig. 14

I_1 produce en $\mathbf{R_1}$ la caída de tensión $\mathbf{V_1}$

I_2 produce en $\mathbf{R_2}$ la caída de tensión $\mathbf{V_2}$

I_3 produce en $\mathbf{R_3}$ la caída de tensión $\mathbf{V_3}$ y en $\mathbf{R_4}$ la caída de tensión $\mathbf{V_4}$

Con estas tensiones y corrientes escribimos las leyes de Kirchhoff para un nodo y tres lazos.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Lazo } \mathbf{xabx} \longrightarrow \varepsilon_1 - V_1 - V_2 - \varepsilon_2 = 0 \\ \text{Lazo } \mathbf{bayb} \longrightarrow \varepsilon_2 + V_2 - V_3 - V_4 = 0 \\ \text{Lazo } \mathbf{xaybx} \longrightarrow \varepsilon_1 - V_1 - V_3 - V_4 = 0 \\ \text{Nodo } \mathbf{a} \longrightarrow I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} V_1 + V_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & (1) \\ -V_2 + V_3 + V_4 = \varepsilon_2 & (2) \\ V_1 + V_3 + V_4 = \varepsilon_1 & (3) \\ I_1 = I_2 + I_3 & (4) \end{array}\right.$$

Aplicamos a estas ecuaciones la ley de Ohm para calcular las caídas de tensión.

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & (1) \\ -\ R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_3 = \varepsilon_2 & (2) \\ R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_3 = \varepsilon_1 & (3) \\ I_1 = I_2 + I_3 & (4) \end{cases}$$

Reemplazamos la ecuación (4) en la (3): $R_1 \cdot (I_2 + I_3) + R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_3 = \varepsilon_1$

Aplicamos distributiva en el primer término: $R_1 \cdot I_2 + R_1 \cdot I_3 + R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_3 = \varepsilon_1$

Agrupamos incógnitas en el primer miembro: $R_1 \cdot I_2 + (R_1 + R_3 + R_4) \cdot I_3 = \varepsilon_1 \quad (5)$

Agrupamos incógnitas en la ecuación (2): $-\ R_2 \cdot I_2 + (R_3 + R_4) \cdot I_3 = \varepsilon_2 \quad (6)$

Nos queda ahora un sistema lineal de 2 ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_2 + (R_1 + R_3 + R_4) \cdot I_3 = \varepsilon_1 & (5) \\ -\ R_2 \cdot I_2 + (R_3 + R_4) \cdot I_3 = \varepsilon_2 & (6) \end{cases}$$

Resolvemos reemplazando los datos del circuito:

$$\begin{cases} 2 \cdot I_2 + 32 \cdot I_3 = 12 & (5) \\ -\ 15 \cdot I_2 + 30 \cdot I_3 = 3 & (6) \end{cases}$$

En la ec. (5) despejamos I_2: $I_2 = (12 - 32 \cdot I_3) / 2 \Rightarrow I_2 = 6 - 16 \cdot I_3$ (8) y reemplazamos esta en (6), obteniendo $-\ 15 \cdot (6 - 16 \cdot I_3) + 30 \cdot I_3 = 3$, luego ÷ miembro a miembro por 3, queda:

$-\ 5 \cdot (6 - 16 \cdot I_3) + 10 \cdot I_3 = 1$, distribuyendo $- 30 + 80 \cdot I_3 + 10 \cdot I_3 = 1 \Rightarrow 80 \cdot I_3 + 10 \cdot I_3 = 1 + 30$

$\Rightarrow 90 \cdot I_3 = 31 \Rightarrow$ $I_3 = 31 / 90 = 0{,}344\ A$

Reemplazamos I_3 en la ec. (8): $I_2 = 6 - 16 \cdot (31 / 90) \Rightarrow$ $I_2 = 22 / 45 = 0{,}488\ A$

Según la ec. (4) : $I_1 = I_2 + I_3 = 0{,}488 + 0{,}344 \Rightarrow$ $I_1 = 5 / 6 = 0{,}833\ A$

Hemos calculado las tres incógnitas del sistema de ecuaciones planteado, con estas corrientes en cada rama, podemos ahora calcular las tensiones en los resistores:

$V_1 = I_1 \cdot R_1 = 0{,}833\ A \cdot 2\ \Omega = 1{,}66\ V$

$V_2 = I_2 \cdot R_2 = 0{,}488\ A \cdot 15\ \Omega = 7{,}33\ V$

$V_3 = I_3 \cdot R_3 = 0{,}344\ A \cdot 10\ \Omega = 3{,}44\ V$

$V_4 = I_3 \cdot R_4 = 0{,}344\ A \cdot 20\ \Omega = 6{,}88\ V$

Finalmente verificamos que las ecuaciones de partida se cumplan:

en (1): $12 - 1{,}66 - 7{,}33 - 3 = 0$

en (2): $3 + 7{,}33 - 3{,}44 - 6{,}88 = 0$

en (3): $12 - 1{,}66 - 3{,}44 - 6{,}88 = 0$

Concluimos que, en este circuito, con solo establecer un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, se resuelve.

Respecto de las potencias:

$\mathbf{P_1 = R_1 \,.\, I_1^2} = 2\ \Omega \,.\, (0{,}833\ A)^2 = 1{,}3888\ W$

$\mathbf{P_2 = R_2 \,.\, I_2^2} = 15\ \Omega \,.\, (0{,}488\ A)^2 = 3{,}5852\ W$

$\mathbf{P_3 = R_3 \,.\, I_3^2} = 10\ \Omega \,.\, (0{,}344\ A)^2 = 1{,}1864\ W$

$\mathbf{P_4 = R_3 \,.\, I_3^2} = 20\ \Omega \,.\, (0{,}344\ A)^2 = 2{,}3728\ W$

$\mathbf{P_{\varepsilon 1} = \varepsilon_1 \,.\, I_1} = 12\ V \,.\, 0{,}833\ A = 10\ W$

$\mathbf{P_{\varepsilon 2} = \varepsilon_2 \,.\, I_2} = 3\ V \,.\, 0{,}488\ A = 1{,}466\ W$

En el balance donde las potencias suministradas por las fuentes, debe ser igual a las potencias consumidas por las resistencias, debemos considerar en este caso a la fuente $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ como consumo, ya que la corriente I_2 circula por ella en sentido contrario a la FEM:

$P_{\varepsilon 1} = \mathbf{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_{\varepsilon 2}} \quad \Rightarrow \quad 10\ W = (\ 1{,}3888 + 3{,}5852 + 1{,}1864 + 2{,}3728 + 1{,}466\ )\ W$

Ej. 6

Método de las corrientes de Malla o corrientes cíclicas de Maxwell

Analizaremos el circuito del ejemplo 4 (Fig. 14). El mismo posee 2 nodos principales y 3 ramas.
El número mínimo de ecuaciones necesario para resolver el circuito, se define según la siguiente regla:

N° mín de ecuaciones = N° de ramas – N° de nodos principales + 1 (9)

En este ej. **N° mín ecs = 3 – 2 + 1 = 2**

Ahora bien, podemos establecer 3 lazos o mallas, pero basta elegir solo dos para plantear el sistema de ecuaciones que permite resolver el circuito.

La elección de los lazos con sus corrientes de malla y sentido de circulación es arbitrario.
Elijo por ej. Las indicadas en el circuito de la Fig. 15

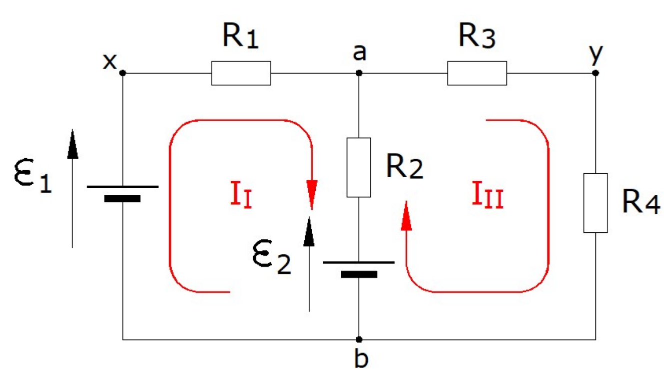
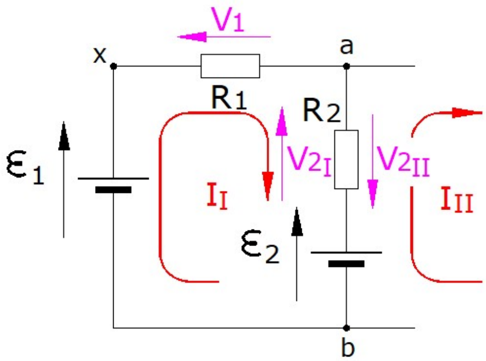


Fig. 15

Estas corrientes de malla producen las caídas de tensión indicadas. Y planteando la 2ª Ley de K.



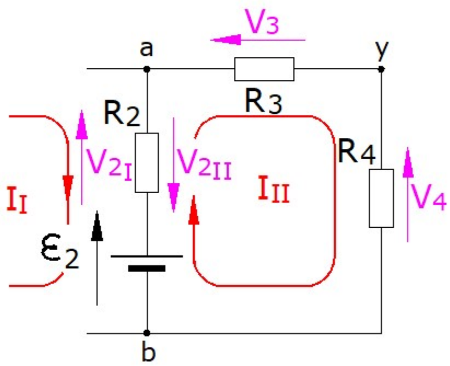
$$\varepsilon_1 - V_1 - V_{2I} + V_{2II} - \varepsilon_2 = 0$$

$$V_1 + V_{2I} - V_{2II} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$R_1 \,.\, I_I + R_2 \,.\, I_I - R_2 \,.\, I_{II} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$(R_1 + R_2) \,.\, I_I - R_2 \,.\, I_{II} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \qquad (10)$$

Fig. 16



$$\varepsilon_2 + V_{2I} - V_{2II} - V_3 - V_4 = 0$$

$$- V_{2I} + V_{2II} + V_3 + V_4 = \varepsilon_2$$

$$- R_2 \,.\, I_I + R_2 \,.\, I_{II} + R_3 \,.\, I_{II} + R_4 \,.\, I_{II} = \varepsilon_2$$

$$- R_2 \,.\, I_I + (R_2 + R_3 + R_4) \,.\, I_{II} = \varepsilon_2 \qquad (11)$$

Fig. 17

Resumimos este planteo en dos ecuaciones:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) \,.\, I_I - R_2 \,.\, I_{II} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & (10) \\ - R_2 \,.\, I_I + (R_2 + R_3 + R_4) \,.\, I_{II} = \varepsilon_2 & (11) \end{cases}$$

Expresamos este sistema en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Coef. Incóg.}} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Incóg.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{11} \end{bmatrix}}_{\text{Term. Indep.}}$$

Matriz cuadrada para los coeficientes de las incógnitas $[R]$
Matriz rectangular para las incógnitas $[I]$
Matriz rectangular para los términos independientes $[\varepsilon]$

Nótese que los elementos de las matrices designados con letras poseen dos subíndices numéricos. El primer subíndice indica el N° de fila y el segundo subíndice indica el N° de columna

FILA: Orden horizontal ⇨ COLUMNA: Orden Vertical ⇩

En nuestro caso:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_3 + R_4) \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} I_{I} \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Resolveremos por el método de determinante

¿Cómo armar la matriz de datos, sin realizar el planteo del sistema de ecuaciones según Kirchhoff y posterior desarrollo algebraico?

En la matriz de los coeficientes de las incógnitas (de resistencias en Ω), identificamos:

una **diagonal principal**, en este caso compuesta por los elementos a_{11} y a_{22}, ellos se completan con las resistencias propias de las mallas, esto es la suma de todas las resistencias que atraviesa una corriente de malla

a_{11} —→ Lazo I —→ $R_1 + R_2$

a_{22} —→ Lazo II —→ $R_2 + R_3 + R_4$

una **diagonal opuesta**, en este caso compuesta por los elementos a_{12} y a_{21}, ellos se completan con las resistencias compartidas por dos mallas (corresistencias)

a_{12} —→ Lazo I y II —→ $-R_2$

a_{21} —→ Lazo II y I —→ $-R_2$

Se observa que la resistencia compartida lleva signo negativo, esto es porque las corrientes de mallas I y II , que elegimos arbitrariamente, circulan por la resistencia en sentidos contrarios y producen en la misma, caidas de tensión de distinto signo.

En la matriz de los términos independientes (de tensiones en V), se coloca la sumatoria de FEM´s que hay en el lazo, considerando la polaridad de las mismas con respecto al sentido de la corriente de malla. Si la FEM tiene el mismo sentido que la corriente de malla el signo es (**+**) y si es contraria es (**–**)

C_{11} —→ $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$

C_{21} —→ ε_2

Con los valores de este ejemplo nos queda:

$$\begin{bmatrix} (2 + 15) & -15 \\ -15 & (2 + 10 + 20) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_{I} \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 45 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_{I} \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$I_I = \frac{\Delta_I}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 3 & 45 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 45 \end{bmatrix}} = \frac{9*45-3*(-1\ \ )}{17*45\ \ (-15)*(-1\ \ )} = \frac{450}{540} = \frac{5}{6} = 0{,}8\hat{3}$$

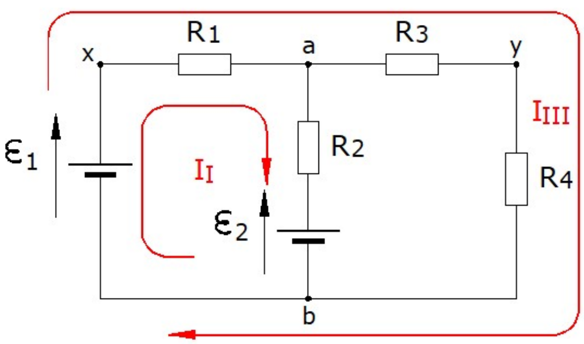
$$I_{II} = \frac{\Delta_{II}}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} 17 & \\ -15 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & \end{bmatrix}} = \frac{17*3-9*(-15)}{17*45-(-15)*(-1\ \ )} = \frac{186}{540} = \frac{31}{90} = 0{,}3\hat{4}$$

La corriente de la rama izquierda, que circula del nodo **b** al **a,** designada $\mathbf{I_1}$, será la corriente de malla $\mathbf{I_I}$: **$\mathbf{I_1 = I_I}$ = 0,833 A**

La corriente de la rama derecha, que circula del nodo **a** al **b,** designada $\mathbf{I_3}$, será la corriente de malla $\mathbf{I_{II}}$: **$\mathbf{I_3 = I_{II}}$ = 0,344 A**

La corriente de la rama central, que circula del nodo **a** al **b,** designada $\mathbf{I_2}$, será la diferencia de las corrientes de malla $\mathbf{I_I}$ y $\mathbf{I_{II}}$: **$\mathbf{I_2 = I_I - I_{II}}$ = 0,833 – 0,344 = 0,488 A**

Ej. 7
Si hubiéramos planteado estas corrientes de malla:



$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & R_1 \\ R_1 & (R_1 + R_3 + R_4) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 17 & 2 \\ 2 & 32 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Fig. 18

$$I_I = \frac{\Delta_I}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 12 & 32 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 17 & 2 \\ 2 & 32 \end{bmatrix}} = \frac{9*32-2*12}{17*32-2*2} = \frac{264}{540} = \frac{22}{45} = 0{,}4\hat{8}$$

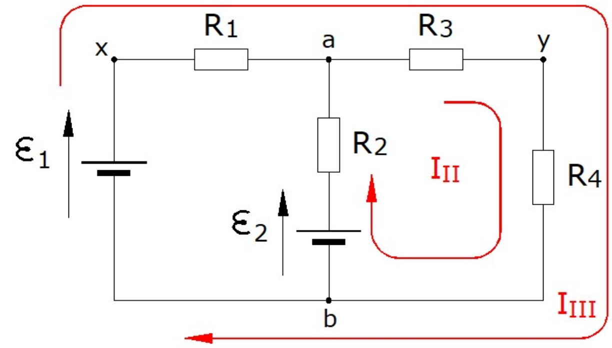
$$I_{III} = \frac{\Delta_{III}}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 17 & 2 \\ 2 & 32 \end{bmatrix}} = \frac{17*12-9*2}{17*32-2*2} = \frac{186}{540} = \frac{31}{90} = 0{,}3\hat{4}$$

Rama izquierda de **b** a **a**: **$\mathbf{I_1 = I_I + I_{III}}$ = 0,488 + 0,344 = 0,833 A**

Rama central de **a** a **b**: **$\mathbf{I_2 = I_I}$ = 0,488 A**

Rama derecha de **b** a **a**: **$\mathbf{I_3 = I_{III}}$ = 0,344 A**

Ej. 8
Si hubiéramos planteado las corrientes de malla indicadas en la Fig.19:



$$\begin{bmatrix} (R_1+R_3+R_4) & (R_3+R_4) \\ (R_3+R_4) & (R_2+R_3+R_4) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_{III} \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 30 \\ 30 & 45 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_{I} \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fig. 19

$$I_{III} = \frac{\Delta_{III}}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} 12 & 30 \\ 3 & 45 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 32 & 30 \\ 30 & 45 \end{bmatrix}} = \frac{12*45-30*3}{32*45-30*30} = \frac{450}{540} = \frac{5}{6} = 0{,}8\hat{3}$$

$$I_{II} = \frac{\Delta_{II}}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} 32 & 12 \\ 30 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 32 & 30 \\ 30 & 45 \end{bmatrix}} = \frac{32*3-12*30}{32*45-30*30} = \frac{-264}{540} = \frac{-22}{45} = -0{,}4\hat{8}$$

El signo negativo de I_{II}, se interpreta como que esa corriente de malla realmente circula al revés (sentido anti horario)

Rama izquierda de **b** a **a**: **$I_1 = I_{III}$ = 0,833 A**

Rama central de **a** a **b**: **$I_2 = -\ I_{II}$ = 0,488 A**

Rama derecha de **b** a **a**: **$I_3 = I_{III} + I_{II}$ = 0,833 + (– 0,488) = 0,344 A**

Conclusión: En todos los casos, obtuvimos el mismo resultado en el análisis del circuito de la Fig. 15, independientemente de las corrientes de malla que elegimos. Podríamos decir que este método es un método general para el cálculo de circuitos eléctricos.

Ej. 9

Este circuito no posee dos fuentes como el anterior (Ej. 4), pero las resistencias están dispuestas de tal manera que ninguna esta en serie o en paralelo con la otra. Este circuito se denominará mallado y deberá resolverse inevitablemente por el Método de las Corrientes de Malla u otros que veremos más adelante.

El mismo posee:

4 Nodos principales: **a** , **b** , **c** , **d**

6 Ramas: **ab** , **bc** , **cd** , **ac** , **bd** , **da**

7 Mallas: **abcda** , **bcdb** , **acba** , **acda** , **abcda** , **acbda** , **acdba**

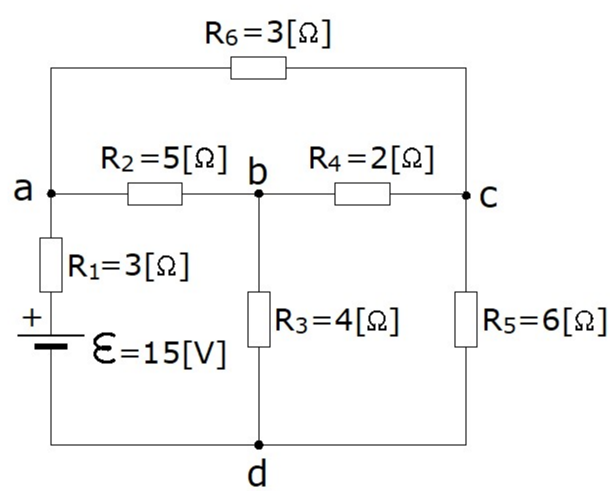


Fig. 20

N° mín ecs = 6 – 4 + 1 = 3

Esto quiere decir que, con elegir 3 de las posibles 7 mallas, resolvemos el circuito

Planteamos a partir de las tres corrientes de malla mostradas en el gráfico de la Fig 21.

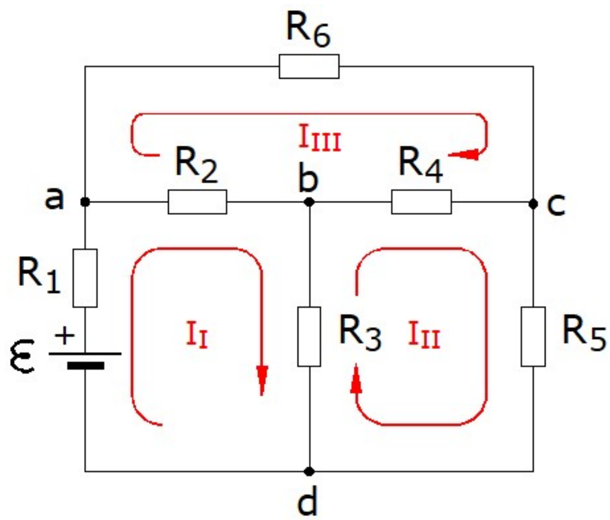


Fig. 21

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_3) & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & (R_3+R_4+R_5) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2+R_4+R_6) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -4 & -5 \\ -4 & 12 & -2 \\ -5 & -2 & 10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -5 \\ -4 & 12 & -2 \\ -5 & -2 & 10 \end{bmatrix} = 12.12.10+(-4).(-2).(-5)+(-5).(-4).(-2) - (-5).12.(-5) - 12.(-2).(-2) - (-4).(-4).10 = 852$$

$$\Delta_I = \begin{bmatrix} 15 & -4 & -5 \\ 0 & 12 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} = 15.12.10+(-4).(-2).0+(-5).0.(-2) - (-5).12.0 - 15.(-2).(-2) - (-4).0.10 = 1740$$

$$\Delta_{II} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & -5 \\ -4 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} = 12.0.10+15.(-2).(-5)+(-5).(-4).0 - (-5).0.(-5) - 12.(-2)\,0 - 15.(-4).10 = 750$$

$$\Delta_{III} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 15 \\ -4 & 12 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 12.12.0+(-4).0.(-5)+15.(-4).(-2) - 15.12.(-5) - 12.0.(-2) - (-4)\,(-4).0 = 1020$$

$I_{I} = \Delta_{I} / \Delta = 1740 / 852 = 2{,}042$ A
$I_{II} = \Delta_{II} / \Delta = 750 / 852 = 0{,}88$ A
$I_{III} = \Delta_{III} / \Delta = 1020 / 852 = 1{,}197$ A

Corrientes de Malla

$I_{da} = I_{I} = 2{,}042$ A
$I_{cd} = I_{II} = 0{,}88$ A
$I_{ac} = I_{III} = 1{,}197$ A
$I_{ab} = I_{I} - I_{III} = 2{,}042 - 1{,}197 = 0{,}845$ A
$I_{bd} = I_{I} - I_{II} = 2{,}042 - 0{,}88 = 1{,}162$ A
$I_{cb} = I_{III} - I_{II} = 1{,}197 - 0{,}88 = 0{,}317$ A

Corrientes de Rama

Cálculo de las tensiones en cada resistencia:

$V_1 = I_{da} \cdot R_1 = 2{,}042\ A \cdot 3\ \Omega = 6{,}127$ V

$V_2 = I_{ab} \cdot R_2 = 0{,}845\ A \cdot 5\ \Omega = 4{,}225$ V

$V_3 = I_{bd} \cdot R_3 = 1{,}162\ A \cdot 4\ \Omega = 4{,}648$ V

$V_4 = I_{cb} \cdot R_4 = 0{,}317\ A \cdot 2\ \Omega = 0{,}634$ V

$V_5 = I_{cd} \cdot R_5 = 0{,}088\ A \cdot 6\ \Omega = 5{,}282$ V

$V_6 = I_{ac} \cdot R_6 = 1{,}197\ A \cdot 3\ \Omega = 3{,}592$ V

El circuito con todos los parámetros calculados queda:

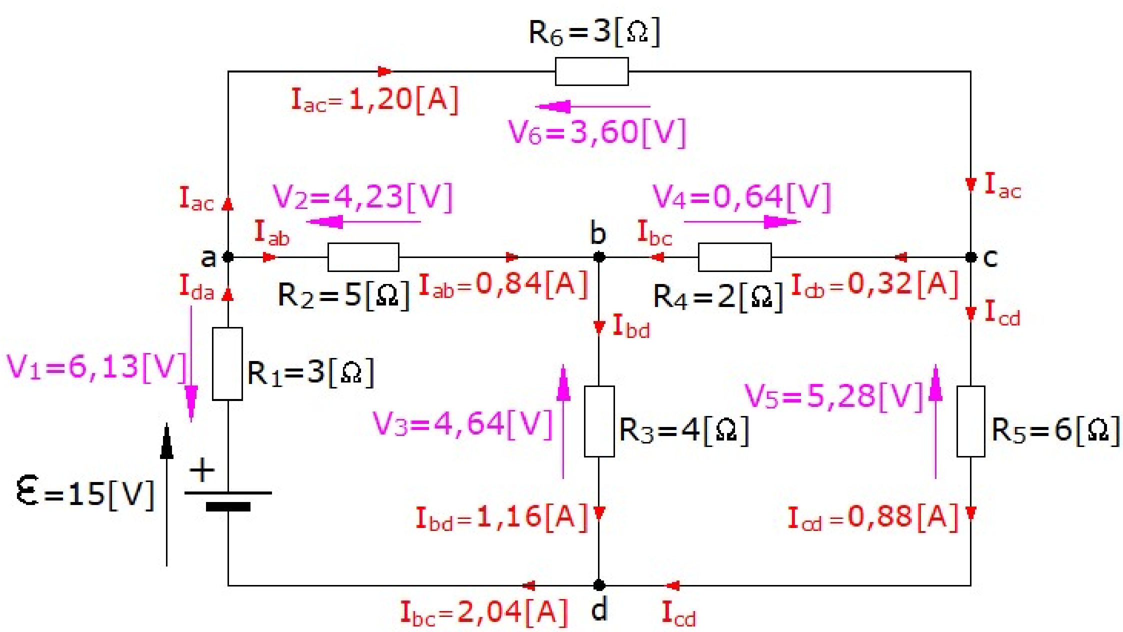


Fig. 22

Nótese que en los tres lazos que tomamos para el planteo se verifica la 2ª L. de K.:

Malla I: (15 - 6,13 - 4,23 - 4,64) V = 0 V

Malla II: (4,64 + 0,64 – 5,28) V = 0 V

Malla III: (4,23 – 3,60 – 0,64) V = 0 V

Ej. 10

También podrían haberse planteado las siguientes mallas y abordar al mismo resultado.
Recordar que con 7 mallas posibles y 3 necesarias podemos combinar 35 posibles planteos.

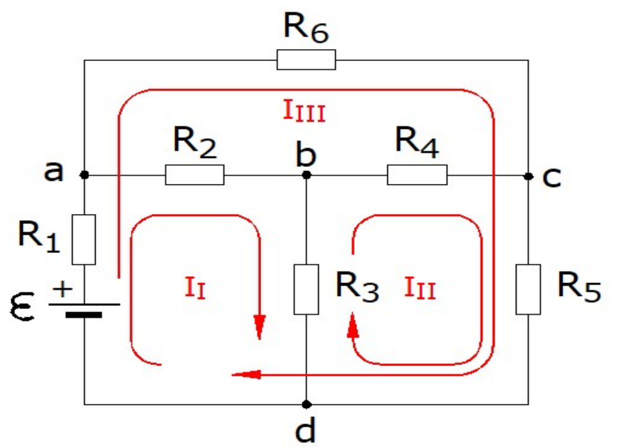


Fig. 23

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_3) & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & (R_3 + R_4 + R_5) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_1 + R_5 + R_6) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -4 & 3 \\ -4 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 3 \\ -4 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} = 12.12.12+(-4).6.3+3.(-4).6 - 3.12.3 - 12.6.6 - (-4).(-4).12 = 852$$

$$\Delta_I = \begin{bmatrix} 15 & -4 & 3 \\ 0 & 12 & 6 \\ 15 & 6 & 12 \end{bmatrix} = 15.12.12+(-4).6.15+3.0.6 - 3.12.15 - 15.6.6 - (-4).0.6 = 720$$

$$\Delta_{II} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 3 \\ -4 & 0 & 6 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix} = 12.0.12+15.6.3+3.(-4).15 - 3.0.3 - 12.6.15 - 15.(-4).12 = -270$$

$$\Delta_{III} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 15 \\ -4 & 12 & 0 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = 12.12.15+(-4).0.3+15.(-4).6 - 15.12.3 - 12.0.6 - (-4)(-4).15 = 1020$$

Corrientes de Malla:

$$\left.\begin{aligned} I_{I} &= \Delta_{I} / \Delta = 720 / 852 = 0{,}845 \text{ A} \\ I_{II} &= \Delta_{II} / \Delta = -270 / 852 = -0{,}317 \text{ A} \\ I_{III} &= \Delta_{III} / \Delta = 1020 / 852 = 1{,}197 \text{ A} \end{aligned}\right\} \text{Corrientes de Malla}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{da} &= I_{I} + I_{III} = 0{,}845 + 1{,}197 = 2{,}042 \text{ A} \\ I_{cd} &= I_{II} + I_{III} = -0{,}317 + 1{,}197 = 0{,}880 \text{ A} \\ I_{ac} &= I_{III} = 1{,}197 \text{ A} \\ I_{ab} &= I_{I} = 0{,}845 \text{ A} \\ I_{bd} &= I_{I} - I_{II} = 0{,}845 - (-0{,}317) = 1{,}162 \text{ A} \\ I_{cb} &= -I_{II} = 0{,}317 \text{ A} \end{aligned}\right\} \text{Corrientes de Rama}$$