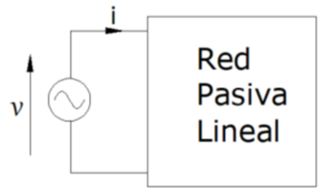
## Potencia en régimen senoidal permanente

A la rapidez con que se produce o se consume una energía eléctrica en un circuito, se la denomina **Potencia eléctrica** del generador o del receptor de carga. Es una magnitud que caracteriza la importancia (tamaño, costo) de todos los elementos que constituyen el mismo (Alternador, transformador, motores, líneas, interruptores, etc.)

A tal efecto, consideremos una red pasiva lineal energizada por una fuente de corriente alterna $v$ (Fig. 1).

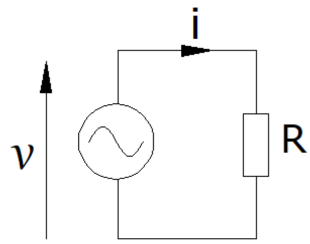



(Fig. 1: Red pasiva genérica)

Según lo visto la corriente $i$ que la recorre también es alterna y su intensidad depende de las características y conexiones de los elementos que la integran. Por consiguiente la potencia instantánea de la red será: $p = v\,.\,i$

La potencia adquirirá valores (**+**) y (**–**) , según que $v$ e $i$ tengan igual sentido o sentido contrario. Cuando **p** es (**+**)**,** consideramos que es suministrada por la fuente y transformada por la red en **potencia irreversibl**e (calor, movimiento, etc.) y **reversible** (campos eléctricos y magnéticos); y **p** es (–) cuando la red devuelve a la fuente la potencia reversible.

**POTENCIA EN UN RESISITOR**




(Fig. 2: Red Resistiva)

Supongamos que la red pasiva contiene solamente un resistencia pura **R** como se ve en la figura 2.

Si la tensión de la fuente es: $v = \hat{V}\,.\sin(\omega.t)$

La corriente será: $i = \hat{I}\,.\sin(\omega.t)$ donde $\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R}$

Por lo tanto la potencia instantánea vale: $p = v\,.\,i = \hat{V}\,.\,\hat{I}\,.\sin^2(\omega.t)$

*Recordando la identidad trigonométrica que dice*: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

Entonces la función de potencia puede escribirse como: $p = \hat{V}.\hat{I}.\left(\frac{1-\cos(2.\omega.t)}{2}\right)$

$$p = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2} - \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}.\cos(2.\omega.t) = \frac{\hat{P}}{2} - \frac{\hat{P}}{2}.\cos(2.\omega.t)$$

Expresión que muestra un término constante y otro armónico de pulsación doble.

La gráfica de **p(t)** se obtiene fácilmente trazando primero las funciones de **$v$(t)** e **$i$(t)** y efectuando el producto de ambas instante a instante y representándola gráficamente ver figura 3.

Se observa así que la gráfica de **p(t)** no es otra que la del término cosenoidal de pulsación doble desplazada verticalmente una cantidad igual al término constante $\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}$.

Como **p** en este caso, es siempre (+) (oscila entre cero para ω.t = 0, π, 2π....... y $\hat{V}.\hat{I}$ para ω.t = π/2, 3π/2.......

La potencia es suministrada constantemente por la fuente y transformada en calor por el resistor.

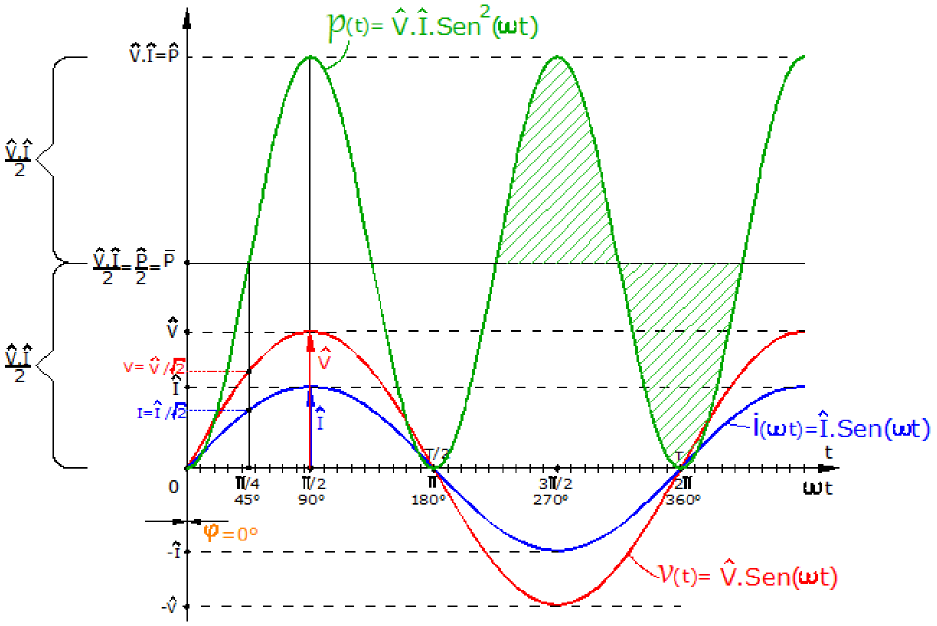
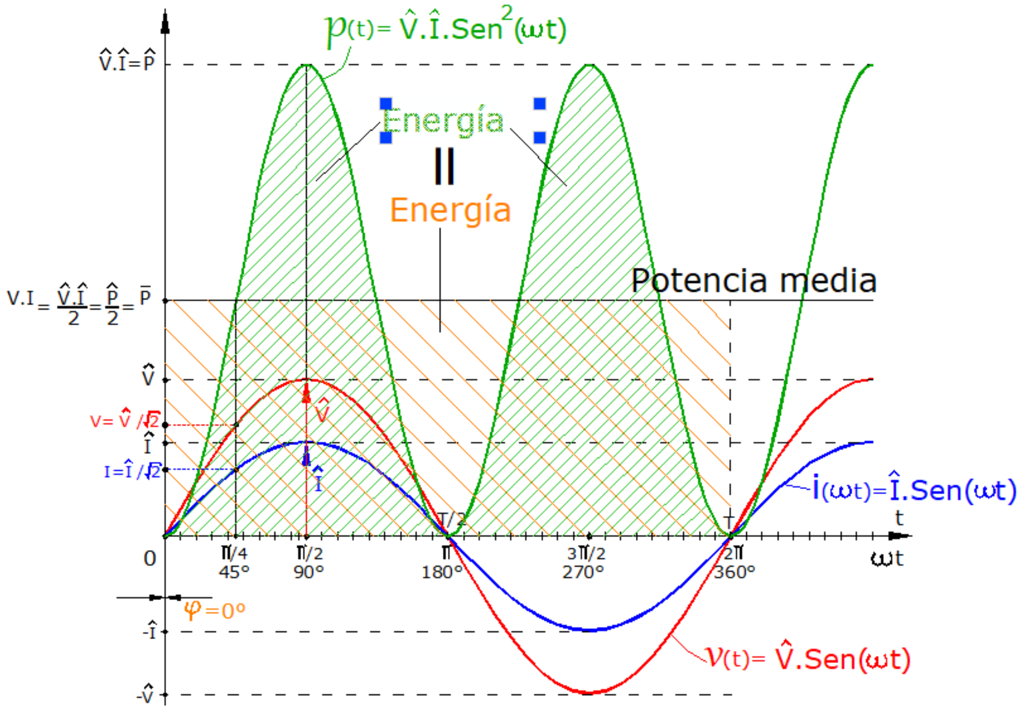



Fig. 3: Función de potencia en un resistor puro.

**Potencia media**




El área debajo de la función de potencia representa la energía consumida en un período, por el resistor (tramado verde), debe ser igual al área debajo del valor constante que representa la potencia media (tramado anaranjado).

El valor medio de la potencia, en un período de la misma que dura T/2 [seg] o π [rad], es denominada como Potencia Activa.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{\omega.T} \cdot \int_0^{\omega.T} p(\omega t)\, d\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left[\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2} - \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}\cos(2.\omega.t)\right] d\omega t \;\Rightarrow$$

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2} \int_0^{\pi} [1 - \cos(2.\omega.t)]\; d\omega t = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi} \left[\int_0^{\pi} d\omega t - \int_0^{\pi} \cos(2.\omega.t)\, d\omega t\right]$$

$$\bar{P} = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}\left[|\omega.t|_0^{\pi} - |\sin(2.\omega.t)|_0^{\pi}\right] = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}[\pi - 0] \Rightarrow \bar{P} = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}$$

Si aplicamos la relación entre valor máximo y eficaz para una onda senoidal: $\bar{P} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}.\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = V.I$

Es decir, la potencia activa viene dada por el producto del valor eficaz de la tensión por el valor eficaz de la corriente, de forma similar que en un circuito de C.C.
Entonces la potencia media consumida define el valor eficaz de la tensión y la corriente.
Y también vimos que para una resistencia: V = R . I
Y la potencia: $P = V . I = R . I^2 = V^2 / R$
La potencia activa se expresa en **Watt** [W] y en un circuito con resistencia pura puede medirse en forma indirecta con un voltímetro y un amperímetro de C.A. y en forma directa con un watímetro.

Como la potencia es proporcional a la tensión o la corriente al cuadrado para determinar el valor de la tensión eficaz, elevamos por ej. la tensión instantánea al cuadrado, de dicha función obtenemos el valor medio $\frac{\hat{V}^2}{2}$ por integración de la función en un período, dividiendo por tal período y luego radicando dicho valor medio.
Vemos que el valor obtenido es el que alcanza la función de tensión en T/8 [seg] o π/4 [rad]
Y el $\sin\left(\pi/_4\right) = 0{,}707 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que representa el factor por el que se debe dividir el valor máximo, para hallar el valor eficaz de la tensión o la corriente en un circuito en régimen senoidal.
Este factor $\sqrt{2}$ se denomina factor de amplitud.

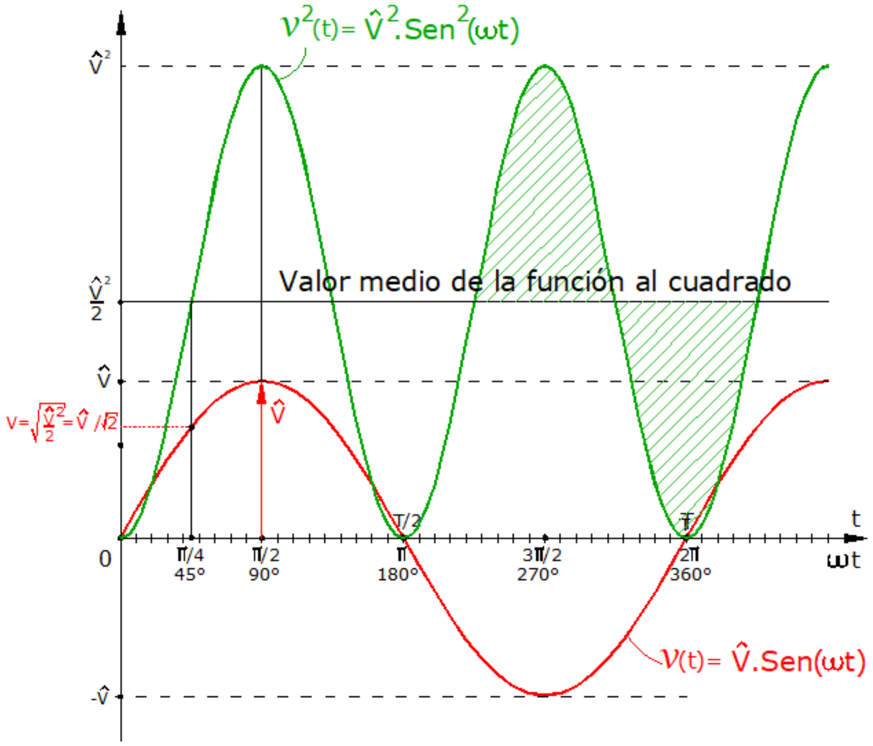
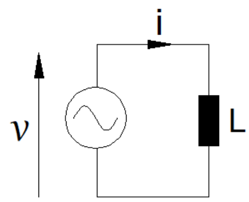



Fig. 4: Función de tensión al cuadrado, proporcional a la potencia.

## POTENCIA EN UN INDUCTOR




Si la red pasiva contiene solamente una inductancia, cuando es excitada por una tensión alterna senoidal: $v = \hat{V} . \sin(\omega.t)$

La corriente vale: $i = -\hat{I}\,.\cos(\omega.t) = \hat{I}\,.\operatorname{sen}(\omega.t - \frac{\pi}{2})$;

donde $\hat{I} = \frac{\hat{V}}{X_L}$ y $X_L = \omega\,.L$

(Fig. 5: Red inductiva)

Entonces la potencia instantánea resulta: $p = v\,.i = -\hat{V}\,.\hat{I}\,.\operatorname{sen}(\omega.t)\,.\cos(\omega.t)$

*Recordando la identidad trigonométrica que dice*: $\operatorname{sen}\alpha\,.\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}$

La función de potencia puede escribirse como: $p = -\hat{V}.\hat{I}.\left(\frac{\operatorname{sen}(2.\omega.t)}{2}\right) \Rightarrow p = -\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}.sen(2.\omega.t)$

Se puede ver que desapareció el término constante quedando solo una armónica de pulsación doble que la tensión y la corriente.

La gráfica de **p(t)** se obtiene trazando la **v(t)** e **i(t)** y multiplicándolas instante a instante, representando en el gráfico de la figura 6 dicho producto.

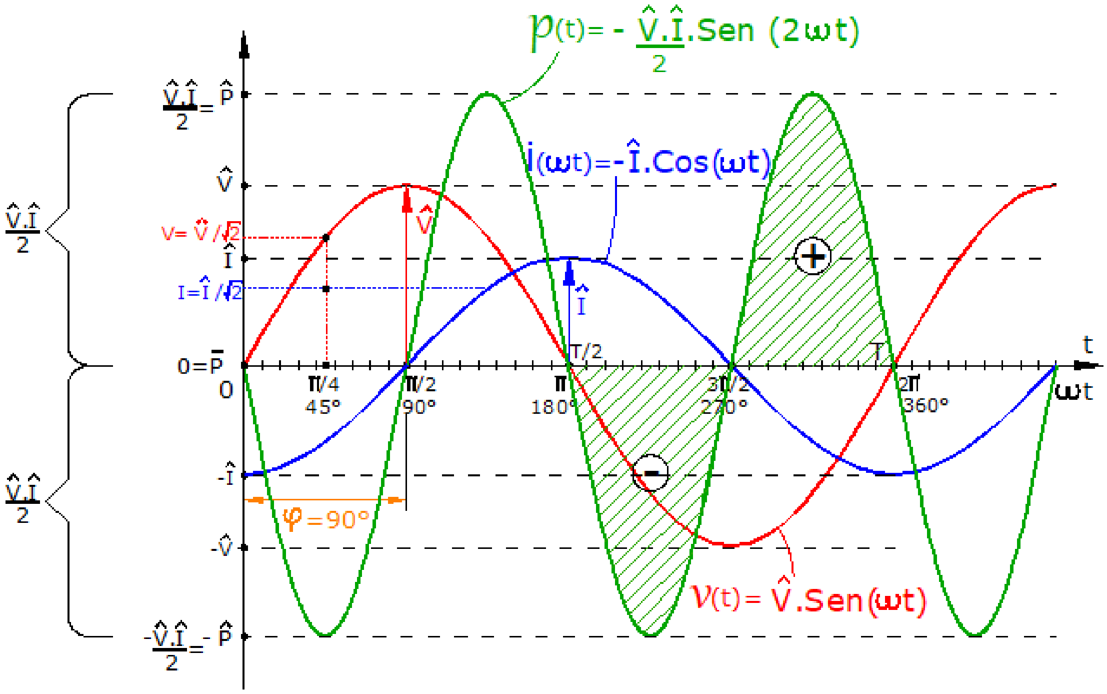



Fig. 6: Función de potencia en un inductor puro.

Se ve así que la potencia cambia de signo cada cuarto período de la tensión o la corriente y oscila entre $-\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}$ para ω.t = π/4, 5π/4……. y $+\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}$ para ω.t = 3π/4, 7π/4…….

Cuando la potencia es (+), es suministrada por la fuente y la inductancia la almacena en su campo magnético. Y cuando es (-), el campo se extingue y la inductancia le devuelve la potencia a la fuente.

La potencia activa que es equivalente al valor medio de la potencia p(t), resulta:

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi}\,.\int_0^{\pi} -\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}.\operatorname{sen}(2.\omega.t)\,d\omega t = -\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(2.\omega.t)\,d\omega t = -\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}\,\left|-\cos(2.\omega.t)\right|_0^{\pi}$$

$$\bar{P} = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}\,\left|\cos(2.\omega.t)\right|_0^{\pi} = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}(\cos 2\pi - \cos 0) = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}(1-1) \Rightarrow \bar{P} = 0$$

Como la potencia media da nula, para poder caracterizar el constante intercambio de energía entre la fuente y la red, se define la **Potencia Reactiva** designada con la letra **Q**, mediante el valor máximo de la p(t), o sea: $Q = \frac{\hat{V}.\,\hat{I}}{2} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}}.\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = V.I$

Entonces en un inductor puro el producto entre la tensión y la corriente eficaces nos dará una potencia que denominamos reactiva.

Además recordando que: $V = X_L \,.\, I$

Esta potencia puede escribirse también: $Q = V.\, I = X_L \,.\, I^2 = V^2/X_L$

La unidad de **Q** es lógicamente el W, pero para distinguirla de la potencia activa se expresa en **volt amper reactivos** [Var]. Para el caso del inductor la Potencia Reactiva se denominará inductiva.

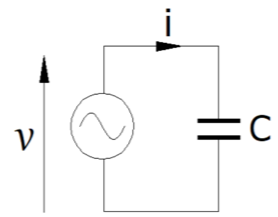
En un circuito con inductancia pura, la potencia reactiva puede medirse en forma indirecta con un voltímetro y un amperímetro de C.A. y en forma directa con un **varímetro** (instrumento que deriva del watímetro).

## POTENCIA EN UN CAPACITOR

Si la red pasiva contiene solamente una inductancia, cuando es excitada por una tensión alterna senoidal: $v = \hat{V}\,.\sin(\omega.t)$

La corriente vale: $i = \hat{I}\,.\cos(\omega.t) = \hat{I}\,.\,\mathrm{sen}(\omega.t + \frac{\pi}{2})$;

donde $\hat{I} = \frac{\hat{V}}{X_C}$ y $X_C = 1\,/(\omega\,.\,C)$




(Fig. 7: Red capacitiva pura.)

Entonces la potencia instantánea resulta: $p = v\,.\,i = \hat{V}\,.\,\hat{I}\,.\,\mathrm{sen}(\omega.t)\,.\cos(\omega.t)$

*Recordando la identidad trigonométrica que dice*: $\mathrm{sen}\,\alpha\,.\,cos\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}$

La función de potencia puede escribirse como: $p = \hat{V}.\hat{I}.\left(\frac{\mathrm{sen}(2.\omega.t)}{2}\right) \Rightarrow p = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}.sen(2.\omega.t)$

Se puede ver que desapareció el término constante quedando solo una armónica de pulsación doble que la tensión y la corriente.

La gráfica de p(t) se obtiene trazando la v(t) e i(t) y multiplicándolas instante a instante, representando en el gráfico de la figura 8 dicho producto.

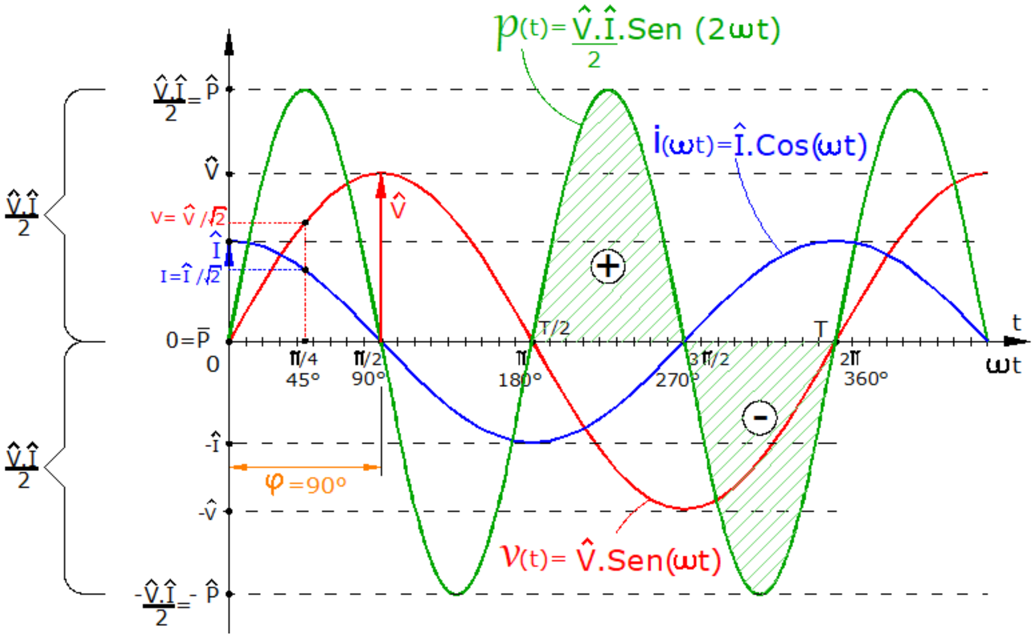



Fig. 8: Función de potencia en un capacitor puro.

Se ve así que la potencia cambia de signo cada cuarto período de la tensión o la corriente y oscila entre $\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}$ y $-\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}$

Cuando la potencia es (+), es suministrada por la fuente y la capacitancia la almacena en su campo eléctrico. Y cuando es (-), el campo se extingue y la capacidad le devuelve la potencia a la fuente.

La potencia activa que es equivalente al valor medio de la potencia p(t), resulta:

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi} . \int_0^\pi \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2} . \operatorname{sen}(2.\omega.t)\, d\omega t = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(2.\omega.t)\, d\omega t = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi} \left|-\cos(2.\omega.t)\right|_0^\pi$$

$$\bar{P} = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi} \left|-\cos(2.\omega.t)\right|_0^\pi = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}(-\cos 2\pi + \cos 0) = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}(-1+1) \Rightarrow \bar{P} = 0$$

Como la potencia media da nula, para poder caracterizar el constante intercambio de energía entre la fuente y la red, se define la **Potencia Reactiva** designada con la letra **Q**, mediante el valor máximo de la p(t), o sea: $Q = \frac{\hat{V}.\ \hat{I}}{2} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} . \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = V.I$

Entonces en un capacitor puro el producto entre la tensión y la corriente eficaces nos dará una potencia que denominamos reactiva, a la que además le agregamos el aditamento de capacitiva.
Además recordando que: $V = X_C . I$
Esta potencia puede escribirse también: $Q = V. I = X_C . I^2 = V^2/X_C$

La unidad de **Q** es lógicamente el W, pero para distinguirla de la potencia activa se expresa en **volt amper reactivos** [Var]. Para el caso del capacitor la Potencia Reactiva se denominará capacitiva.
En un circuito con capacitancia pura, la potencia reactiva puede medirse en forma indirecta con un voltímetro y un amperímetro de C.A. y en forma directa con un varímetro (instrumento que deriva del watímetro).

Podemos ver en las gáficas de p(t) que la inductancia comienza devolviendo energía a la fuente y el capacitor comienza consumiendo potencia de la fuente, entonces asumimos que sus efectos son opuestos, por lo tanto convendremos que la potencia reactiva inductiva es (+) y la potencia reactiva capacitiva es (-).

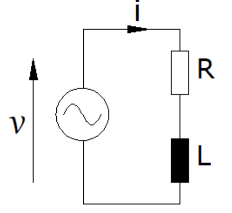
## POTENCIA EN UN R-L EN SERIE

Imaginemos ahora que la red está constituida por una conexión en serie de un resistor y un inductor (caso más frecuente en la práctica, porque la mayoría de los receptores de carga son inductivos). Ver Figura 9.

Si la tensión aplicada es senoidal: $v = \hat{V} . \sin(\omega.t)$

La corriente en este caso es senoidal desplazada: $i = \hat{I} . \operatorname{sen}(\omega.t - \varphi)$

donde $\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z}$; $Z = \sqrt{R^2 + {X_L}^2}$ ; $\varphi = arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)$



(Fig. 9)

En consecuencia, la potencia instantánea será:

$p = v . i = \hat{V} . \hat{I} . \operatorname{sen}(\omega.t) . \operatorname{sen}(\omega.t - \varphi)$

*Y aplicando la identidad trigonométrica que dice que*: $\sin\alpha . \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

Sobre la ecuación de p(t) antecedente: $p = \hat{V} . \hat{I} . \frac{1}{2} . [\cos(\omega.t - \omega.t + \varphi) - \cos(\omega.t + \omega.t - \varphi)]$

Quedando finalmente: $p = \frac{\hat{V}\,.\,\hat{I}}{2}.\,[\cos\varphi - \cos(2.\,\omega.\,t - \varphi)]$

Expresión que muestra la permanencia de un término constante y otro armónico de pulsación doble del tipo cosenoidal, pero desplazado verticalmente una cantidad equivalente al término constante

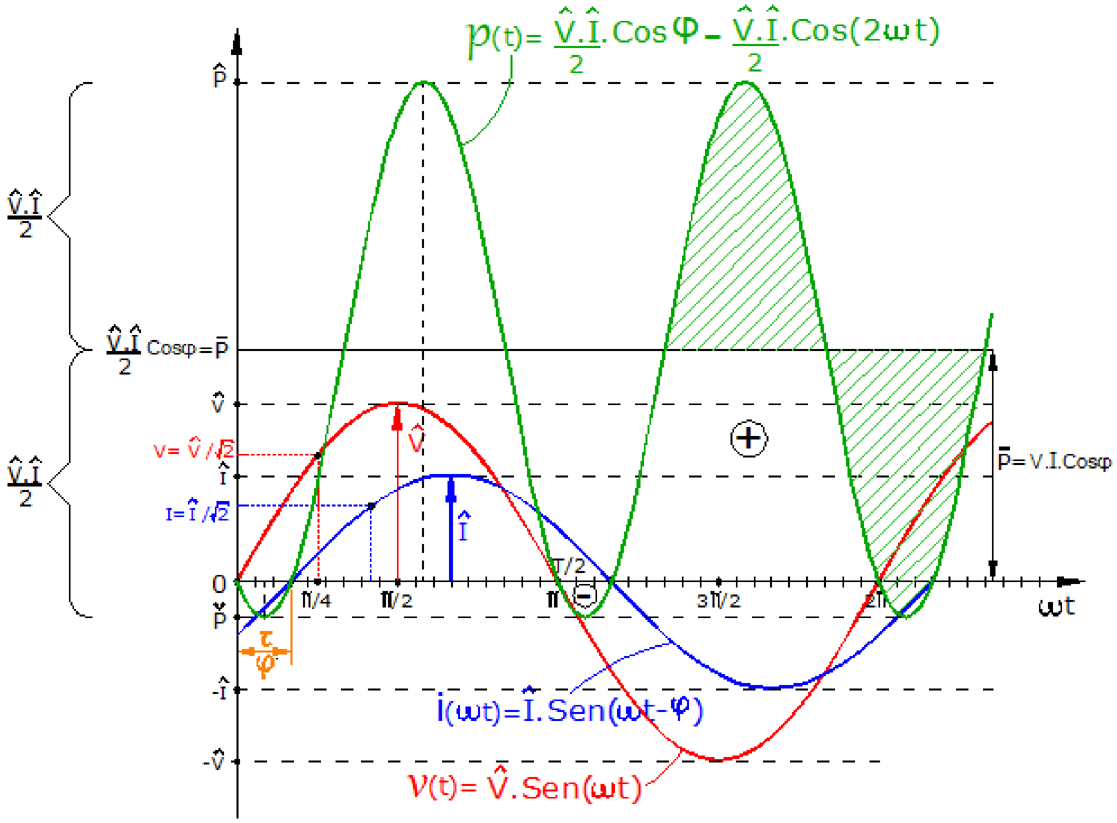



Fig. 10: Función de potencia para una combinación de R y L.

Como se ve en la figura 10, p(t) es una función que adquiere valores (-) en los intervalos: $0 < t < \tau$ y $\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} + \tau$ lapsos en los que el campo magnético almacenado devuelve energía a la fuente. Y adquiere valores (+) en los intervalos: $\tau < t < \frac{T}{2}$ y $\frac{T}{2} + \tau < t < T$ , lapsos en los que la red consume energía transformándola en calor y campo magnético.

**Potencia mínima**

La Potencia será mínima, cuando el término cosenoidal valga 1: $\cos(2.\,\omega.\,t - \varphi) = 1$

$2.\,\omega.\,t - \varphi = arccos(1) \quad \Rightarrow \quad 2.\,\omega.\,t - \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega.\,t = \frac{\varphi}{2}$

$$P_{min} = \check{P} = \frac{\hat{V}\,.\,\hat{I}}{2}.\left[\cos\varphi - \cos\left(2.\frac{\varphi}{2} - \varphi\right)\right] = \frac{\hat{V}\,.\,\hat{I}}{2}.\,[\cos\varphi - \cos(0)]$$

$$P_{min} = \check{P} = \frac{\hat{V}\,.\,\hat{I}}{2}.\,[\cos\varphi - 1] = -\frac{\hat{V}\,.\,\hat{I}}{2}.\,[1 - \cos\varphi]$$

*Recordando que:* $1 - cos\,\varphi = 2.\,sin^2\frac{\varphi}{2}$ , finalmente nos queda que: $P_{min} = \check{P} = \hat{V}\,.\,\hat{I}\,.\sin^2\frac{\varphi}{2}$

**Potencia máxima**

La Potencia será máxima, cuando el término cosenoidal valga -1: $\cos(2.\,\omega.\,t - \varphi) = -1$

$2.\,\omega.\,t - \varphi = arccos(-1) \quad \Rightarrow \quad 2.\,\omega.\,t - \varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad \omega.\,t = \frac{\pi+\varphi}{2}$

$$P_{max} = \hat{P} = \frac{\hat{V}\,.\,\hat{I}}{2}.\left[\cos\varphi - \cos\left(2.\frac{\pi+\varphi}{2} - \varphi\right)\right] = \frac{\hat{V}\,.\,\hat{I}}{2}.\,[\cos\varphi - \cos(\pi)]$$

$$P_{max} = \hat{P} = \frac{\hat{V}\ .\ \hat{I}}{2}.[\cos\varphi + 1] = \frac{\hat{V}\ .\ \hat{I}}{2}.[1 + \cos\varphi]$$

*Recordando que:* $1 + cos\,\varphi = 2.cos^2\frac{\varphi}{2}$ , finalmente nos queda que: $P_{max} = \hat{P} = \hat{V}\ .\ \hat{I}\,.\cos^2\frac{\varphi}{2}$

**Potencia media**

La potencia transferida desde la fuente a la red en forma de potencia activa es:

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi}.\int_0^{\pi} p(t)\,d\omega t = \frac{1}{\pi}.\int_0^{\pi}\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}.[\cos\varphi - \cos(2.\omega.t - \varphi)]\,d\omega t$$

$$\bar{P} = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}\left[\cos\varphi\int_0^{\pi} d\,\omega t - \int_0^{\pi}\cos(2.\omega.t - \varphi)\ d\omega t\right] = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}\left[\cos\varphi\ \left|\omega t\right|_0^{\pi} - 0\right]$$

$$= \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2.\pi}[\cos\varphi\ .\pi - 0]$$

La segunda integral no la resolvemos, porque sabemos que la integral definida en un período (Período de p(t) es π), en tanto función armónica es nula.

Resultando:

$$\bar{P} = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}.\cos\varphi = V\,.I\,.\cos\varphi$$

Esta ecuación muestra que la potencia es ahora el producto de 3 factores: la tensión aplicada, la corriente resultante, ambas en sus valores eficaces y el coseno del ángulo de desfasaje entre ambas.

Este último factor recibe el nombre de **Factor de Potencia** y se lo califica de inductivo o capacitivo, según corresponde a un circuito equivalente con L o con C.

Si la red está constituida por una **resistencia pura**, φ = 0 y Cos φ = 1 ⇒ P = V . I

Si la red está constituida por una **reactancia pura**, φ = ±π y Cos φ = 0 ⇒ P = 0

Resultados que ya obtuvimos en los análisis anteriores, o sea que esta expresión de potencia se constituye en una expresión general para todo tipo de circuitos.

Es fácil demostrar que, como en una resistencia pura, la potencia activa se transforma en calor en la resistencia equivalente de la red. En efecto, puesto que, como ya vimos: $V = Z\,.I$ y $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$, puede escribirse: $P = Z\,.I\,.I\,.\frac{R}{Z} = R\,.I^2$; igualdad que prueba lo aseverado.

Si la red contiene elementos que transforman la energía de la fuente, en energía mecánica, lumínica, química, etc. La potencia activa se convierte en ellas.

Como el **Cos φ** es adimensional, **P** sigue expresándose en Watt [**W**] y midiéndose directamente con un watímetro, pero ya no se puede establecer indirectamente con un amperímetro y un voltímetro, se necesitaría además un cosímetro que mida el desfasaje entre la corriente y la tensión.

Recordando que las corrientes y las tensiones activas valían:

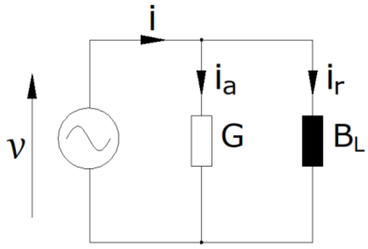
Ia = I Cos φ = V . G

Va = V Cos φ = I . R

La potencia activa puede escribirse también: P = V . I . Cos φ = V . Ia = $V^2$ . G = Va . I = $I^2$. R

Al igual que la impedancia y su triángulo correspondiente, es fácil intuir a partir de la expresión de potencia activa hallada, podamos construir y disponer las potencias en un triángulo rectángulo como el de la figura (13).

## POTENCIA REACTIVA




Descompongamos la corriente i que circula por la red, en su componente activa $i_a$, en fase con $\mathcal{V}$ y su componente reactiva ir en cuadratura y en atraso con $\mathcal{V}$, las cuales circulan respectivamente por la conductancia **G** y la susceptancia **$B_L$** del circuito equivalente en paralelo de la figura 11.

(Fig. 11: Red resistiva e inductiva en paralelo)

En la figura (12a) esto se ha hecho vectorialmente en correspondencia con las funciones armónicas figura (12b), partiendo de la corriente máxima del circuito $\hat{I}$ , para obtener los valores máximos de las componentes: $\hat{I}_a = \hat{I}\,.\cos\varphi \quad ; \quad \hat{I}_r = \hat{I}\,.\sin\varphi$

El valor instantáneo de las mismas será: $i_a = \hat{I}\,.\cos\varphi\ .\sin(\omega t) \quad ; \quad i_r = \hat{I}\,.\sin\varphi\,.\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

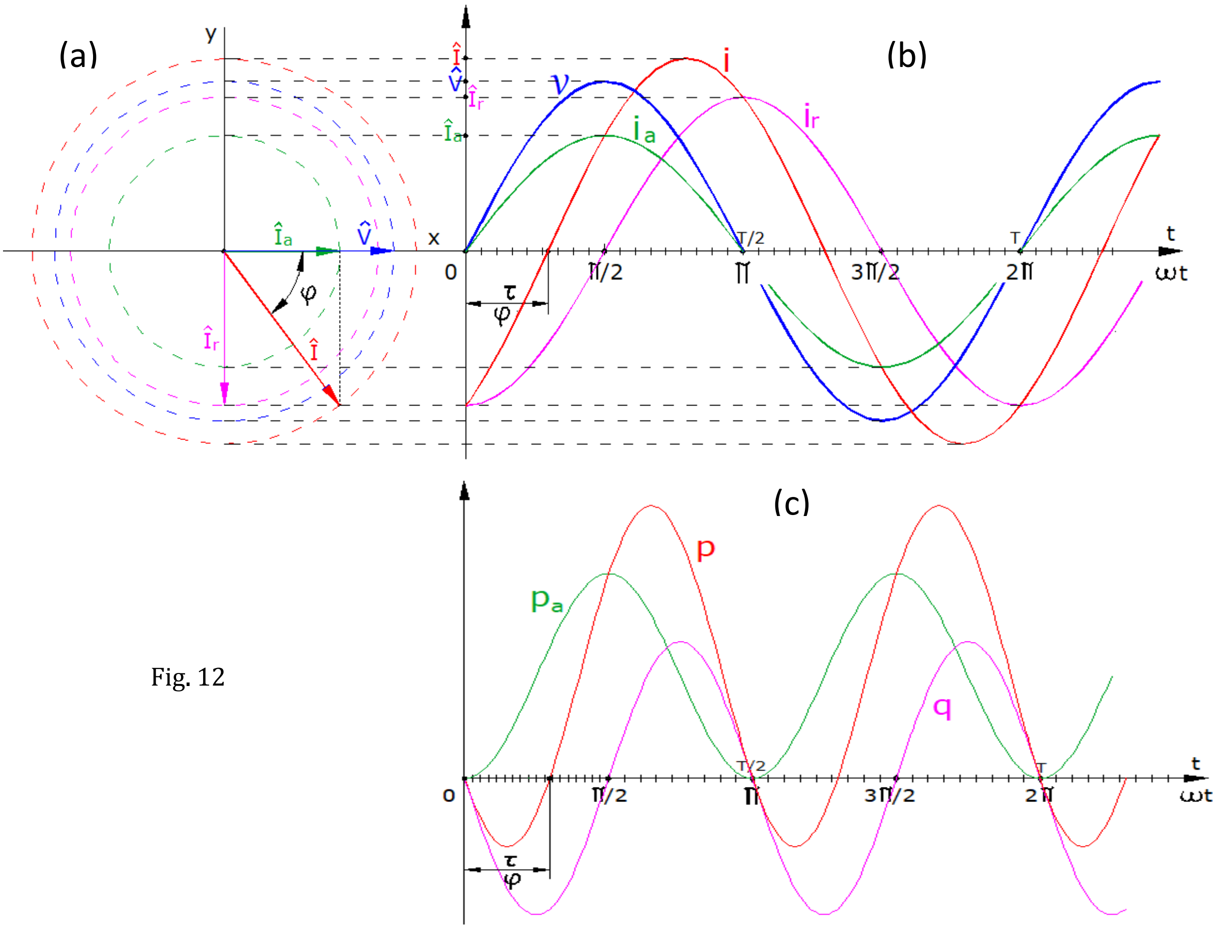



Fig. 12

Calculando ahora las potencias instantáneas correspondientes a la ia e ir: pa = $\mathcal{V}$ . ia y q = $\mathcal{V}$ . ir y representándolas gráficamente en la figura (c). La potencia instantánea p = $\mathcal{V}$ . i desarrollada en la red queda descompuesta en dos componentes similares respectivamente, a las que se obtuvieron cuando se supuso a la red una resistencia pura y una inductancia pura. Consecuentemente es evidente que la **ia** determina la **potencia activa** del circuito e **ir** el intercambio de energía entre la fuente y la red, es decir la **potencia reactiva**.

Puesto que la primera ya ha sido calculada, establezcamos la segunda del modo indicado anteriormente, por el valor instantáneo de **q**.

Entonces: $q = v\,.\,i_r \ = \hat{V}.\hat{I}.\sin\varphi\,.\sin(\omega t)\,.\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= -\hat{V}.\hat{I}.\sin\varphi\,.\sin(\omega t)\,.\cos(\omega t) = -\frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}.\sin\varphi\,.\sin(2.\omega t)$$

Ahora:

$$Q = \frac{\hat{V}.\hat{I}}{2}.\sin\varphi = V\,.\,I\,.\sin\varphi$$

El senφ recibe el nombre de factor reactivo.
Esta expresión de Q tiene característica general, puesto que:
Si la red está constituida por una **resistencia pura**, φ = 0 y Sen φ = 0 ⇒ Q = 0
Si la red está constituida por una **reactancia pura**, φ = ±π y Sen φ = 1 ⇒ Q = V . I
Recordando que en el circuito equivalente en serie: $V = Z\,.\,I$ y $\operatorname{sen}\varphi = \frac{X_L}{Z}$,
puede escribirse: $Q = Z\,.\,I\,.\,I\,.\frac{X_L}{Z} = X_L\,.\,I^2$; igualdad que prueba lo aseverado.
Haciendo intervenir las corrientes y las tensiones reactivas:

$Ir = I \text{ Sen } \varphi = V . B$
$Vr = V \text{ Sen } \varphi = I . X_L$

La potencia reactiva puede escribirse también: $Q = V . I . \text{Sen } \varphi = V . Ir = V^2 . B = Vr . I = I^2 . X_L$

En general para medir Q indirectamente podemos utilizar un amperímetro un voltímetro y un cosímetro y para medirla directamente un varímetro.

## POTENCIA APARENTE

En corriente alterna senoidal se denomina potencia aparente, al producto de la tensión eficaz aplicada al circuito por la corriente eficaz que ingresa al mismo y sale de la fuente, o sea: **S = V . I**
La potencia aparente determina el tamaño de las máquinas y aparatos eléctricos (Alternadores; Transformadores; Motores; Interruptores; etc.), porque a través de V se condicionan las dimensiones de sus circuitos magnéticos y aislaciones; y a través de I las de sus circuitos eléctricos.
Para distinguirla de la potencias activa y reactiva, la misma se expresa en **VoltAmper [VA]** y puede medirse siempre con un voltímetro y un amperímetro.
Escritas en función de **S**, las potencias activas y reactivas resultan:

P = S . Cos φ = V . I . Cos φ [W]
Q = S . Sen φ = V . I . Sen φ [VAr]

Por tanto en una **resistencia pura** con φ = 0 ⇒ P = S y Q = 0
Y en una **reactancia pura** con φ = ±π ⇒ P = 0 y Q = S

## TRIÁNGULO DE POTENCIAS

Elevando al cuadrado las expresiones de P y Q y sumándolas se obtiene que:
$P^2 = S^2 . \text{Cos}^2\, \varphi$
$Q^2 = S^2 . \text{Sen}^2\, \varphi$

Luego $P^2 + Q^2 = S^2 \overbrace{(\text{Cos}^2\, \varphi + \text{Sen}^2\, \varphi)}^{1}$

Igualdad que nos lleva a pensar que la potencia aparente puede representarse por la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son la potencia activa **P** y la reactiva **Q**. Y como P/S = Cos φ, el ángulo que forma la hipotenusa con el cateto adyacente de este triángulo es el ángulo de desfasaje **φ**.
Por convención vamos a adoptar $Q_L$ en dirección de las **y** (**+**) y $Q_C$ en dirección de las **y** (**-**).

Triángulo de potencia de un circuito inductivo (Q positiva)

Triángulo de potencia de un circuito capacitivo (Q negativa)

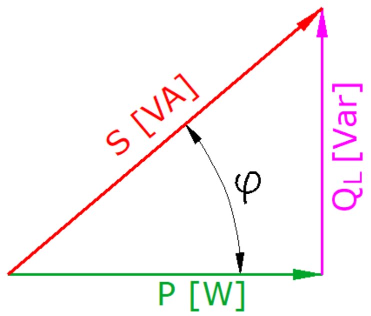
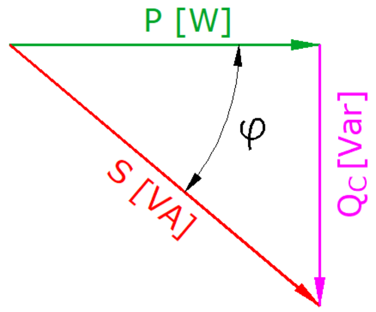



Fig. 13: Triángulos de potencia




Del triángulo de potencia se establecen las siguientes relaciones entre P, Q y S:

$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \Rightarrow \quad P = \sqrt{S^2 - Q^2} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2}$

P = S . Cos φ ⇒ S = P / Cos φ ⇒ Cos φ = P / S

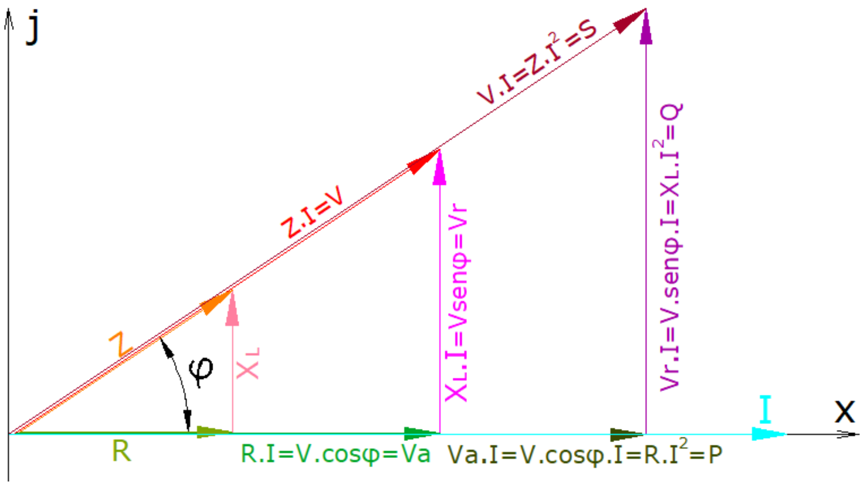
Q = S . Sen φ ⇒ S = Q / Sen φ ⇒ Sen φ = Q / S

Q = P . Tg φ ⇒ P = Q / Tg φ ⇒ Tg φ = Q / P

El triángulo de potencia es semejante al de impedancias y de tensiones, así como el de admitancias y de corrientes como se ve en la figura (14 y 15).

Deducción del triángulo de potencias partiendo del triángulo de ipedancias (para R-L en serie)

Fig. 14




Deducción del triángulo de potencias partiendo del triángulo de admitancias (para R-L en paralelo)

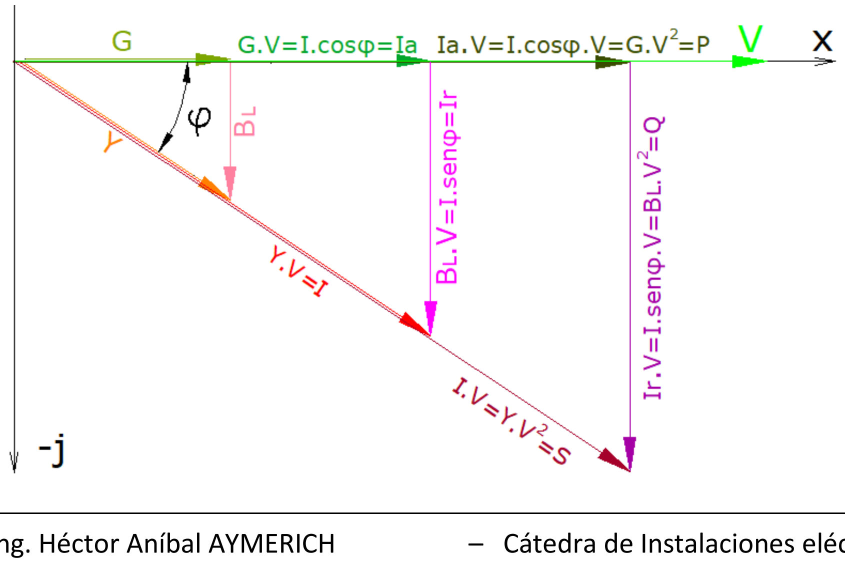
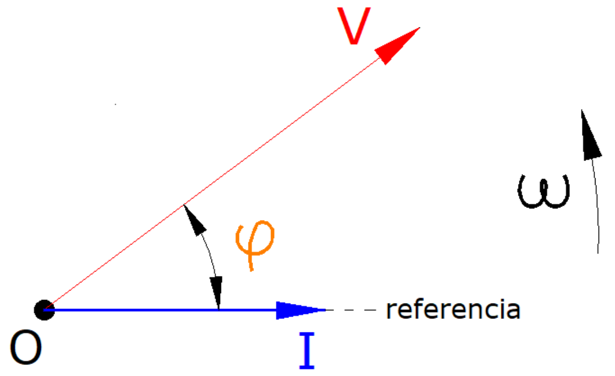



Fig. 15

**POTENCIA COMPLEJA**

Se denomina así a la potencia aparente calculada en base a las expresiones fasoriales o complejas de la tensión y la corriente y considerando para el receptor el convenio de que la potencia reactiva inductiva es (+).
Según la posición del sistema de fasores respecto de la referencia podemos tener las siguientes situaciones, por ej. para una carga inductiva:

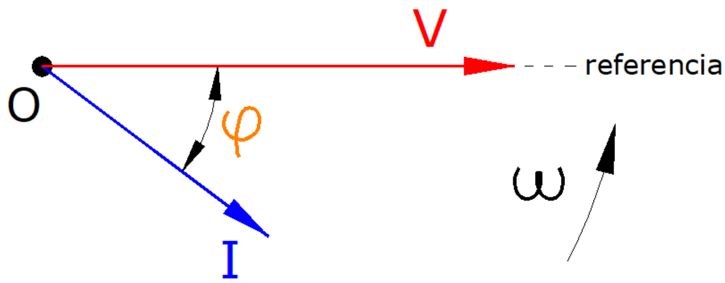
a) Diagrama fasorial con la corriente sobre la posición de referencia




$$\dot{V} = V \angle \varphi$$
$$\dot{I} = I \angle 0°$$

$$\dot{S} = \dot{V}.\dot{I} = V \angle \varphi . I \angle 0° = V.I\angle(\varphi + 0)$$
$$\dot{S} = \underbrace{V.I\angle \varphi}_{S} = \underbrace{V.I.cos\varphi}_{P} + j\,\underbrace{V.I.sen\varphi}_{Q}$$

b) Diagrama fasorial con la tensión sobre la posición de referencia




$$\dot{V} = V \angle 0°$$
$$\dot{I} = I \angle -\varphi$$

$$\dot{S} = \dot{V}.\dot{I} = V \angle 0° . I \angle -\varphi = V.I\angle(0° - \varphi)$$
$$\dot{S} = V.I\angle -\varphi = VI\cos(-\varphi) + j\,VI\,sen(-\varphi)$$
$$\dot{S} = \underbrace{V.I\angle(-\varphi)}_{S} = \underbrace{V.I.\cos\varphi}_{P} - j\,\underbrace{V.I.sen\varphi}_{Q}$$

Como observamos en el caso **a)** la potencia reactiva inductiva Q, dio (+) y en el **b)** dio (-), sin embargo se trato en ambos casos de la misma carga inductiva. Entonces para responder a la convención anterior y evitar los inconvenientes con los signos, haremos la siguiente concesión matemática: Multiplicaremos el fasor o expresión compleja de la tensión, por el conjugado de la corriente, lo que consiste en cambiarle el signo al argumento del fasor.

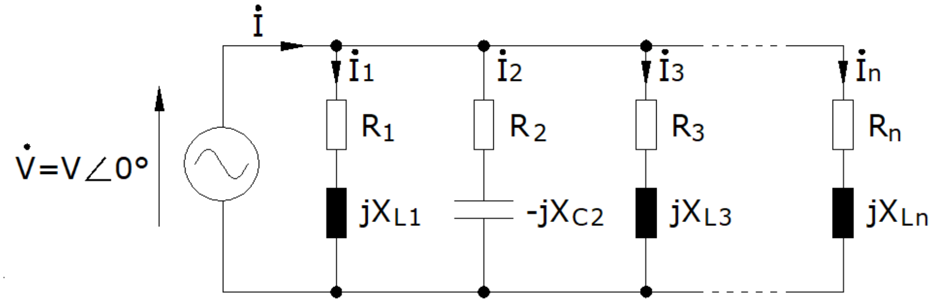
$$\dot{S} = \dot{V}.\dot{I}^*$$

Donde $\dot{I}^*$ es el fasor conjugado de $\dot{I}$
Entonces si $\dot{I} = I\angle(-\varphi) \;\Rightarrow\; \dot{I}^* = I\angle\varphi$

Esta expresión de la potencia compleja es general ya que si la aplicamos en el caso **a**) como la corriente está sobre la posición de referencia, entonces su argumento es cero, el conjugado sigue siendo el mismo y el resultado es correcto con Q (+) no cambia.

**Teorema de BOUCHEROT**

En todas las distribuciones de energía eléctrica los receptores se conectan en paralelo (ver figura 16). Cuando en un circuito existen varias impedancias en paralelo o incluso en serie, la sumatoria de potencias, se realiza indistintamente como una sumatoria de triángulos (suma vectorial).




$$\dot{I}_1 = I_1 \angle -\varphi_1$$
$$\dot{I}_2 = I_2 \angle +\varphi_2$$
$$\dot{I}_3 = I_3 \angle -\varphi_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{I}_n = I_n \angle -\varphi_n$$

Fig. 16

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 + \dot{S}_3 + \cdots \dot{S}_n$$

Aplicando la fórmula de la potencia compleja:

$$\dot{S}_1 = \dot{V}.\dot{I}_1^{\,*} = V.I_1\angle{+\varphi_1} = P_1 + j\,Q_1$$
$$\dot{S}_2 = \dot{V}.\dot{I}_2^{\,*} = V.I_2\angle{-\varphi_2} = P_2 - j\,Q_2$$
$$\dot{S}_3 = \dot{V}.\dot{I}_3^{\,*} = V.I_3\angle{+\varphi_3} = P_3 + j\,Q_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{S}_n = \dot{V}.\dot{I}_n^{\,*} = V.I_n\angle + \varphi_n = P_n + j\,Q_n$$

La potencia total será: $\dot{S} = (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n) + j(\,Q_1 - \ Q_2 + \ Q_3 + \cdots + Q_n)$
$\dot{S} = P \pm j\,Q$ según sea mayor $Q_L$ o $Q_C$.

Representamos gráficamente la suma de potencias:

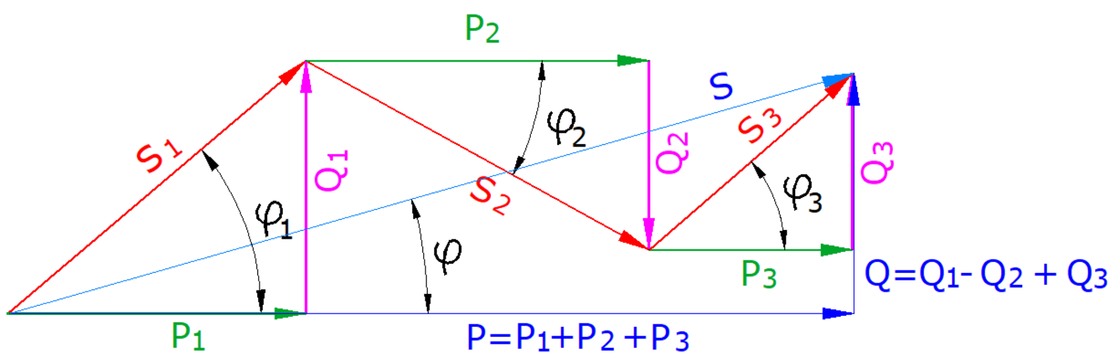



Fig. 17

Energéticamente el conjunte de receptores equivale a un receptor con una potencia aparente compleja:
$\dot{S} = P \pm j\,Q = S \angle \pm \varphi$ ; (+) si Q > 0 y (–) si Q < 0
Que sometido a una tensión $\dot{V} = V \angle 0°$ , toma una corriente cuya conjugada es: $\dot{I}^{*} = \frac{\dot{S}}{\dot{V}}$
y su fasor será entonces: $\dot{I} = \frac{\dot{S}^{*}}{\dot{V}^{*}} = \frac{S\,\angle\mp\varphi}{V\,\angle 0} = I \angle \mp \varphi$ ; (-) si Q > 0 y (+) si Q < 0