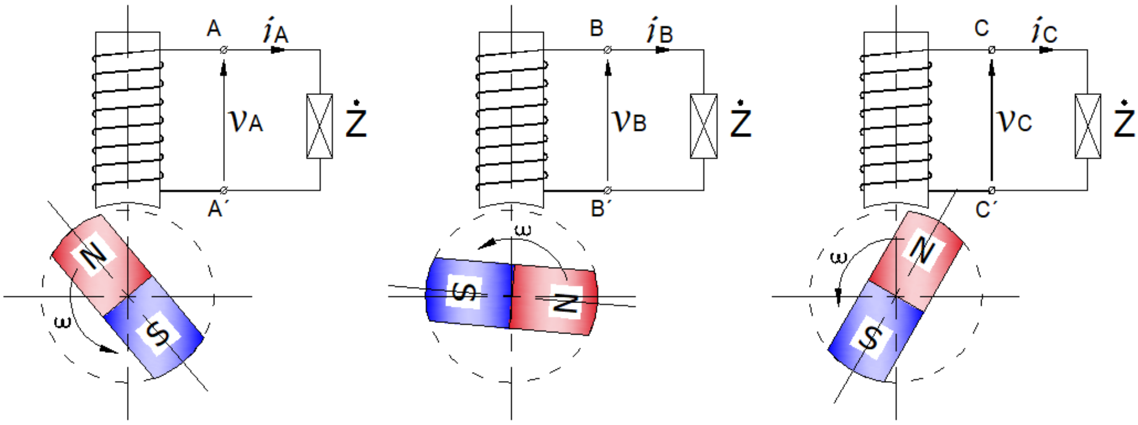
SISTEMAS TRIFÁSICOS

Supongamos que queremos alimentar tres impedancias iguales y para ello utilizamos tres alternadores monofásicos independientes de potencia adecuada a la carga que alimentan y que generan la misma tensión.



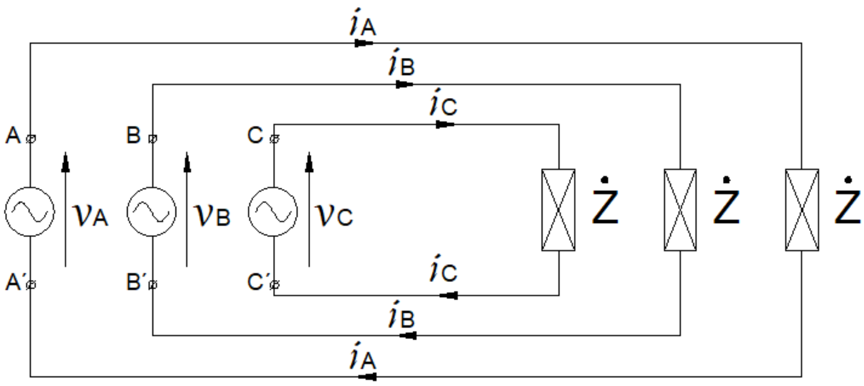
Tendremos que los alternadores generan tres tensiones que no guardan ninguna relación ni sincronización entre ellas.

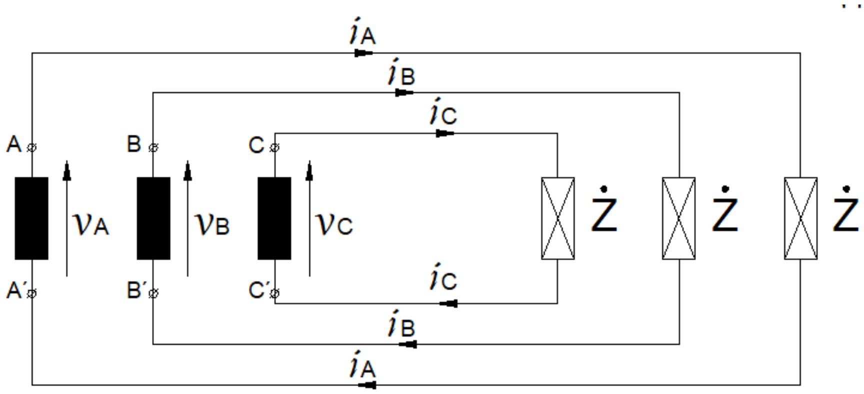
$$v_A = \hat{V}\,.\sin\,(\omega.t - \theta_1) \quad ; \quad \dot{V}_A = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \angle -\theta_1$$

$$v_B = \hat{V}\,.\sin\,(\omega.t - \theta_2) \quad ; \quad \dot{V}_B = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \angle -\theta_2$$

$$v_C = \hat{V}\,.\sin\,(\omega.t - \theta_3) \quad ; \quad \dot{V}_C = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \angle -\theta_3$$

En los que $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$ pueden ser cualquier ángulo.





Las corrientes consumidas por las impedancias de carga, por ej. inductivas con un ángulo de fase **φ** y todas del mismo módulo, serán:

$$i_A = \frac{\hat{V}}{Z}\,.\sin\,(\omega.t - \theta_1 - \varphi) \quad ; \quad \dot{I}_A = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\,\angle(-\theta_1 - \varphi)$$

$$i_B = \frac{\hat{V}}{Z}\,.\sin\,(\omega.t - \theta_2 - \varphi) \quad ; \quad \dot{I}_B = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\,\angle(-\theta_2 - \varphi)$$

$$i_C = \frac{\hat{V}}{Z}\,.\sin\,(\omega.t - \theta_3 - \varphi) \quad ; \quad \dot{I}_A = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\,\angle(-\theta_3 - \varphi)$$

Calculamos la potencia entregada por cada generador y consumida por cada impedancia; y también la potencia total. Realizamos el cálculo de la impedancia compleja, multiplicando el fasor de tensión por el conjugado de la corriente.

Para el generador A:

$$\dot{S}_A = \dot{V}_A\,.\,\dot{I}_A^{\,*} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}\,\angle(-\theta_1)\,.\,\frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\,\angle(\theta_1 + \varphi) = \frac{\hat{V}^2}{2\,.\,Z}\angle\varphi$$

Donde, como ya vimos: $\frac{\hat{V}^2}{2\,.\,Z} = \frac{\hat{S}}{2} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}\,.\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = V\,.\,I$

$$\dot{S}_A = V.I\,\angle\varphi = V.I\,.\cos\varphi + j\,V.I\,.\sin\varphi = P + j\,Q$$

Lo mismo para los otros dos generadores:

Para el generador B:

$$\dot{S}_B = \dot{V}_B\,.\,\dot{I}_B^{\,*} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}\,\angle(-\theta_2)\,.\frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\,\angle(\theta_2 + \varphi) = \frac{\hat{V}^2}{2\,.Z}\angle\varphi = V.I\,\angle\varphi = V.I.\cos\varphi + j\,V.I.\sin\varphi = P + j\,Q$$

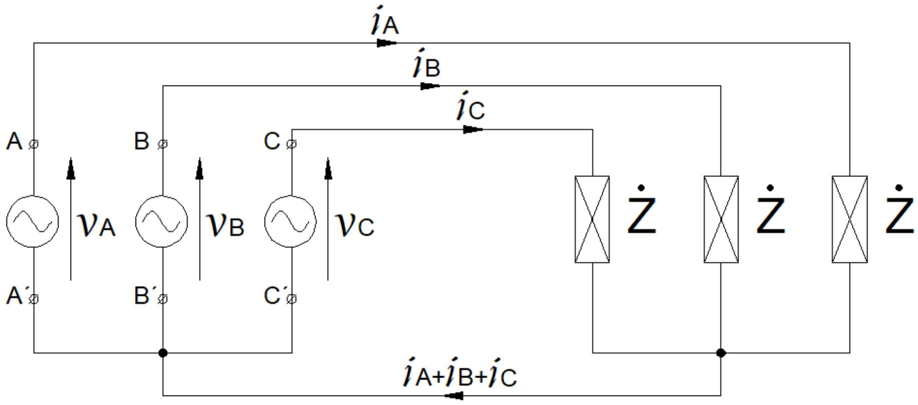
Para el generador C:

$$\dot{S}_C = \dot{V}_C\,.\,\dot{I}_C^{\,*} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}\,\angle(-\theta_3)\,.\frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\,\angle(\theta_3 + \varphi) = \frac{\hat{V}^2}{2\,.Z}\angle\varphi = V.I\,\angle\varphi = V.I.\cos\varphi + j\,V.I.\sin\varphi = P + j\,Q$$

Observamos que, obtenemos como era previsible tres potencias iguales, con lo cual la potencia total será:

$$\dot{S}_{Tot} = \dot{S}_A + \dot{S}_B + \dot{S}_C = 3.V.I\,\angle\varphi = 3.V.I.\cos\varphi + j\,3.V.I.\sin\varphi = 3.P + j\,3.Q$$

Si tomamos un polo como potencial de referencia en los tres alternadores y los unimos, obtendremos la situación indicada en el siguiente circuito.



Si además consideramos
que los tres alternadores generan tensiones de igual fase, para simplificar el cálculo.

La corriente que retorna por el conductor de referencia es la suma de las corrientes de A, B y C. Si habíamos considerado que tales corrientes eran iguales a I, porque los módulos de las tensiones y las impedancias eran también iguales, al tener todas la misma fase se suman linealmente, entonces tendremos por el conductor de referencia una corriente igual al triple de las corrientes que circulan por cada línea 3 . I.

Ahora vamos a considerar que los tres alternadores generan tensiones de igual módulo pero con una diferencia de fase de 120° (2.π/3 rad) entre sí.

$$v_A = \hat{V}\,.\sin\,(\omega.t - \ 0) \quad ; \quad \dot{V}_A = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}\angle 0° \ = V\angle 0°$$

$$v_B = \hat{V}\,.\sin\left(\omega.t - \frac{2.\pi}{3}\right) \quad ; \quad \dot{V}_B = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}\angle -120° = V\angle -120°$$

$$v_C = \hat{V}\,.\sin\left(\omega.t - \frac{4.\pi}{3}\right) \quad ; \quad \dot{V}_C = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}\angle -240° = V\angle -240° = \ V\angle 120°$$

Las corrientes resultarán:

$$i_A = \frac{\hat{V}}{Z}\,.\sin\,(\omega.t - \ \varphi) \quad ; \quad \dot{I}_A = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\angle(-\varphi) = \frac{V}{Z}\angle(-\varphi)$$

$$i_B = \frac{\hat{V}}{Z}\,.\sin\left(\omega.t - \frac{2.\pi}{3} - \varphi\right) \quad ; \quad \dot{I}_B = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\angle(-120° - \varphi) = \frac{V}{Z}\angle(-120° - \varphi)$$

$$i_C = \frac{\hat{V}}{Z}\,.\sin\left(\omega.t + \frac{2.\pi}{3} - \varphi\right) \quad ; \quad \dot{I}_C = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}.Z}\angle(120° - \varphi) = \frac{V}{Z}\angle(120° - \varphi)$$

Veamos que sucede al sumar estas tres corrientes, que estarán a φ de las tensiones, pero entre si estarán también a 120 °.

$$i_A + i_B + i_C$$

Vectorialmente: $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = I\angle(-\varphi) + I\angle(-120° - \varphi) + I\angle(120° - \varphi)$=

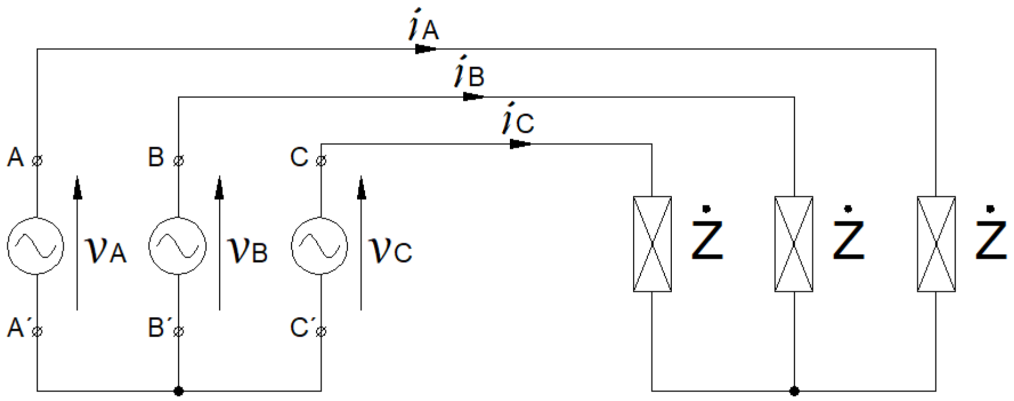
$I\cos(-\varphi) + j\,I\sin(-\varphi) + I\cos(-120° - \varphi) + j\,I\sin(-120° - \varphi) + I\cos(120° - \varphi) + j\,I\sin(120° - \varphi)$=

$I\{\cos(\varphi) -$
j sinφ+cos−120°).cos(φ)+sinφ.sin(−120°]+j
[sin−120°).cos(φ−sinφ.cos−120°+cos120°).cosφ+sinφ.sin(120°]+j
[sin120°).cos(φ−sinφ.cos120°=

$$= I\left(\cancel{\cos\varphi} - \cancel{j\sin\varphi} - \cancel{\tfrac{1}{2}\cos\varphi} - \cancel{\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi} - j\cancel{\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi} + \cancel{j\tfrac{1}{2}\sin\varphi} - \cancel{\tfrac{1}{2}\cos\varphi} + \cancel{\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi} + j\cancel{\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi} + \cancel{j\tfrac{1}{2}\sin\varphi}\right) = 0$$

$\Rightarrow\ \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = I\angle(-\varphi) + I\angle(-120° - \varphi) + I\angle(120° - \varphi) = 0$

Si la suma de las corrientes es nula podemos prescindir del conductor de referencia o común, porque por él no circularía corriente en estas condiciones.



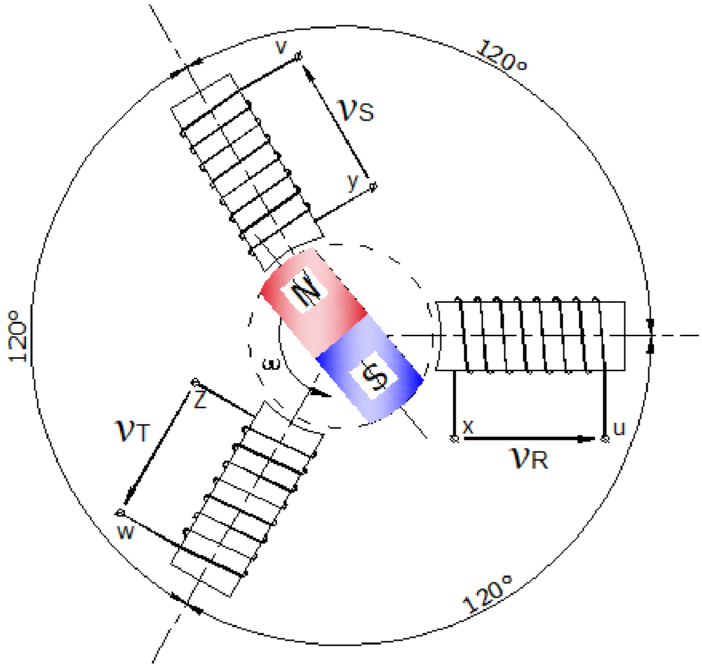
Y como las potencias no dependen del ángulo de fase de las tensiones, da lo mismo que $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$, o $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ o que sean 0° ; -120° ; 120° (120° entre sí). La potencia solo dependerá del ángulo φ de la carga. En este caso si calculamos la potencia total también obtendremos el triple de la potencia de cada una de las cargas.

Es evidente entonces la conveniencia de esta última situación con una terna de tensiones a 120° entre sí, ya que llevamos la misma potencia a las tres impedancias, con 3 conductores de línea en lugar de 6, como ocurría al principio con los tres generadores monofásicos independientes.

Se suman a las conveniencias que las pérdidas en la línea y caídas de tensiones disminuyen, siendo además el alternador trifásico una máquina de mayor rendimiento que el monofásico y de menor tamaño a igualdad de potencia.

La pregunta es entonces ¿Cómo obtenemos una terna de tensiones a 120° entre sí?

La respuesta es: Disponiendo en el generador un campo inductor y tres bobinas (fases) desplazadas físicamente 120°.



Nótese que llamaremos a las fases del sistema trifásico con las letras **R**, **S** y **T** en lugar de A, B y C.

Y los bornes de cada bobina de fase posee denominación normalizada con las letras:

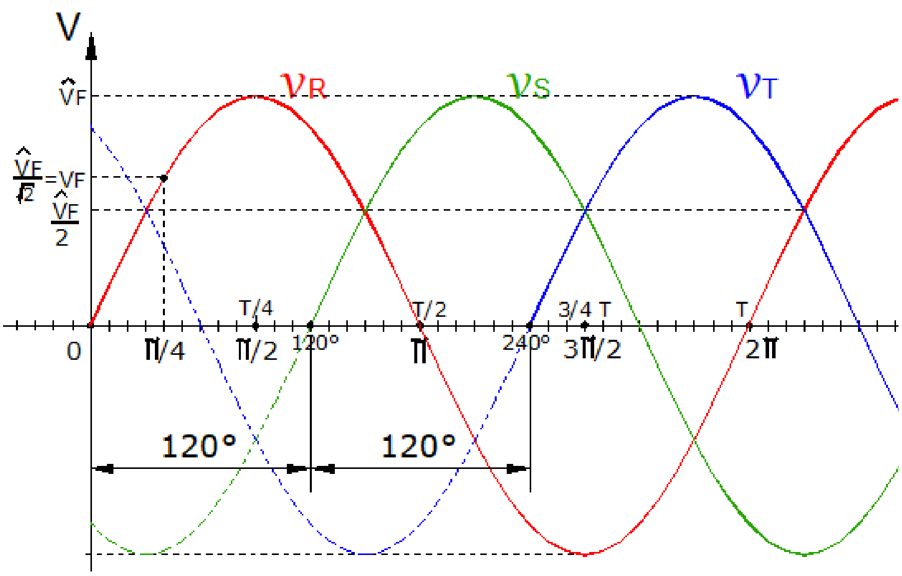
u -**x** para la bobina de fase **R**; **v**-**y** para la bobina de fase **S**; y **w**-**z** para la bobina de fase **T**.

El campo inductor girando en sentido antihorario, induce tensión primero en la fase **R**, luego en la fase **S** y por último en la fase **T**. Cuando las fases se suceden así, **R-S-**T la **secuencia** se denomina **directa**. Si el campo inductor girara al revés (sentido horario) la secuencia sería R-T-S o **T-S-R** denominada **secuencia inversa**.

Este alternador (generador), es denominado **trifásico,** ya que las bobinas del inducido conforman tres fases.

Las tensiones que se inducen, como ya dijimos están desfasadas 120° entre sí.

En este caso la fase de la tensión **νR** está en **0**:

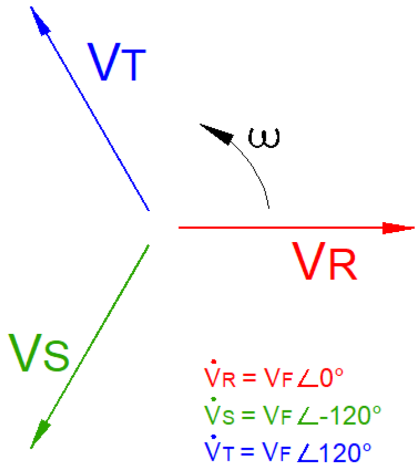


$\nu_R = \hat{V}_F.\text{Sen}(\omega.t)$

$\nu_S = \hat{V}_F.\text{Sen}(\omega.t-120°)$

$\nu_T = \hat{V}_F.\text{Sen}(\omega.t-240°)$

Fasorialmente:

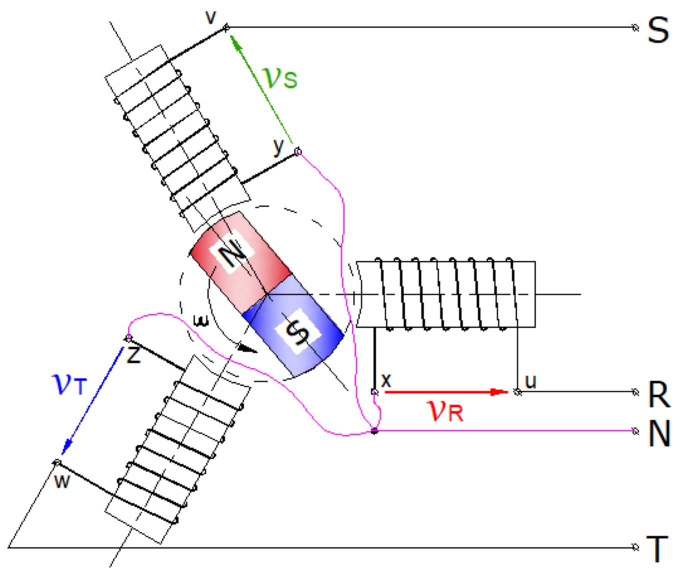


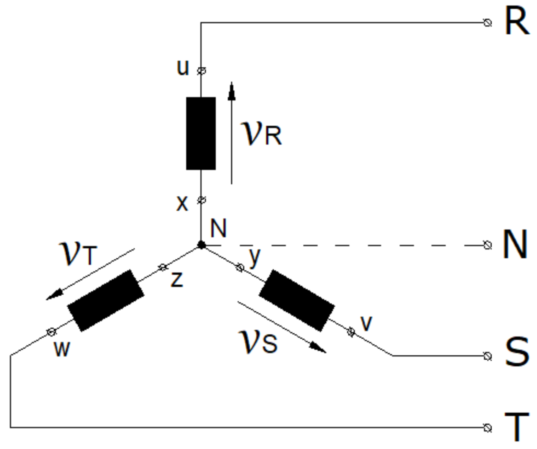
Las tensiones máximas y eficaces de las diferentes fases serán iguales ya que se constituyen sobre el mismo núcleo (circuito magnético), son atravesadas por el mismo campo y tienen el mismo número de vueltas.

Este juego e bobinas puede conectarse de dos formas diferentes, en una configuración llamada estrella, o en otra llamada triángulo.

Conexión ESTRELLA

En esta configuración conectamos todos los extremos (salidas o entradas) de bobinas en este caso **x-y-z** en un punto común, al que llamamos **neutro** y salimos a la línea por los otros extremos de bobina.





Podemos ver que existen dos tensiones diferentes:

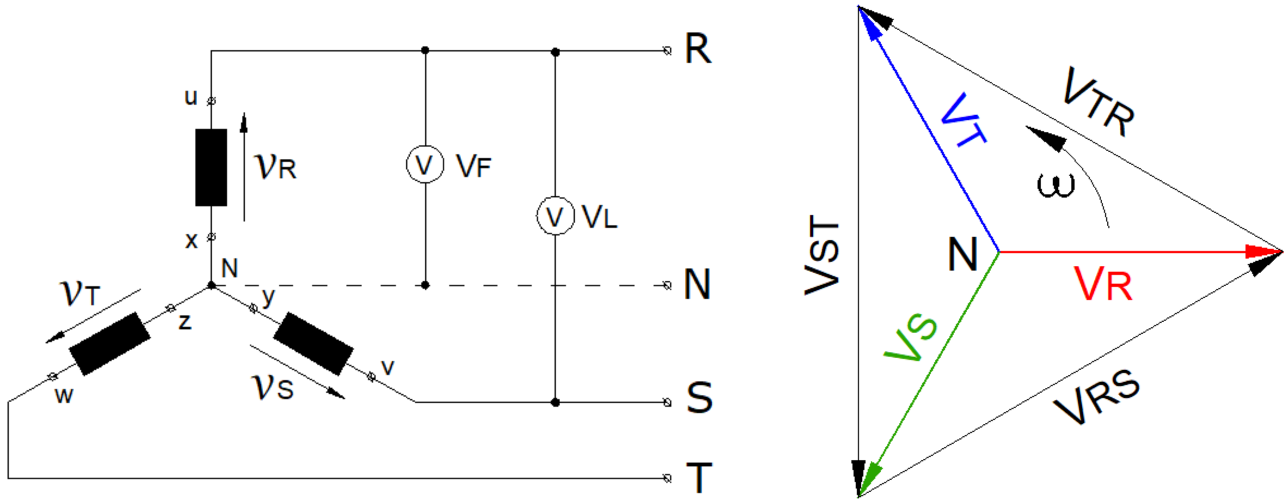
- Las que podemos medir en los extremos de cada bobina, que son iguales a las que medimos entre cada línea y el punto neutro; a las que llamaremos tensiones de **fase** o **simples** del sistema.

Tensión de Fase: $V_F = V_{RN}$; V_{SN} y V_{TN}

Por comodidad no le pondremos el subíndice N ⇒ $\mathbf{V_F = V_R; V_S}$ **y** $\mathbf{V_{TN}}$

- Las que podemos medir entre los extremos de salida de las bobinas o entre líneas; a las que llamaremos tensiones de **línea** o **compuestas** del sistema.

  Tensión de Línea $\mathbf{V_L = V_{RS}\ ; V_{ST}}$ **y** $\mathbf{V_{TR}}$



Si tomamos el siguiente sistema de tensiones, con $\mathbf{v_R}$ en 0° y las otras dos a 120°:

$$\dot{V}_R = V_F \angle 0° \quad ; \quad \dot{V}_S = V_F \angle -120° \quad ; \quad \dot{V}_T = V_F \angle 120°$$

Las tensiones compuestas resultan de la diferencia vectorial de las tensiones simples:

$$\dot{V}_{RS} = \dot{V}_R - \dot{V}_S = V_F \angle 0° - V_F \angle -120° =$$

$$V_F.\cos(0°) + j\ \sin(0°) - V_F.\cos(-120°) - j\ \mathrm{V_F}.\sin(-120°)$$

$$\dot{V}_{RS} = V_F + \frac{1}{2} V_F + j\frac{\sqrt{3}}{2} V_F = \frac{3}{2} V_F + j\frac{\sqrt{3}}{2} V_F = \sqrt{3}\,.V_F \angle 30°$$

Como resultado observamos que el módulo de la tensión compuesta, es raíz de tres veces mayor que la tensión simple de fase: $V_L = \sqrt{3}\,.V_F$

$$\dot{V}_{RS} = V_L \angle 30°$$

Por ejemplo en nuestro sistema eléctrico nacional para la distribución en baja tensión, la tensión de fase es 220 V. Entonces aplicando la relación tenemos: $V_L = \sqrt{3}\,.220\ V = 381{,}05\ V$, adoptándose como valor nominal 380 V.

Podemos hacer la diferencia vectorial de las otras fases y obtendremos como resultado el mismo módulo, cambiando solamente el ángulo de fase:

$$\dot{V}_{ST} = \dot{V}_S - \dot{V}_T = V_F \angle -120° - V_F \angle 120° =$$

$$V_F . \cos -120° + j \ \sin -120° - V_F . \cos 120° - j \ \mathrm{V_F} . \sin 120°$$

$$\dot{V}_{ST} = -\tfrac{1}{2} V_F - j \tfrac{\sqrt{3}}{2} V_F + \tfrac{1}{2} V_F - j \tfrac{\sqrt{3}}{2} V_F = -j\sqrt{3} . V_F = \sqrt{3} . V_F \angle -90° \quad \Rightarrow$$

$$\dot{V}_{ST} = V_L \angle -90°$$

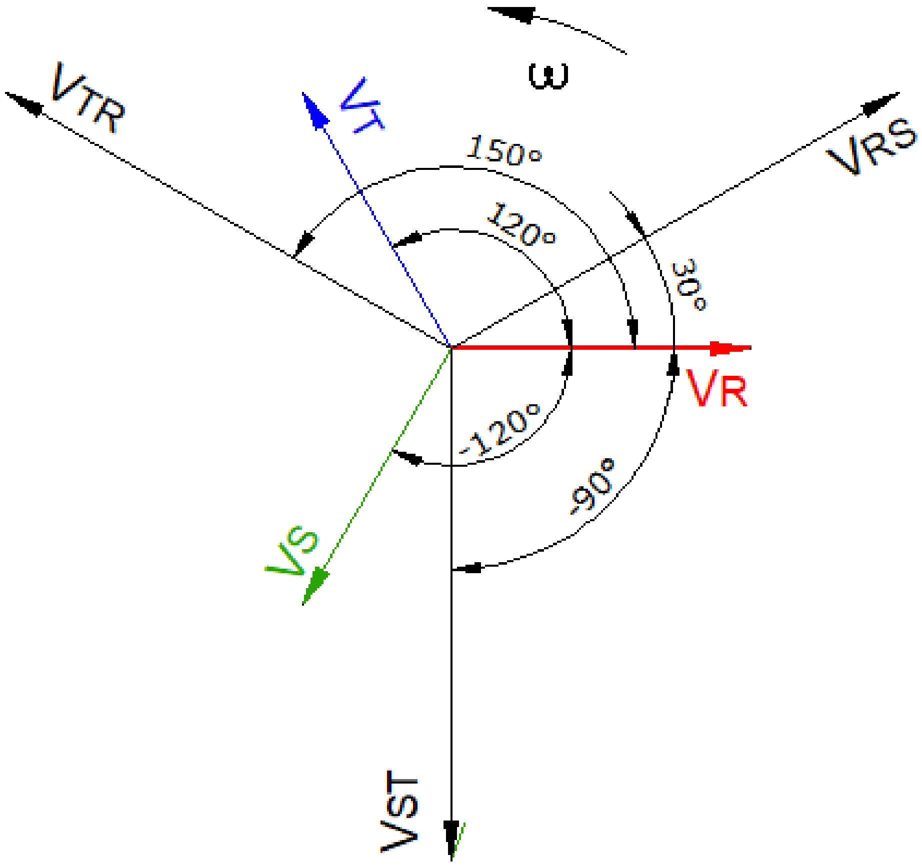
$$\dot{V}_{TR} = \dot{V}_T - \dot{V}_R = V_F \angle 120° - V_F \angle 0° =$$

$$V_F . \cos 120° + j \ \sin 120° - V_F . \cos 0° - j \ \mathrm{V_F} . \sin 0°$$

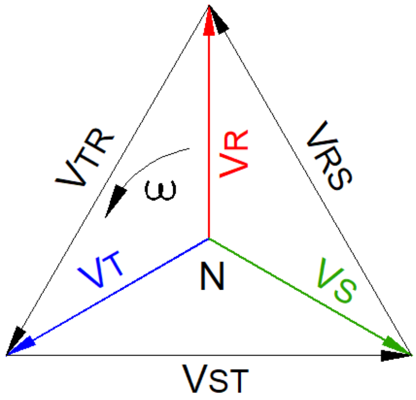
$$\dot{V}_{TR} = -\tfrac{1}{2} V_F + j \tfrac{\sqrt{3}}{2} V_F - V_F - j \, 0 = -\tfrac{3}{2} V_F + j \tfrac{\sqrt{3}}{2} V_F = \sqrt{3} . V_F \angle 150° \quad \Rightarrow$$

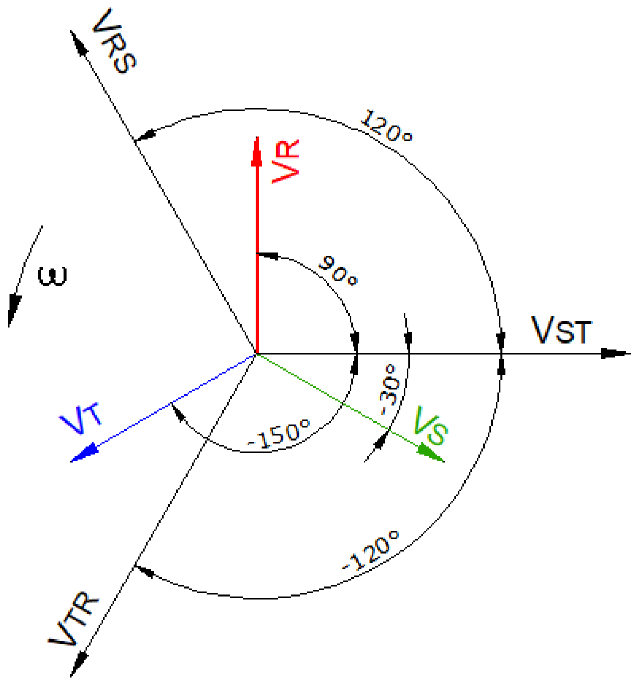
$$\dot{V}_{TR} = V_L \angle 150°$$

Representación gráfica de las tensiones simples y compuestas, para el sistema dado:



Para realizar los cálculos de circuitos trifásicos, podemos adoptar cualquier sistema de tensiones, pero los más utilizados son, el que ya describimos o el siguiente:





Tensiones Simples:

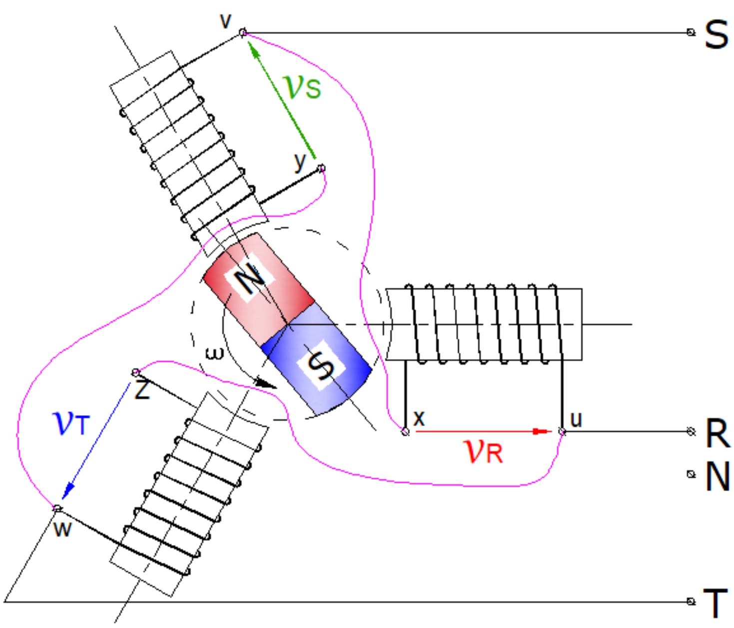
$$\dot{V}_R = V_F \angle 90°$$
$$\dot{V}_S = V_F \angle -30°$$
$$\dot{V}_T = V_F \angle -150° \text{ ó } \dot{V}_T = V_F \angle 210°$$

Tensiones Compuestas:

$$\dot{V}_{RS} = V_L \angle 120°$$
$$\dot{V}_{ST} = V_L \angle 0°$$
$$\dot{V}_{TR} = V_L \angle -120° \text{ ó } \dot{V}_T = V_F \angle 240°$$

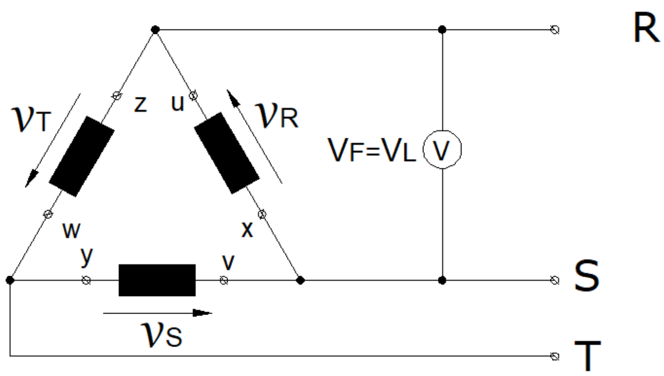
Conexión TRIÁNGULO

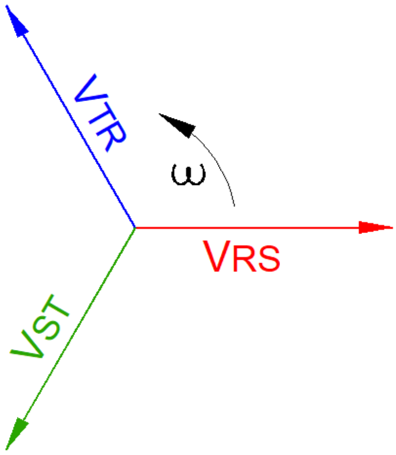
En esta configuración conectamos cada salida de bobina a la entrada de la siguiente en la secuencia y de esas uniones salimos a la línea.

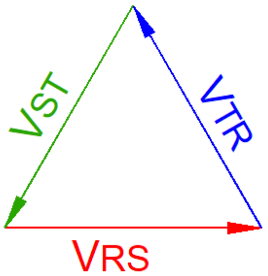


Se observa claramente que esta conexión carece de punto común o neutro

En conexión triángulo la tensión de fase es la misma que la tensión de línea o compuesta.







$$\dot{V}_{RS} = V_L \angle 0°$$
$$\dot{V}_{ST} = V_L \angle -120°$$
$$\dot{V}_{TR} = V_L \angle 120°$$

Dadas las fuentes trifásicas, alternadores con configuración estrella o triángulo, vamos a conectar impedancias de carga; estas también pueden conectarse en Estrella o en Triángulo independientemente de, como esté conectada la fuente (Alternador o transformador).
Si las impedancias poseen el mismo módulo y la misma fase el sistema será equilibrado o perfecto y si cambian en módulo y/o fase el sistema será desequilibrado. Vamos a estudiar ahora estas condiciones.

Propiedad fundamental de los sistemas trifásicos

Los sistemas trifásicos cuyas magnitudes (tensiones, corrientes, etc.…) tienen igual amplitud o módulo y se hallan igualmente desfasados (120°) como los tratados hasta aquí, se denominan Perfectos.
En estos sistemas cualquiera sea la secuencia, la suma algebraica de los valores instantáneos, así como la suma vectorial de los valores máximos o eficaces, es igual a cero.

Demostración de esta condición

I) Con las funciones armónicas

a) Analíticamente

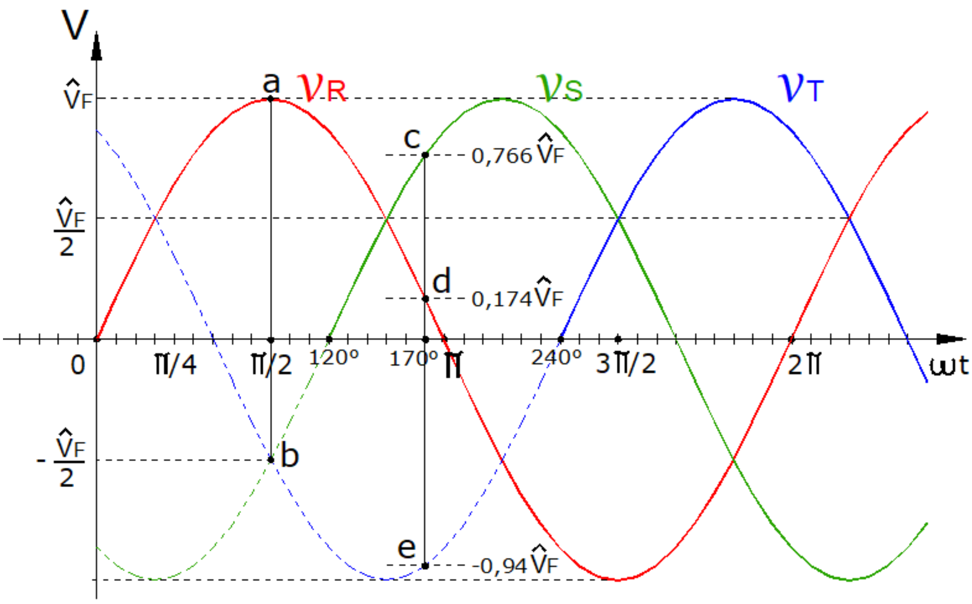
$$v_{R(t)} + v_{S(t)} + v_{T(t)} = 0$$
$$\hat{V}_F . Sen(\omega.t) + \hat{V}_F . Sen(\omega.t - 120°) + \hat{V}_F . Sen(\omega.t + 120°) = 0$$

$$\hat{V}_F.\{Sen(\omega.t) + [Sen(\omega.t).Cos(-120°) + Sen(-120°).Cos(\omega.t)] + [Sen(\omega.t).Cos(120°) + Sen(120°).Cos(\omega.t)]\} = 0$$

$$\hat{V}_F.\left\{Sen(\omega.t) - \frac{1}{2}Sen(\omega.t) - \frac{\sqrt{3}}{2}Cos(\omega.t) - \frac{1}{2}Sen(\omega.t) + \frac{\sqrt{3}}{2}Cos(\omega.t)\right\} = 0$$

$$\hat{V}_F.\left\{\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)Sen(\omega.t) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)Cos(\omega.t)\right\} = 0$$

b) Gráficamente



En la figura puede comprobarse que en cualquier instante, una tensión es igual y opuesta a la suma de las otras dos. Por consiguiente si se realiza la suma instante a instante a lo largo de todo el período se obtiene el eje de abscisas.

En θ = 90°

$$v_{Ra} + v_{Sb} + v_{Tb} =$$

$$\hat{V}_F.Sen(90°) + \hat{V}_F.Sen(90° - 120°) + \hat{V}_F.Sen(90° + 120°) =$$

$$\hat{V}_F.Sen(90°) + \hat{V}_F.Sen(-30°) + \hat{V}_F.Sen(210°) = \hat{V}_F - \frac{1}{2}\,\hat{V}_F - \frac{1}{2}\,\hat{V}_F = 0$$

$$\hat{V}_F - \frac{1}{2}\,\hat{V}_F - \frac{1}{2}\,\hat{V}_F = 0$$

O en En θ = 170°

$$v_{Rc} + v_{Sd} + v_{Te} =$$

$$\hat{V}_F.Sen(170°) + \hat{V}_F.Sen(170° - 120°) + \hat{V}_F.Sen(170° + 120°) =$$

$$\hat{V}_F.Sen(170°) + \hat{V}_F.Sen(50°) + \hat{V}_F.Sen(290°) =$$

$$0{,}766.\hat{V}_F + 0{,}174.\hat{V}_F - 940.\hat{V}_F = 0$$

II) Vectorialmente

a) Analíticamente

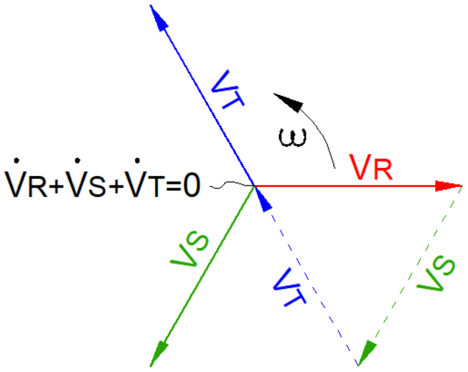
$$\dot{V}_R + \dot{V}_S + \dot{V}_T = 0$$

$$V_F \angle 0° + V_F \angle -120° + V_F \angle 120° =$$

$$V_F \,.\, Cos\,(0°) + j\, V_F \,.\, Sen\, 0° + V_F \,.\, Cos(-120°) + j\, V_F \,.\, Sen(-120°) + V_F \,.\, Cos(\,120°) + j\, V_F \,.\, Sen\,(120°) =$$

$$V_F - \frac{1}{2}V_F - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}V_F - \frac{1}{2}V_F + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}V_F = V_F\left[\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 0$$

b) Gráficamente



Clasificación de los sistemas trifásicos

Los sistemas trifásicos se clasifican generalmente de los siguientes modos:

I-Según la **SIMETRÍA**
- 1-**Simétricos Perfectos**: Magnitudes de igual amplitud e igualmente desfases entre sí.
- 2-**Asimétricos**: Que tienen magnitudes de diferente amplitud y/o desfases entre ellas
  - a-**Propios**: Si tienen igual desfase entre magnitudes consecutivas.
  - b-**Regulares**: Si tienen igual amplitud

II-Según su **RESULTANTE**
- 1-**Equilibrados**: Cuando la sumatoria de sus fasores es nula.
- 2-**Desequilibrados**: Cuando la sumatoria de sus fasores es distinta de cero

Según lo visto anteriormente, los sistemas perfectos son equilibrados; pero los equilibrados pueden ser asimétricos.

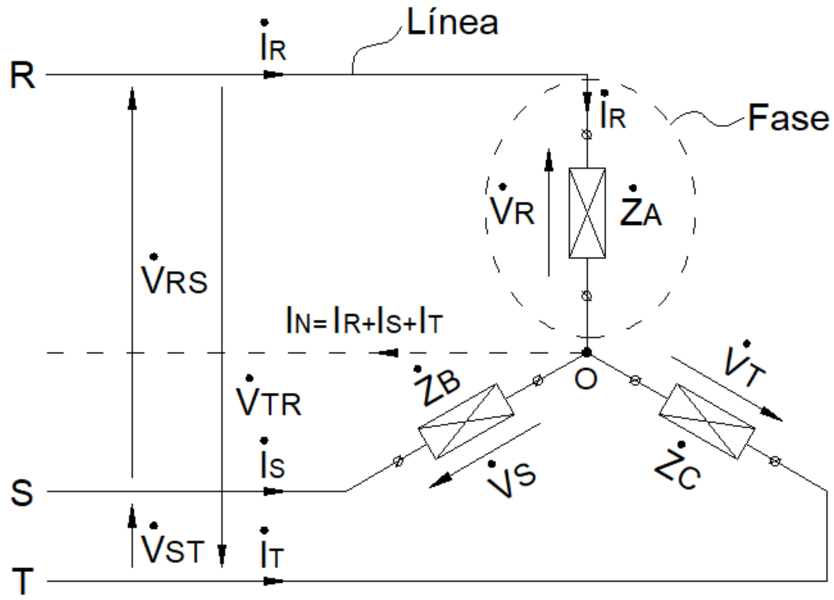
Un sistema asimétrico de tensiones podría generarse en un alternador con bobinas de diferente n° de espiras y/o igual n° de espiras y diferente decalaje de 120° entre ellas. Pero solo tienen interés práctico los sistemas asimétricos de tensiones y corrientes que aparecen en las cargas asimétricas, que como veremos pueden ser equilibradas o desequilibradas.

Cargas Trifásicas en Estrella Equilibrada

Sea una carga trifásica conformada por tres impedancias iguales en módulo y fase:

$$\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = Z \angle \varphi = R + j\,X_L \quad \text{(Inductiva)}$$

Conectadas cada una de las entradas a cada línea (R ; S ; T) y todas las salidas a un punto común (Centro de estrella).
Es evidente que en esta configuración de circuito, la corriente que circula por la línea es la misma que circula por la fase. Entonces en Estrella: $I_L = I_F$



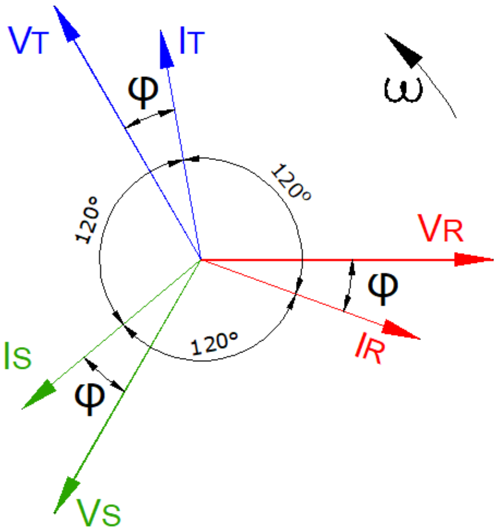
Si el sistema de tensiones es simétrico perfecto, obtendremos tres corrientes de igual módulo que guardan el mismo ángulo **φ** respecto de las tensiones que las impulsan, quedando también a 120 ° entre sí, constituyendo un sistema simétrico, equilibrado y perfecto de corrientes con una suma igual a cero. O sea que no habría corriente de neutro.

Si: $\dot{V}_R = V_F \angle 0°$; $\dot{V}_S = V_F \angle -120°$; $\dot{V}_T = V_F \angle 120°$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_R}{\dot{Z}_A} = \frac{V_F \angle 0°}{Z \angle \varphi} = \frac{V_F}{Z} \angle(-\varphi)$$

$$\dot{I}_S = \frac{\dot{V}_S}{\dot{Z}_B} = \frac{V_F \angle -120°}{Z \angle \varphi} = \frac{V_F}{Z} \angle(-120° - \varphi)$$

$$\dot{I}_T = \frac{\dot{V}_T}{\dot{Z}_C} = \frac{V_F \angle 120°}{Z \angle \varphi} = \frac{V_F}{Z} \angle(120° - \varphi)$$



Ej:

Con: $\dot{V}_R = 220 \angle 0°$ V ; $\dot{V}_S = 220 \angle -120°$ V ; $\dot{V}_T = 220 \angle 120°$ V

Y: $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = 40 \angle 20°\ \Omega$

$$\dot{I}_R = \frac{220 \angle 0°}{40 \angle 20} = \frac{220}{40} \angle(0° - 20°) = 5{,}5 \angle(-20°)\ A$$

$$\dot{I}_S = \frac{220 \angle -120°}{40 \angle 20°} = \frac{220}{40} \angle(-120° - 20°) = 5{,}5 \angle(-140°)\ A$$

$$\dot{I}_T = \frac{220 \angle 120°}{40 \angle 20°} = \frac{220}{40} \angle(120° - 20°) = 5{,}5 \angle(100°)\ A$$

Verificamos que el sistema es equilibrado y la $I_N = 0$.

$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = 5{,}5.\cos(-20°) + j5{,}5.sen(-20°) + 5{,}5.\cos(-140°) + j5{,}5.sen(-140°) + 5{,}5.\cos(100°) + j5{,}5.sen(100°)$$

$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = 5{,}168 - j1{,}881 - 4{,}213 - j3{,}535 - 0{,}955 + j5{,}416$$
$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = (5{,}168 - 4{,}213 - 0{,}955) + j(-1{,}881 - 3{,}535 + 5{,}416)$$
$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = 0 + j0$$

Cargas Trifásicas en Estrella Desequilibrada con Neutro

Sea una carga trifásica conformada por tres impedancias, basta que una sea distinta en módulo y/o fase, para que el sistema sea asimétrico, no necesariamente desequilibrado:

$$\dot{Z}_A \neq \dot{Z}_B = o \neq \dot{Z}_C$$

Ej:

Con: $\dot{V}_R = 220\,\angle 0°$ V ; $\dot{V}_S = 220\,\angle -120°$ V ; $\dot{V}_T = 220\,\angle 120°$ V

Y: $\dot{Z}_A = 40\angle\, 20°\,\Omega$ (Ind); $\dot{Z}_B = 50\angle\, 30°\,\Omega$ (Ind) ; $\dot{Z}_A = 55\angle -10°\,\Omega$ (Cap)

$$\dot{I}_R = \frac{220\,\angle 0°}{40\,\angle 20} = \frac{220}{40}\,\angle(0° - 20°) = 5{,}5\,\angle(-20°)\ A$$

$$\dot{I}_S = \frac{220\,\angle -120°}{50\,\angle\, 30°} = \frac{220}{50}\,\angle(-120° - 30°) = 4{,}4\,\angle(-150°)\ A$$

$$\dot{I}_T = \frac{220\,\angle 120°}{55\,\angle -10°} = \frac{220}{55}\,\angle(120° + 10°) = 4\,\angle(130°)\ A$$

Ahora si existirá una resultante no nula de las corrientes de línea/fase, que constituye la corriente de neutro, por lo que se requerirá que este conductor exista (Imprescindible).

$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = 5{,}5.\cos(-20°) + j5{,}5.sen(-20°) + 4{,}4.\cos(-150°) + j4{,}4.sen(-150°) + 4.\cos(130°) + j4.sen(130°)$$

$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = 5{,}168 - j1{,}881 - 3{,}811 - j2{,}200 - 2{,}571 + j3{,}064$$

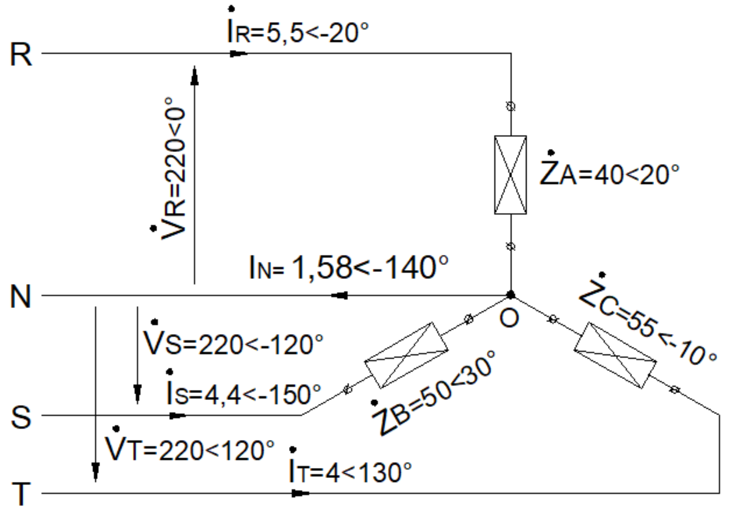
$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = (5{,}168 - 3{,}811 - 2{,}571) + j(-1{,}881 - 2{,}200 + 3{,}064)$$

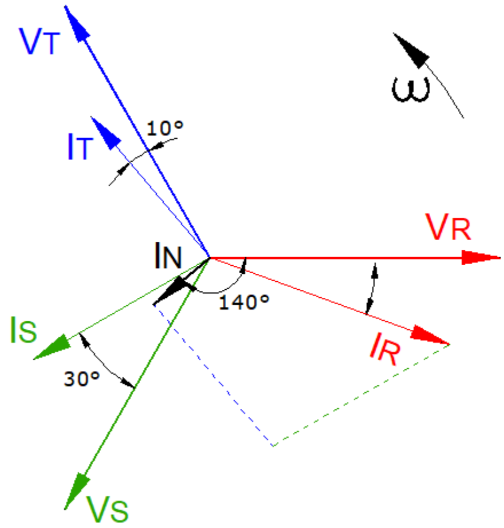
$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = -1{,}213 - j1{,}017 = \dot{I}_N$$

Calculamos módulo y fase:

$$\dot{I}_N = \sqrt{(-1{,}213)^2 + (-1{,}017)^2}\ \angle\left[arcTg\left(\frac{-1{,}017}{-1{,}213}\right) + 180°\right]$$

$\dot{I}_N = 1{,}583\,\angle -140{,}03°\ A$ ó $\dot{I}_N = 1{,}583\,\angle\, 219{,}97°\ A$





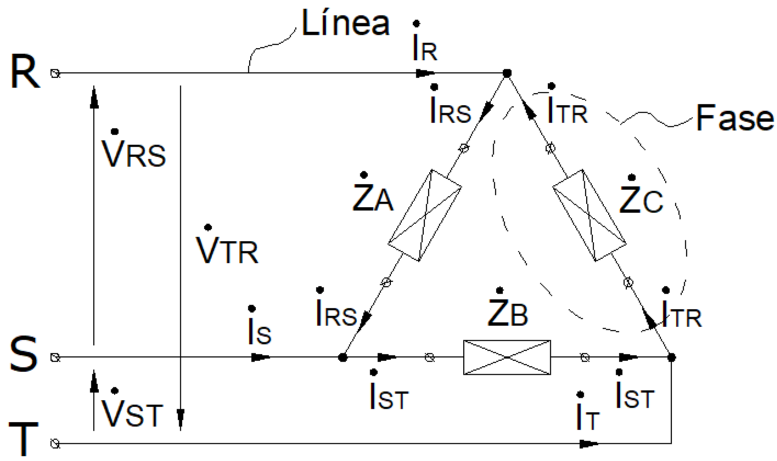
Cargas Trifásicas en Triángulo Equilibrado

Sea una carga trifásica conformada por tres impedancias iguales en módulo y fase:

$$\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = Z \angle \varphi = R + j\, X_L \quad \text{(Inductiva)}$$

Conectadas cada una de las salidas a la entrada de la siguiente y esta unión a cada línea (R ; S ; T).

Es evidente que en esta configuración de circuito, la corriente que circula por la línea no es la misma que circula por la fase y la tensión de fase es igual a la compuesta de línea: $V_L = V_F$



E este caso las tensiones que se aplican a las fases son las de línea:

$$\dot{V}_{RS} = V_L \angle 30°$$

$$\dot{V}_{ST} = V_L \angle -90°$$

$$\dot{V}_{TR} = V_L \angle 150°$$

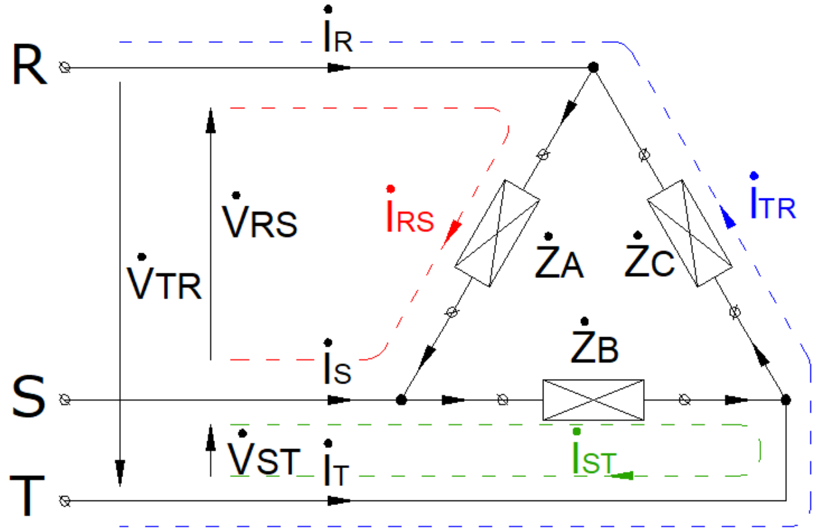
Derivadas del sistema de tensiones simples:

$\dot{V}_R = V_F \angle 0°$; $\dot{V}_S = V_F \angle -120°$; $\dot{V}_T = V_F \angle 120°$ Que ahora no se hallan presentes en esta configuración.

A: IR ; Is ; IT las llamaremos corrientes de Línea **IL**

A: IRS ; IST ; ITR las llamaremos corrientes de Fase **IF**

Para calcular estas corrientes aplicaremos el método de las corrientes de malla.



Calculamos las corrientes de cada fase:

$$\dot{I}_{RS} = \frac{\dot{V}_{RS}}{\dot{Z}_A} = \frac{V_L \angle 30°}{Z \angle \varphi} = \frac{V_L}{Z} \angle(30° - \varphi)$$

$$\dot{I}_{ST} = \frac{\dot{V}_{ST}}{\dot{Z}_B} = \frac{V_L \angle -90°}{Z \angle \varphi} = \frac{V_L}{Z} \angle(-90° - \varphi)$$

$$\dot{I}_{TR} = \frac{\dot{V}_{TR}}{\dot{Z}_C} = \frac{V_L \angle 150°}{Z \angle \varphi} = \frac{V_L}{Z} \angle(150° - \varphi)$$

Para calcular las corrientes de línea debemos hacer las diferencias de las corrientes de fase:

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{RS} - \dot{I}_{TR} \qquad ; \qquad \dot{I}_S = \dot{I}_{ST} - \dot{I}_{RS} \qquad ; \qquad \dot{I}_T = \dot{I}_{TR} - \dot{I}_{ST}$$

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{RS} - \dot{I}_{TR} = \frac{V_L}{Z} \angle(30° - \varphi) - \frac{V_L}{Z} \angle(150° - \varphi)$$

$$\dot{I}_R = \frac{V_L}{Z} [cos(30° - \varphi) + j\, sen(30° - \varphi)] - \frac{V_L}{Z} [cos(150° - \varphi) + j\, sen(150° - \varphi)]$$

$$\dot{I}_R = \frac{V_L}{Z} \{[cos30°.cos\varphi + sen30°.sen\varphi + j\, sen30°.cos\varphi - jcos30°.sen\varphi]$$
$$- [cos150°.cos\varphi + sen150°.sen\varphi + j\, sen150°.cos\varphi - jcos150°.sen\varphi]\}$$

$$\dot{I}_R = \frac{V_L}{Z}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.cos\varphi + \frac{1}{2}.sen\varphi + j\,\frac{1}{2}.cos\varphi - j\frac{\sqrt{3}}{2}.sen\varphi\right)\right.$$
$$\left. - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}.cos\varphi + \frac{1}{2}.sen\varphi + j\,\frac{1}{2}.cos\varphi + j\frac{\sqrt{3}}{2}.sen\varphi\right)\right]$$

$$\dot{I}_R = \frac{V_L}{Z}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.cos\varphi + \cancel{\frac{1}{2}.sen\varphi} + j\,\cancel{\frac{1}{2}.cos\varphi} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.sen\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}.cos\varphi - \cancel{\frac{1}{2}.sen\varphi} - j\,\cancel{\frac{1}{2}.cos\varphi} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.sen\varphi\right)\right]$$

$$\dot{I}_R = \frac{V_L}{Z}\left(\sqrt{3}.cos\varphi - j\sqrt{3}.sen\varphi\right) = \frac{\sqrt{3}\,.\,V_L}{Z}\,.\,\left(cos\varphi - j\,sen\varphi\right)$$

Pasamos a polar: $\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ y $\text{arctg}\left(\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \text{arctg}(\text{tg}-\varphi) = -\varphi$

$$\dot{I}_R = \frac{\sqrt{3}\,.\,V_L}{Z}\angle-\varphi$$

Como en triángulo VL = VF: $\frac{V_L}{Z} = \frac{V_F}{Z} = I_F$

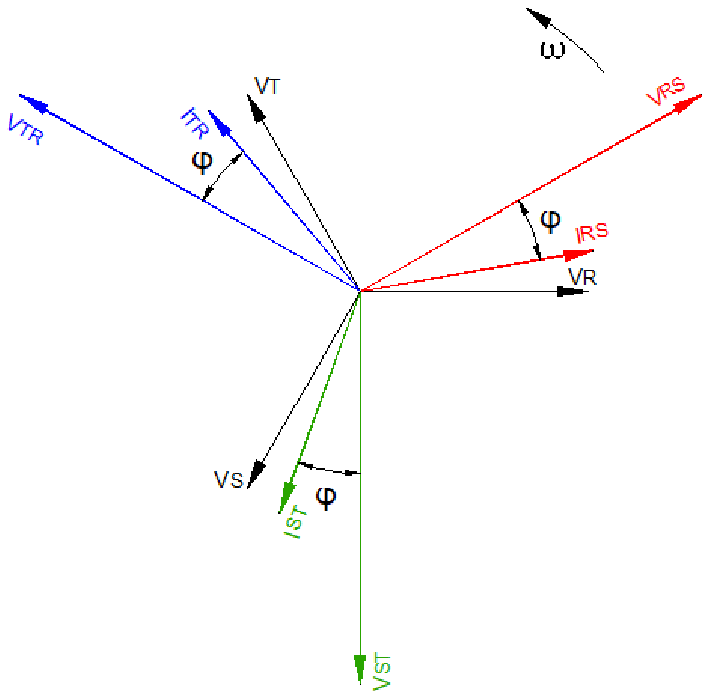
La expresión anterior queda: $\dot{I}_R = \sqrt{3}\,I_F\angle-\varphi$

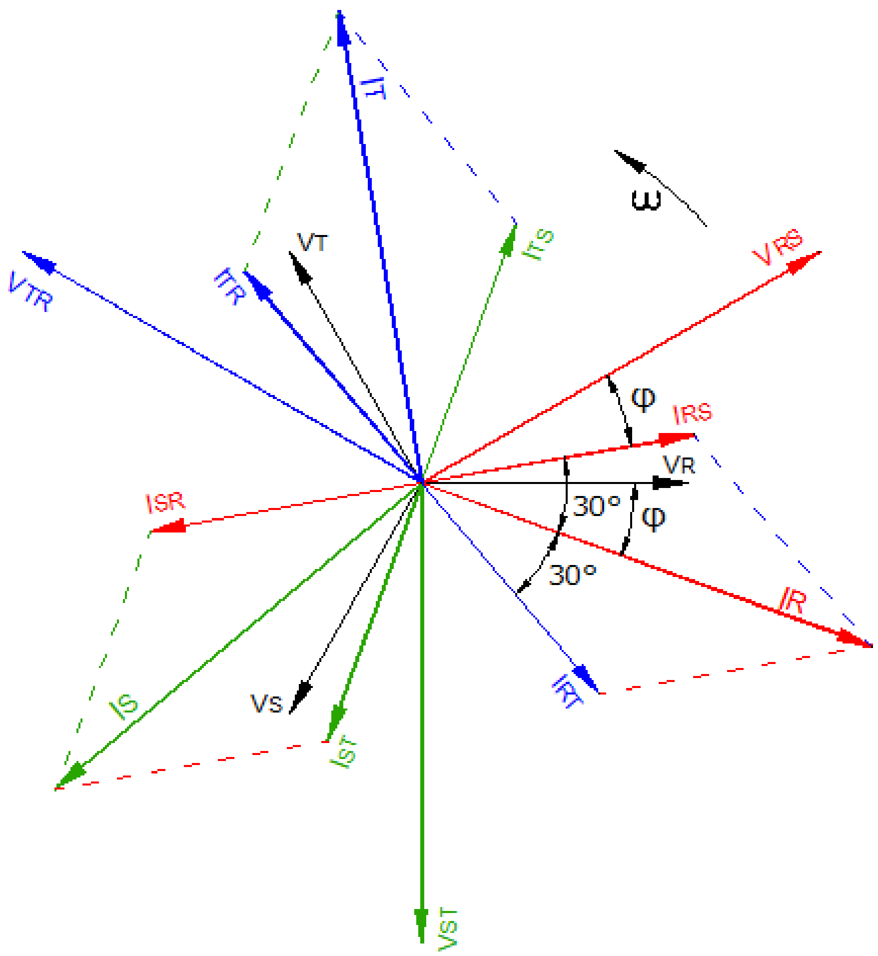
Entonces deducimos que el módulo de la corriente de línea es: $I_L = \sqrt{3}\,I_F$

$$\dot{I}_R = I_L\angle-\varphi$$

Además observamos que la corriente de línea R resultó atrasada respecto de 0°, que corresponde a la tensión simple del sistema, que dio origen a las tensiones compuestas con las que desarrollamos el cálculo de este circuito.

Es de esperar que las otras diferencias vectoriales den como resultado el mismo módulo y que resulten desfasadas un ángulo φ respecto de las otras dos tensiones simples.
Esto se muestra en el siguiente diagrama fasorial.





Ej. Determinar las corrientes de fase y línea de 3 impedancias iguales (Z = 30 + j 40 Ω) conectadas en triángulo cuando son excitadas por el siguiente sistema de tensiones:

$$\dot{V}_R = 224\angle 90° \text{ V};\ \dot{V}_S = 224\angle -30° \text{ V};\ \dot{V}_T = 224\angle 210° \text{ V}$$

Las tensiones de línea serán:

$$V_L = \sqrt{3}\,.\,V_F = \sqrt{3}\,.\,224 = 388\,V$$

$$\dot{V}_{RS} = 388\angle 120°\,V \quad ; \quad \dot{V}_{ST} = 388\angle 0°\,V \quad ; \quad \dot{V}_{TR} = 388\angle -120°\,V$$

Las impedancias de fase son:

$$\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = \sqrt{30^2 + 40^2}\angle\, arctg\left(\frac{40}{30}\right) = 50\angle 53{,}13°\,\Omega$$

Las corrientes de fase serán de módulo:

$$I_{RS} = I_{ST} = I_{TR} = I_F = \frac{V_F}{Z} \quad \Rightarrow \quad I_F = \frac{388\,V}{50\,\Omega} = 7{,}76\,A$$

Y estarán atrasadas 53,13° de las tensiones compuestas que las impulsan:

$$\dot{I}_{RS} = 7{,}76\angle(120° - 53{,}13°) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_{RS} = 7{,}76\angle 66{,}87°\,A$$

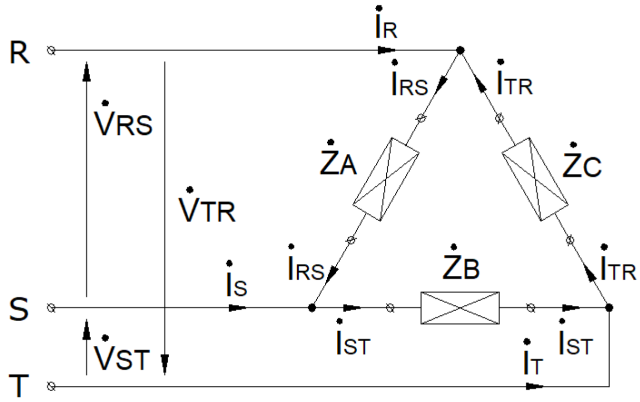
$$\dot{I}_{ST} = 7{,}76 \angle (0° - 53{,}13°) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_{ST} = 7{,}76 \angle -53{,}13°\ A$$
$$\dot{I}_{TR} = 7{,}76 \angle (-120° - 53{,}13°) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_{TR} = 7{,}76 \angle -173{,}13°\ A$$

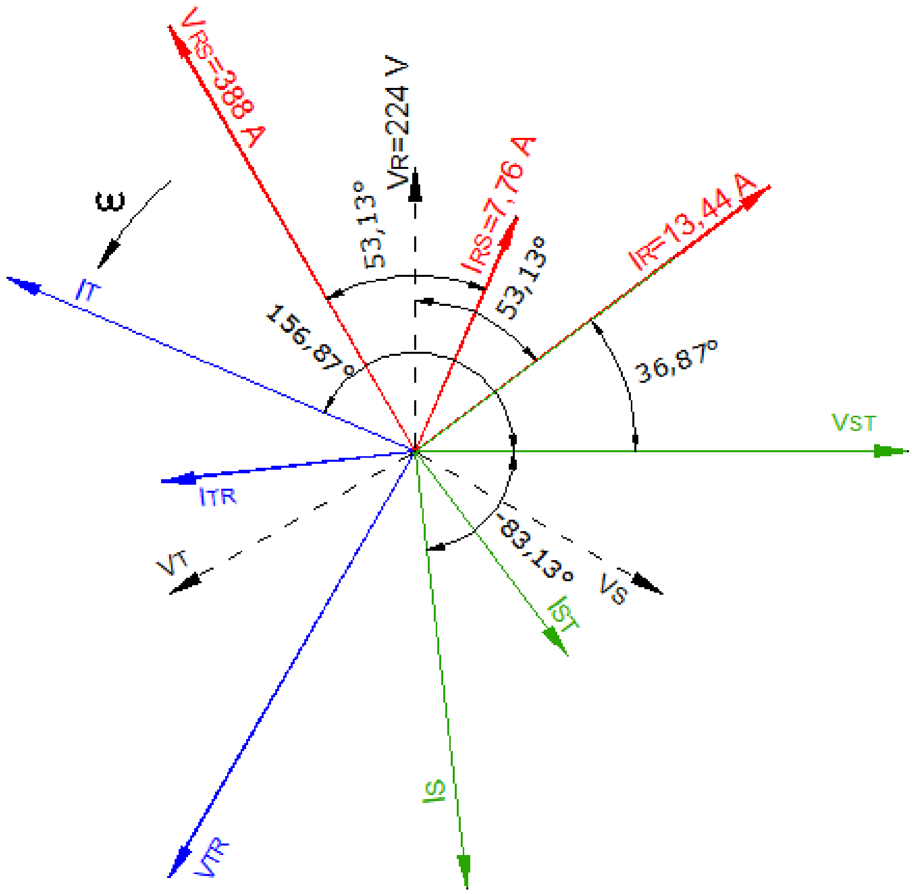
Las corrientes de línea serán de módulo:

$$I_R = I_S = I_T = I_L = \sqrt{3}\,.I_F \quad \Rightarrow \quad I_F = \sqrt{3}\,.7{,}76 = 13{,}44\ A$$

Y estarán atrasadas 53,13° de las tensiones simples:

$$\dot{I}_R = 13{,}44 \angle (90° - 53{,}13°) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_R = 13{,}44 \angle 36{,}87°\ A$$
$$\dot{I}_S = 13{,}44 \angle (-30° - 53{,}13°) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_S = 13{,}44 \angle -83{,}13°\ A$$
$$\dot{I}_T = 13{,}44 \angle (210° - 53{,}13°) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_T = 13{,}44 \angle 156{,}87°\ A$$





Cargas Trifásicas en Estrella Desequilibrada sin Neutro

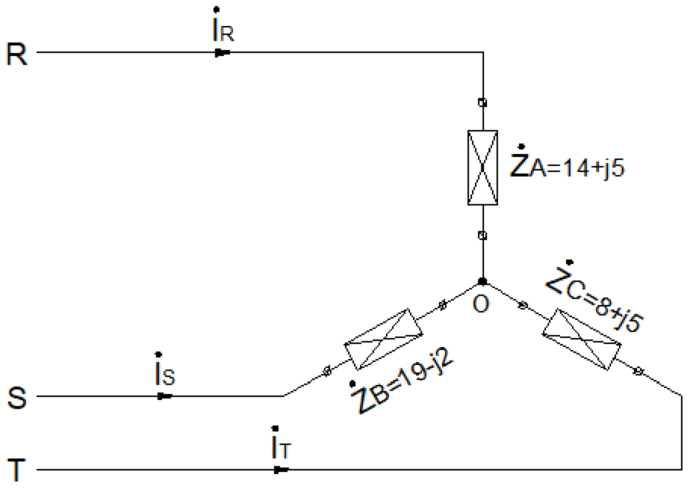
Para este análisis suponemos tres impedancias distintas:

$$\dot{Z}_A = 14 + j\,5\ \Omega \quad ; \quad \dot{Z}_B = 19 - j\,2\ \Omega \quad ; \quad \dot{Z}_C = 8 + j\,5\,\Omega$$

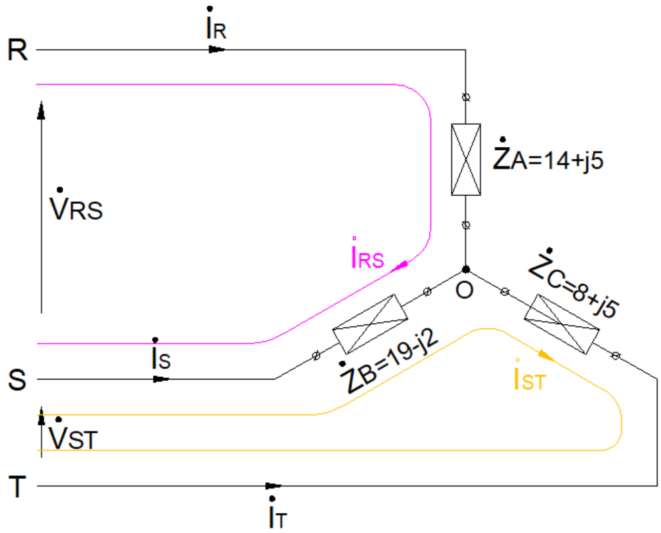
$$\dot{Z}_A = 14{,}87\angle 19{,}65°\,\Omega \quad ; \quad \dot{Z}_B = 19{,}10\angle -6{,}01°\,\Omega \quad ; \quad \dot{Z}_C = 9{,}43\angle 32°\,\Omega$$

Alimentadas por un sistema de tensiones simples:

$$\dot{V}_R = 220\angle 0°\ \mathrm{V}\ ;\ \dot{V}_S = 220\angle -120°\ \mathrm{V};\ \dot{V}_T = 220\angle 120°\ V$$



Planteamos la solución de este circuito por el método de corrientes de malla:



$$\dot{V}_{RS} = \dot{V}_R - \dot{V}_S$$

$$= 220\angle 0° - 220\angle -120°$$

$$= 220 + 110 + J190{,}5 =$$

$$\dot{V}_{RS} = 330 + J190{,}5 = 381\angle 30°\ \mathrm{V}$$

$$\dot{V}_{ST} = \dot{V}_S - \dot{V}_T$$

$$= 220\angle -120° - 220\angle 120°$$

$$= -110 - J190{,}5 + 110 - J190{,}5$$

$$\dot{V}_{ST} = -J381 = 381\angle -90°\ V$$

$$\begin{bmatrix} (\dot{Z}_A + \dot{Z}_B) & -\dot{Z}_B \\ -\dot{Z}_B & (\dot{Z}_B + \dot{Z}_C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{RS} \\ \dot{I}_{ST} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{RS} \\ \dot{V}_{ST} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (33 + J3) & (-19 + J2) \\ (-19 + J2) & (27 + J3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{RS} \\ \dot{I}_{ST} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 381\angle 30° \\ 381\angle -90° \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 33{,}14\angle 5{,}19° & 19{,}10\angle 174° \\ 19{,}10\angle 174° & 27{,}17\angle 6{,}34° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{RS} \\ \dot{I}_{ST} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 381\angle 30° \\ 381\angle -90° \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 33{,}14\angle 5{,}19° & 19{,}10\angle 174° \\ 19{,}10\angle 174° & 27{,}17\angle 6{,}34° \end{vmatrix} = 33{,}14\angle 5{,}19° \,.\, 27{,}17\angle 6{,}34° - (19{,}10\angle 174°)^2$$

$$\Delta = 525 + j256 = 584{,}09\angle 26°$$

$$\Delta_{RS} = \begin{vmatrix} 381\angle 30° & 19{,}10\angle 174° \\ 381\angle -90° & 27{,}17\angle 6{,}34° \end{vmatrix} = 381\angle 30° \,.\, 27{,}17\angle 6{,}34° - 381\angle -90° \,.\, 19{,}10\angle 174°$$

$$\Delta_{RS} = 7576{,}3 - j1105{,}8 = 7656{,}6\angle -8{,}3°$$

$$\Delta_{ST} = \begin{vmatrix} 33{,}14\angle 5{,}19° & 381\angle 30° \\ 19{,}10\angle 174° & 381\angle -90° \end{vmatrix} = 381\angle -90° \,.\, 33{,}14\angle 5{,}19° - 381\angle 30° \,.\, 19{,}10\angle 174°$$

$$\Delta_{ST} = 7794{,}2 - j9614{,}7 = 12377{,}08\angle -50{,}97°$$

$$\dot{I}_{RS} = \frac{\Delta_{RS}}{\Delta} = \frac{7656{,}6\angle -8{,}3°}{584{,}09\angle 26°} = 13{,}10\angle -34{,}3°$$

$$\dot{I}_{ST} = \frac{\Delta_{ST}}{\Delta} = \frac{12377{,}1\angle -50{,}97°}{584{,}09\angle 26°} = 21{,}19\angle -76{,}96°$$

Las corrientes de línea serán:

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{RS} = 13{,}10\angle -34{,}3° \ A$$

$$\dot{I}_T = -\dot{I}_{ST} = -21{,}19\angle -76{,}96° \ A = 21{,}19\angle 103{,}04° \ A$$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_{ST} - \dot{I}_{RS} = 21{,}19\angle 103{,}04° - 13{,}10\angle -34{,}3° = 14{,}57\angle -114{,}53° \ A$$

Se debe cumplir la ley de Kirchhoff en el nodo **o** ⇒ $\dot{I}_R = \dot{I}_S = \dot{I}_T = 0$

Con estas corrientes calculamos las tensiones en cada fase (Impedancia):

$$\dot{V}_{RO} = \dot{I}_R.\dot{Z}_A = 13{,}10\angle -34{,}3° \,.\, (14 + j5) = 13{,}10\angle -34{,}3° \,.\, 19{,}1\angle 19{,}65°$$

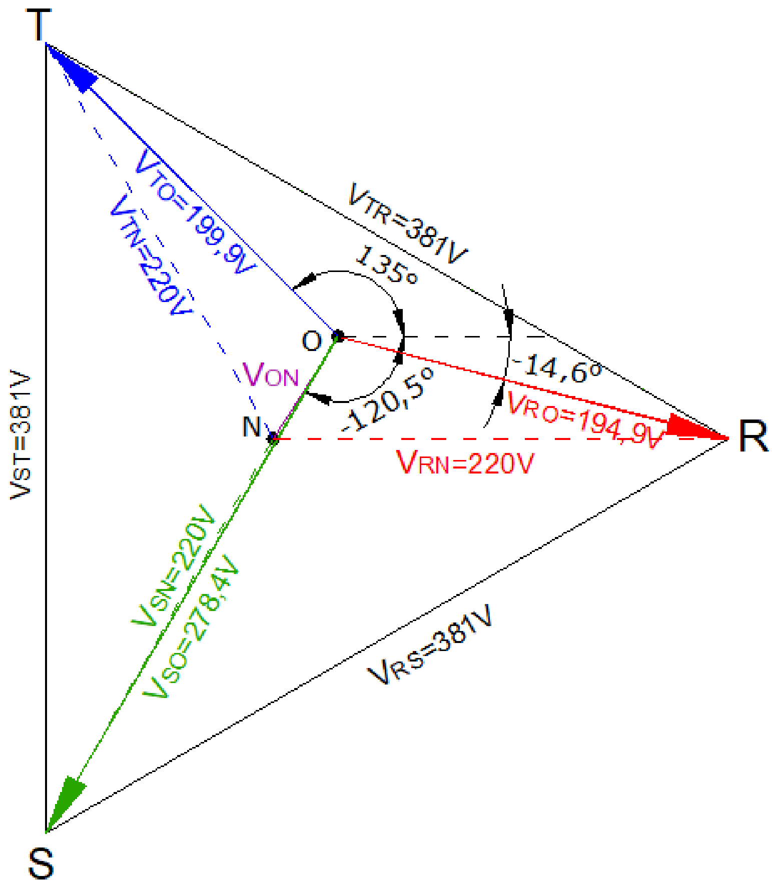
$$\dot{V}_{RO} = 194{,}87\angle -14{,}64° \ V$$

$$\dot{V}_{SO} = \dot{I}_S.\dot{Z}_B = 14{,}57\angle -114{,}53° \,.\, (19 - j2) = 14{,}57\angle -114{,}53° \,.\, 14{,}87\angle -6°$$

$$\dot{V}_{SO} = 278{,}41\angle -120{,}54° \ V$$

$$\dot{V}_{TO} = \dot{I}_T.\dot{Z}_C = 21{,}19\angle -103{,}04° \,.\, (8 + j5) = 21{,}19\angle -103{,}04° \,.\, 9{,}43\angle 32°$$

$$\dot{V}_{TO} = 199{,}9\angle 135{,}04° \ V$$



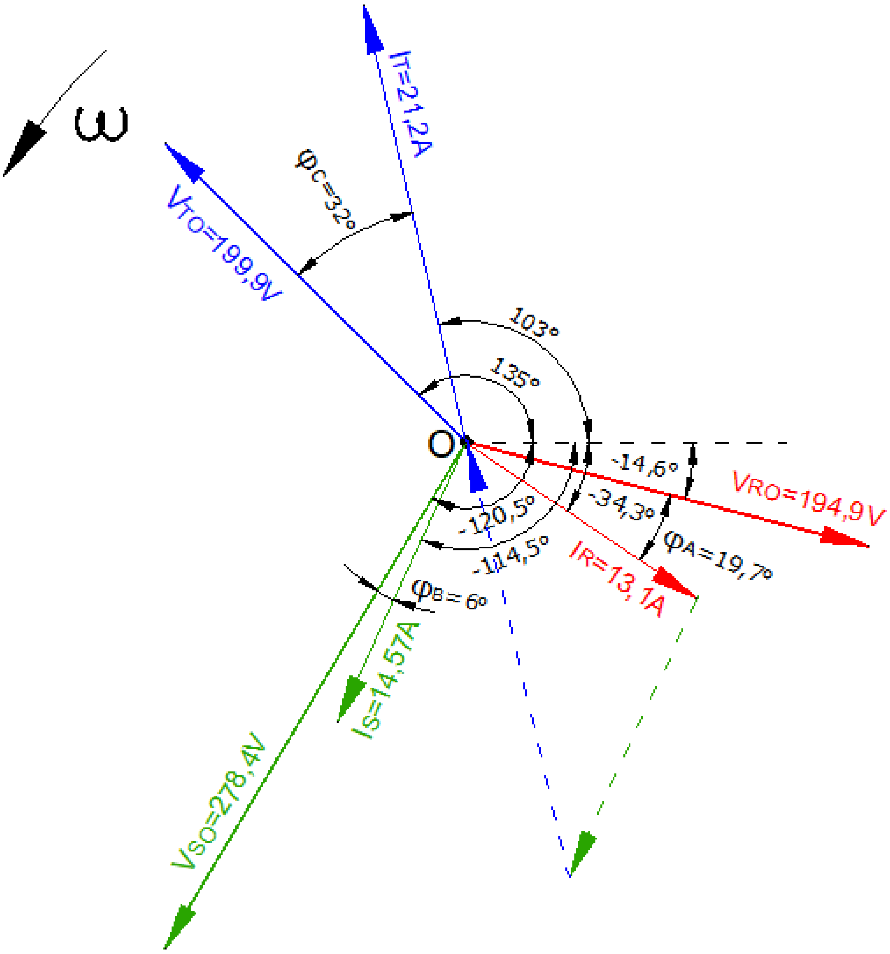
Se observa en el diagrama fasorial un desplazamiento del centro de la estrella respecto del punto neutro que llamamos Tensión de desplazamiento de Neutro **VON,** esta tensión es la que hace circular la corriente de neutro (corriente de desequilibrio) si este estuviera conectado.

Cálculo de la tensión de desplazamiento de Neutro:

$$\dot{V}_{RN} = \dot{V}_{ON} + \dot{V}_{RO} \quad \Rightarrow \dot{V}_{ON} = \dot{V}_{RN} - \dot{V}_{RO}$$

$$\dot{V}_{ON} = 220\angle 0° - 194{,}87\angle -14{,}64° = 220 - 188{,}54 + J49{,}27 = 31{,}46 + j49{,}27$$

$$\dot{V}_{ON} = 58{,}46\angle 57{,}44°\ V$$



Vemos en el diagrama fasorial el cumplimiento de la ley de Kirchhoff correspondiente a sumatoria de corrientes en el nodo **O** igual a cero. Se ha realizado la suma gráfica (método de la poligonal).

$$\dot{V}_{ON} = \frac{\dfrac{\dot{V}_{RN}}{\dot{Z}_A} + \dfrac{\dot{V}_{SN}}{\dot{Z}_B} + \dfrac{\dot{V}_{TN}}{\dot{Z}_C}}{\dfrac{1}{\dot{Z}_A} + \dfrac{1}{\dot{Z}_B} + \dfrac{1}{\dot{Z}_C}} = \frac{\dot{I}_N}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}$$

Con la tensión de desplazamiento podemos proceder a la inversa, calculando primero $\dot{V}_{RO} = \dot{V}_{RN} + \dot{V}_{ON}$; $\dot{V}_{SO} = \dot{V}_{SN} + \dot{V}_{ON}$; $\dot{V}_{TO} = \dot{V}_{TN} + \dot{V}_{ON}$ y con estas tensiones de fase determinamos las corrientes de fase, que son igual a las de línea.

Aplicando a este problema:

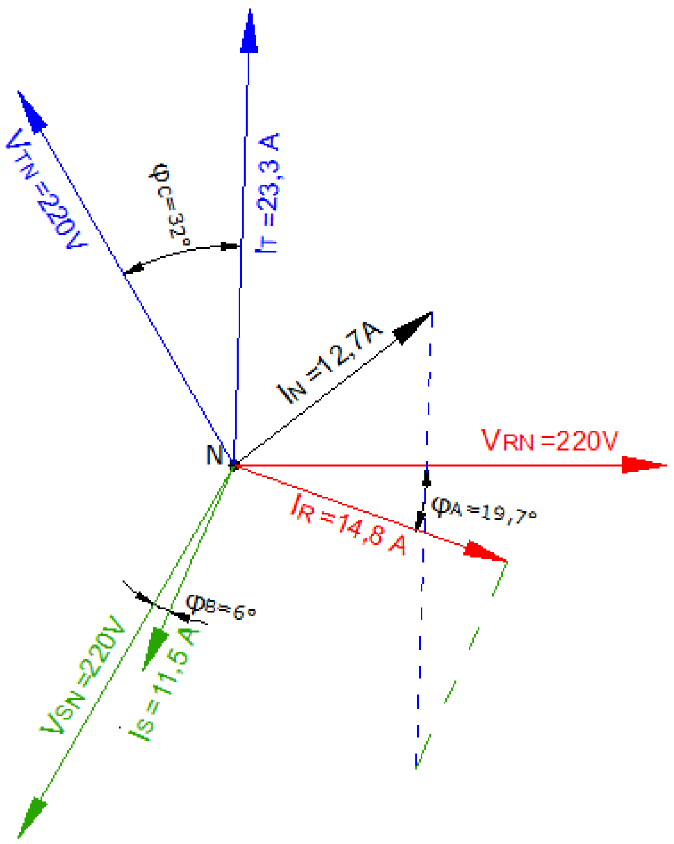
Calculamos las corrientes de Línea y fase en la estrella con neutro:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_{RN}}{\dot{Z}_A} = \frac{220\angle 0°}{14{,}87\angle 19{,}65°} = 14{,}80\angle -19{,}65° = 13{,}94 - j4{,}98$$

$$\dot{I}_S = \frac{\dot{V}_{SN}}{\dot{Z}_B} = \frac{220\angle -120°}{19{,}10\angle -6{,}01°} = 11{,}52\angle -113{,}99° = -4{,}68 - j10{,}52$$

$$\dot{I}_T = \frac{\dot{V}_{TN}}{\dot{Z}_C} = \frac{220\angle 120°}{9{,}43\angle 32°} = 23{,}32\angle 88° = 0{,}82 + j23{,}31$$

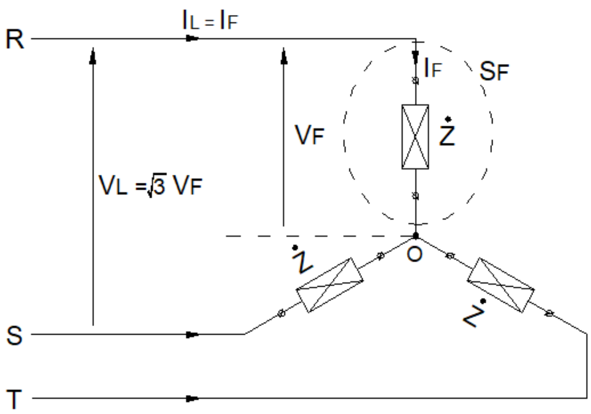
$$\dot{I}_N = \dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = (13{,}94 - 4{,}68 + 0{,}82) + j(-4{,}98 - 10{,}52 + 23{,}31)$$
$$\dot{I}_N = 10{,}07 + j7{,}81 = 12{,}74\angle 37{,}79°\ A$$

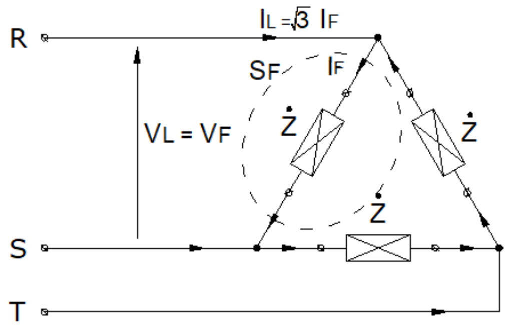


$$\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C = \frac{1}{14{,}87\angle 19{,}65°} + \frac{1}{19{,}10\angle -6{,}01°} + \frac{1}{9{,}43\angle 32°} =$$
$$\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C = -0{,}0633 - j0{,}0226 + 0{,}052 + j0{,}0055 + 0{,}090 - j0{,}056$$
$$\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C = 0{,}02533 - j0{,}0733 = 0{,}218\angle 19{,}66°\ \mathrm{S}$$

$$\dot{V}_{ON} = = \frac{12{,}74\angle 37{,}79°\ A}{0{,}218\angle 19{,}66°\ \mathrm{S}} = 58{,}46\angle 57{,}44°\ V$$

Potencia trifásica en cargas equilibradas





Estrella	Triángulo
$S_F = V_{F\,.}\, I_F$	$S_F = V_{F\,.}\, I_F$
$S_{Tot} = 3\,.\,S_F = 3\,V_{F\,.}\,I_F$	$S_{Tot} = 3\,.\,S_F = 3\,V_{F\,.}\,I_F$
$S_{Tot} = 3\,.\dfrac{V_L}{\sqrt{3}}.\,I_L$	$S_{Tot} = 3\,.\,V_L.\dfrac{I_L}{\sqrt{3}}$
Racionalizando	Racionalizando
$S_{Tot} = \sqrt{3}\,.V_L\,.\,I_L$	$S_{Tot} = \sqrt{3}\,.V_L\,.\,I_L$

Observamos que para cargas equilibradas la potencia se calcula de igual forma, tanto para cargas en Estrella como en Triángulo.

$$S_{Tot} = \sqrt{3}\,.V_L\,.\,I_L$$

$$P_{Tot} = S_{Tot}.cos\varphi = \sqrt{3}\,.V_L\,.\,I_L\,.cos\varphi$$

$$Q_{Tot} = S_{Tot}.sen\varphi = \sqrt{3}\,.V_L\,.\,I_L\,.sen\varphi$$

$$I_L = \frac{P_{Tot}}{\sqrt{3}\,.V_L\,.cos\varphi}$$

Potencia trifásica en cargas desequilibradas

Si las cargas son desequilibradas las potencias serán distintas, entonces para obtener la total deberemos hacer necesariamente la suma de las potencias de las tres fases y esta suma debe ser vectorial.

$$\dot{S}_{Tot} = \dot{S}_R + \dot{S}_S + \dot{S}_T$$

$$\dot{S}_{Tot} = S_R.cos\varphi_R + j\ S_R.sen\varphi_R + S_S.cos\varphi_S + j\ S_S.sen\varphi_S + S_T.cos\varphi_T + j\ S_T.sen\varphi_T$$

O lo que es más usual para los datos con que se cuenta

$$\dot{S}_{Tot} = P_R + j\ P_R.tg\varphi_R + P_S + j\ P_S.tg\varphi_S + P_T + j\ P_T.tg\varphi_T$$

$$\dot{S}_{Tot} = P_R + j\ Q_R + P_S + j\ Q_S + P_T + j\ Q_T$$

$$\dot{S}_{Tot} = (P_R + P_S + P_T) + j(Q_R + Q_S + Q_T)$$

$$\dot{S}_{Tot} = P_{Tot} + j\ Q_{Tot}$$

$$\dot{S}_{Tot} = \sqrt{{P_{Tot}}^2 + {Q_{Tot}}^2}\ \angle\ arctg\left(\frac{Q_{Tot}}{P_{Tot}}\right)$$

El ángulo que se obtiene y por lo tanto su coseno será el promedio ponderado de los tres ángulos de fase si estos fueran distintos.

$$arctg\left(\frac{Q_{Tot}}{P_{Tot}}\right) = \varphi_{Tot} \quad \text{Promedio}$$