

## CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA Y TEMPERATURA

Vamos a estudiar las propiedades conductivas de la corriente eléctrica en diferentes materiales, pero centrándonos en los materiales metálicos. Es sabido que los metales son buenos conductores de la corriente eléctrica. ¿Por qué es esto?

Para comprender el por qué, debemos tener en cuenta algunas propiedades fisicoquímicas de estos materiales.

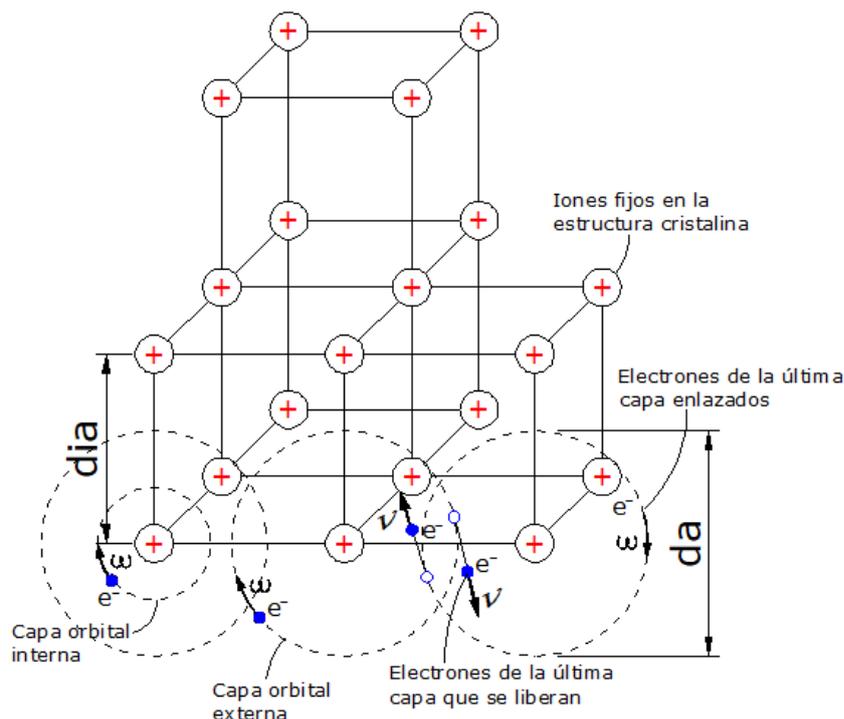
La corriente eléctrica como ya hemos definido, es el movimiento unidireccional o flujo de cargas eléctricas a través de la superficie transversal del un conductor. Esto quiere decir que para constituir una corriente eléctrica, es necesario contar con cargas eléctricas con la posibilidad de moverse.

### 1. Mecanismo de transporte de la carga eléctrica en los metales

El transporte de la carga eléctrica en un metal se realiza exclusivamente a través de los electrones libres que poseen niveles de energía elevados, correspondientes a la banda de conducción (Ver modelos de bandas de energía del átomo).

En un metal los electrones de conducción están conformados por los electrones de valencia (electrones de la última capa orbital que participan de los enlaces atómicos) y se hallan tan asociados con un ión como con cualquier otro, o sea que la ligazón con cualquier átomo individual es prácticamente nula. Según el metal, por lo menos uno y a veces dos o tres electrones por átomo están libres y se mueven por el interior del mismo en forma aleatoria (infinitas direcciones).

Esto se debe a que la estructura cristalina de los metales es tan densa (átomos muy próximos entre sí), que la distancia inter atómica (**dia**) es menor que el diámetro atómico (**da**); esto causa que las órbitas de los electrones externos se solapen y en algún momento un electrón pasa más cerca de un ión vecino que de su propio ión; generándose fuerzas eléctricas que rompen el equilibrio atómico ya que aumentan la energía de este electrón, que termina abandonando sus posiciones de equilibrio y se libera (Fig. 1).



$$d_{ia} < d_a$$

Fig. 1 – Estructura cristalina de los metales, por simplicidad se dibuja una estructura cúbica.

El cobre en realidad, como ninguno de los mejores conductores eléctricos, Plata, Oro y aluminio, posee esta estructura cristalina:

### 1.1. Caracterización del Cobre:

El cobre posee número atómico  $Z = 29$  y peso atómico relativo  $A = 63,546$ .

Esto significa que posee un núcleo con 29 Protones (de carga eléctrica +) y 34 Neutrones ( $63 - 29$ ) (de carga eléctrica nula). Y 29 electrones (de carga eléctrica -), distribuidos en cuatro capas orbitales: la primera con 2 e, la segunda con 8 e, la tercera con 18 e y la cuarta y última con 1 e; según la ley de distribución del " $2 \cdot n^2$ " con  $n =$  número de capa; progresión creciente siempre y cuando la última capa no posea más de 8 electrones y la penúltima más de 18 e.

Semejante al cobre es la plata, el oro y el aluminio en el hecho de tener una estructura cristalina cúbica de caras centradas y un solo electrón en la última capa la plata y el oro, el aluminio posee tres electrones en la última capa.

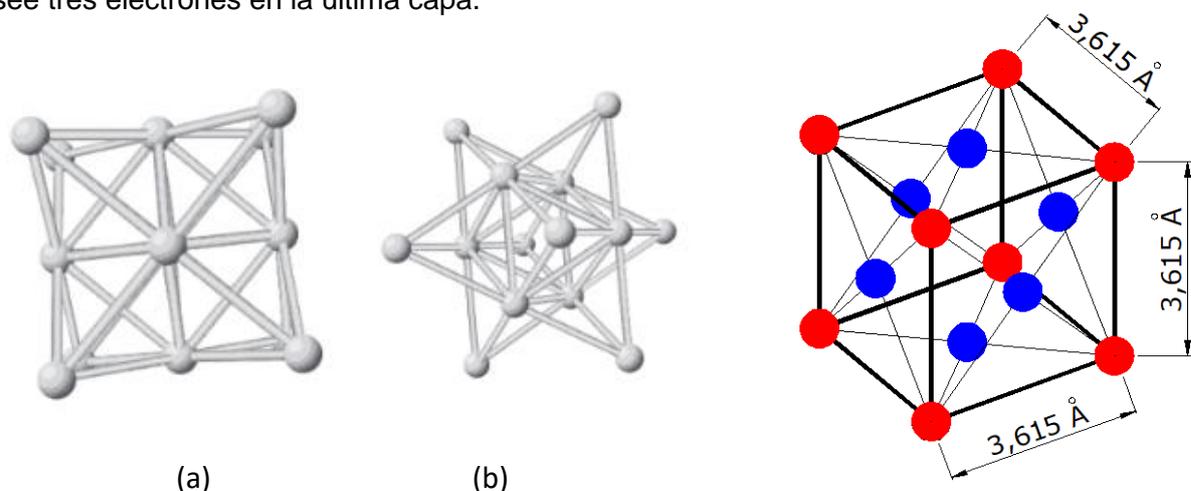
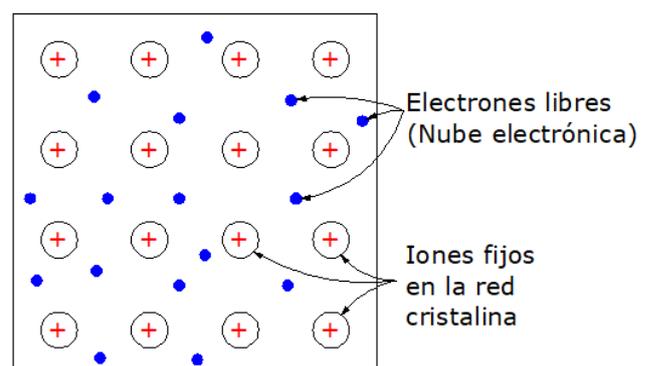


Fig. 2: Estructura cristalina del Cobre FCC (Face Centered Cubic) en la que se distinguen espacios tetraédricos. (a) Celda FCC vista frontal; (b) Celda FCC vista lateral.

En estos metales mencionados es altamente probable que el electrón de la última capa, se encuentre en el estado de indefinición energética descrito anteriormente y por lo tanto libre. Podemos ver en el esquema de la Fig. 3; en dos dimensiones y formato equivalente por simplicidad; la carga distribuida en el interior del metal. Con círculos y un signo (+) representamos los iones fijos de la red cristalina, que están formados por el núcleo más los electrones interiores enlazados o ligados a cada núcleo, dando una carga neta positiva. Y los puntos llenos representan a los electrones de valencia que se han liberado y se encuentran en estado de conducción (no ligados a ningún átomo en particular). De esta manera un metal puede ser considerado, como una red periódica tridimensional de iones pesados fijos en la red, fuertemente enlazados y regularmente distribuidos, rodeado de una nube de electrones que pueden moverse libremente dentro de ella.

Fig. 3: Distribución esquemática de los átomos de un metal monovalente, donde los puntos llenos representan el gas o nube electrónica y cada átomo a contribuido con un electrón a este gas.



## 1.2. Cálculo de la densidad atómica volumétrica del cobre o concentración atómica y de portadores de carga libre:

Calculamos la cantidad de átomos por unidad de volumen que hay en un cristal metálico de cobre:

$n_{at}$ : Concentración de átomos [At/cm<sup>3</sup>]

$A$ : Número másico [g/mol]

$\delta$ : Densidad del material [g/cm<sup>3</sup>]

$N_A$ : Número de Avogadro [At/mol]

$$n_{at} = N_A \cdot \delta / A \quad (1)$$

$$n_{at} = 6,022 \times 10^{23} \text{ [At/mol]} \cdot 8,96 \text{ [g/cm}^3\text{]} / 63,546 \text{ [g/mol]} = 8,5 \times 10^{22} \text{ [at/cm}^3\text{]}$$

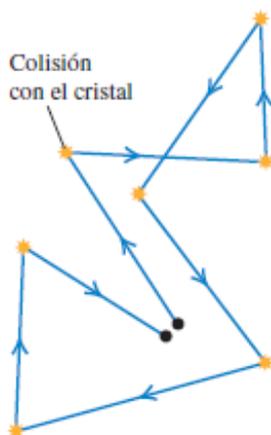
Como dijimos si cada átomo de cobre posee un electrón libre, entonces tendremos ahora una concentración de electrones libres o portadores de carga libres de:

$$n_e = 8,5 \times 10^{22} \text{ [e/cm}^3\text{]}$$

## 1.3. Características de la corriente eléctrica en un metal

De acuerdo con la teoría del gas electrónico de un metal, los electrones están continuamente en movimiento; la dirección de sus trayectorias cambia continuamente en cada colisión con los iones pesados, también al perder energía pasan nuevamente al estado de valencia (enlazados) y vuelven a liberarse. La distancia media entre colisiones se denomina recorrido libre medio. Como el movimiento es al azar, es probable que muchos electrones pasen por un área unitaria en una dirección y también en la opuesta, por lo tanto la corriente media es nula.

a) Trayectoria normal de un electrón en un cristal metálico *sin* campo interno  $E$



b) Trayectoria normal de un electrón en un cristal metálico *con* un campo interno  $E$

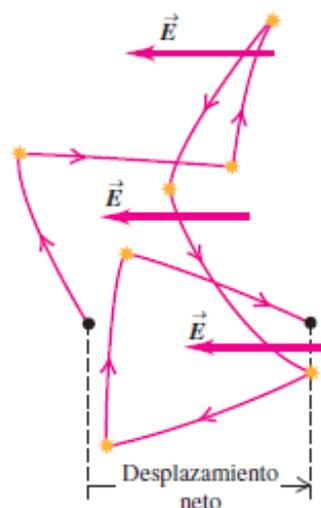


Fig. 4: Representación esquemática de los movimientos aleatorios de un electrón en un cristal metálico. (a) Con un campo eléctrico externo igual a cero; (b) Con un campo eléctrico externo que provoca deriva de los electrones.

Veamos ahora como cambia la situación, si se aplica a un metal un campo eléctrico  $E$  [V/m]. Como resultado de las fuerzas electrostáticas producto de la carga del electrón y la intensidad del campo, los electrones se aceleran y su velocidad crecería indefinidamente, si no fuera por las colisiones con los iones fijos de la estructura. En cada colisión inelástica el electrón pierde energía y la condición de equilibrio se alcanza para un valor finito de velocidad de desplazamiento  $v$  [m/s]; en promedio constante; a la que llamamos **velocidad de deriva**.

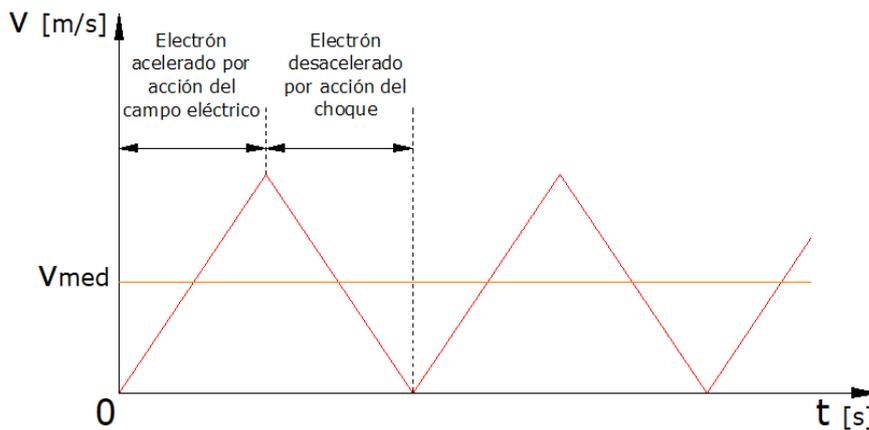


Fig. 5: Concepto de velocidad media.

Como se observa en la Fig 4 la velocidad de deriva es una componente de velocidad que se suma a los movimientos aleatorios del gas electrónico, resultando una tendencia de desplazamiento en el sentido opuesto al campo eléctrico.

Esta velocidad de desplazamiento es proporcional a la intensidad del campo eléctrico y la constante de proporcionalidad se llama **movilidad** del portador libre de carga  $\mu$ :

$$\mathbf{V} = \mu \cdot \mathbf{E} \quad \text{con } \mu [\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}] \quad (2)$$

Una buena analogía de como es el movimiento que estamos describiendo se observa en la Fig. 6.

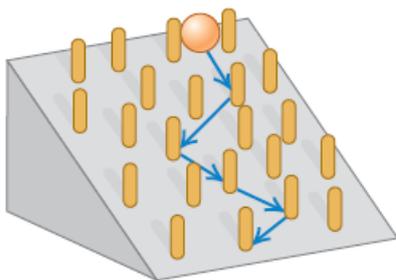


Fig. 6: Movimiento de una pelota que rueda (electrones) por un plano inclinado y rebota en las estacas (iones fijos) que encuentra en su camino.

Es de destacar que los choques no son físicos, sino de campos eléctricos, esto quiere decir que el electrón en su movimiento dirigido por el campo, se encuentra con otros electrones sujetos a los iones positivos, pero como también son negativos los campos eléctricos se rechazan y esto provoca la desaceleración del electrón.

En cada choque hay una pérdida de energía cinética que se transforma en calor, esto es lo que se denomina **efecto JOULE** y constituye la causa de que un conductor con corriente eléctrica se caliente.

#### 1.4. Ley de OHM y conductividad eléctrica

De acuerdo con la teoría anterior, el estado de equilibrio de la velocidad de desplazamiento (deriva) se sobrepone al del movimiento térmico al azar de los electrones. El flujo dirigido de los electrones por el campo eléctrico, constituye una corriente que es posible calcular de la siguiente

manera:  $I [A] = \frac{Q [C]}{t [s]} \quad (3)$

La cantidad de carga neta en movimiento es igual a la cantidad de carga elemental  $q$  (carga del electrón  $1,6 \times 10^{-19} [C]$ ) por el número de portadores libres de carga del material  $N$ , siendo este último el producto de la concentración de electrones libres por el volumen de material:

$$I[A] = \frac{N[e].q[C/e]}{t[s]} \quad (4)$$

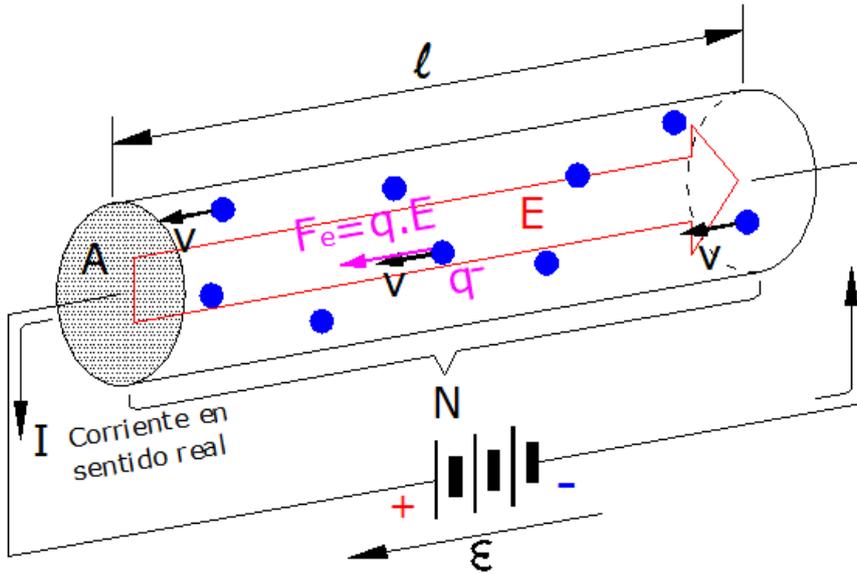


Fig.7: Densidad de corriente en un conductor metálico.

Ahora bien, como la velocidad promedio de desplazamiento de los electrones es:  $v = \frac{l[m]}{t[s]}$  (5)

Despejando el tiempo en (5) y reemplazando en (4):  $I[A] = \frac{N \cdot q \cdot v}{l}$  (6)

Definimos a la relación entre la corriente eléctrica y la sección de paso de los electrones, como la **Densidad de corriente J**:

$$J = I / A \quad \text{en [A/mm}^2] \quad (7)$$

Reemplazando (6) en (7):  $J[A] = \frac{N \cdot q \cdot v}{l \cdot A}$  (8)

y siendo  $l \cdot A$  el volumen del material, tenemos entonces la concentración de portadores libres de carga (electrones en un metal):  $n[e/cm^3] = \frac{N}{l \cdot A}$

Con  $n$ , la expresión (8) nos queda:  $J = n \cdot q \cdot v$  (9)

Si finalmente reemplazamos la velocidad por la ecuación (2), obtenemos:  $J = n \cdot q \cdot \mu \cdot E$  (10)

En la expresión (10):  $n \cdot q \cdot \mu = \sigma$  es la **conductividad eléctrica** del material.

También podemos definir su propiedad inversa, la **resistividad eléctrica**:  $\rho = 1 / \sigma$

Analicemos las unidades correspondientes de  $\sigma$ :  $\left[ \frac{e}{cm^3} \right] \cdot \left[ \frac{C}{e} \right] \cdot \left[ \frac{cm^2}{V \cdot s} \right] = \left[ \frac{1}{\Omega \cdot cm} \right]$

Por lo visto entonces podemos escribir la siguiente expresión general conocida como ley de Ohm microscópica:

$$J = \sigma \cdot E \quad (11) \quad \text{ó} \quad J = E / \rho \quad (12)$$

$$\left[ \frac{A}{mm^2} \right] = \left[ \frac{1}{\Omega \cdot mm} \right] \cdot \left[ \frac{V}{mm} \right]$$

De las unidades de la ec. (11) concluimos luego de simplificar los  $\text{mm}^2$  que:  $[A] = [V] / [\Omega]$  lo que corresponde a la ley conocida como de OHM, donde:  $I = V / R$  (13)

Reemplazando en la ecuación (12), J por  $I / A$  y E por  $V / l$ :

$$\frac{I}{A} = \frac{1}{\rho} * \frac{V}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{I} = \rho * \frac{l}{A} \quad (14)$$

Y como  $V / I = R$  concluimos en que:  $R = \rho * \frac{l}{A}$  (15)

Aquí se hace visible que la resistencia eléctrica de un conductor depende directamente de una propiedad intrínseca del material, la resistividad y de la longitud e inversamente del área transversal o sección de paso de la corriente. En cuanto a las unidades de la resistividad estas son:

$[\Omega \cdot \text{mm}^2 / \text{m}]$  y si pasamos los  $\text{mm}^2$  a  $\text{m}^2$ , la unidad quedará  $[\Omega \cdot \text{m}]$ .

Siendo la equivalencia  $1 [\Omega \cdot \text{mm}^2 / \text{m}] = 10^{-6} [\Omega \cdot \text{m}]$ .

Resumiendo podemos decir que la conductividad eléctrica de los materiales es directamente proporcional a la concentración de portadores de carga libres que este posea. Y ello depende de la estructura cristalina. Para un buen conductor este valor es del orden  $10^{23} [\text{e}/\text{cm}^3]$  e un aislante será de  $10^7 [\text{e}/\text{cm}^3]$  y en un semiconductor puro será de  $10^{16} [\text{e}/\text{cm}^3]$ .

## 2. Variación de la resistencia con la temperatura

En todos los materiales la concentración de portadores libres de carga varía con la temperatura, por lo que la conductividad, la resistividad también cambiará. Y como el efecto Joule es inevitable al haber corriente, esta variación estará siempre presente en los circuitos eléctricos.

En el caso de los metales el aumento de la temperatura provoca expansión térmica, con ello la red cristalina se dilata y las posiciones centrales de los iones positivos aumenta, o sea aumenta la distancia interatómica, las últimas órbitas dejan de estar tan solapadas, y los electrones de valencia quedan más ligados a su ión, así disminuye la cantidad de electrones que se liberan disminuyendo  $n$  en la ecuación de la conductividad. Entonces el metal se hace menos conductor o más resistivo al aumentar la temperatura.

Como vimos en la ecuación (15) también participan la longitud y el área, las cuales también sufrirán los efectos de la expansión térmica, pero como uno divide al otro, si las dos dimensiones aumentaran en la misma proporción, el cociente tiende a no modificarse. Así que despreciaremos la variación de la longitud y el área con la temperatura. Entonces asumiremos que la resistencia eléctrica  $R$  cambiará la misma cantidad que la resistividad  $\rho$  al variar la temperatura un  $\Delta T$ .

En los metales, en cierto rango de temperatura, la variación es aproximadamente lineal y por encima de los  $200^\circ\text{C}$  comienza a evidenciarse una variación no lineal de forma cuadrática. A bajas temperaturas la resistividad es baja y se torna constante, para finalmente perderse a una temperatura crítica que se encuentra cerca del cero absoluto (en la mayoría de los metales puros) y hace que el conductor adquiera resistencia de  $0 \Omega$ , esto se denomina superconductividad (descubierta por Kamerlingh Onnes en 1921). Ver Fig. 9.

La temperatura crítica de algunos metales usuales se resume en la siguiente tabla.

Plomo	7,2 K
Estaño	3,78 K
Aluminio	1,14 K
Zinc	0,79 K
Cadmio	0,60 K

Esta temperatura puede ser obtenida por:

- Licuefacción del hidrógeno (20,4 K)
- Licuefacción del helio (4,2 K)
- Evaporación del helio a presión reducida (1 K)
- Desmagnetización de una sal paramagnética (0,01 K)

Al desaparecer la resistencia, no hay pérdidas de calor por efecto Joule, cualquier corriente engendrada en esas condiciones subsiste largo tiempo, aún cuando no haya fuentes de energía en el circuito. Esto puede ser puesto en evidencia por la siguiente experiencia: una espira de plomo se lleva a una temperatura inferior a 7,2 K y se provoca en la misma la aparición de una corriente, desplazando un imán en su vecindad, al cabo de media hora dicha corriente permanece constante con una aproximación del 1 %.

En las aleaciones metálicas se observa un comportamiento complejo ya que la estructura cristalina también lo es. Estos poseen resistividades mucho más altas que las de los metales puros que componen la aleación y en algunos casos son casi invariables con la temperatura en el rango de uso de la tecnología eléctrica, esto es muy útil en la confección de resistencias de precisión o patrones. Este es el caso de la aleación llamada Manganina (de Cobre, Níquel y Zinc) o Constatán (de Cobre, Níquel y Manganeso). Otra utilidad de las aleaciones metálicas es la fabricación de resistencias de calefacción como el Nichrome (de Níquel, Cromo y Hierro) o Kanthal (de Hierro, Cromo, Aluminio y Cobalto). Ver Fig. 8.

En el caso de los semiconductores como por ej el Germanio, el Silicio, el Grafito, estos poseen una resistividad muy variable con la temperatura, generalmente de forma exponencial y opuesta a la de los metales, o sea que la resistividad disminuye al aumentar la temperatura. Cuando los semiconductores son utilizados para aprovechar esta propiedad se denominan **termistores** o **termistancias**, construidas con óxidos metálicos del grupo de transición del hierro los llamados NTC (resistencias de coeficiente negativo) y de titanato de Bario o de Estroncio los llamados PTC (resistencias de coeficiente positivo; se comportan como los metales en un rango de temperatura). Ver Fig. 8.

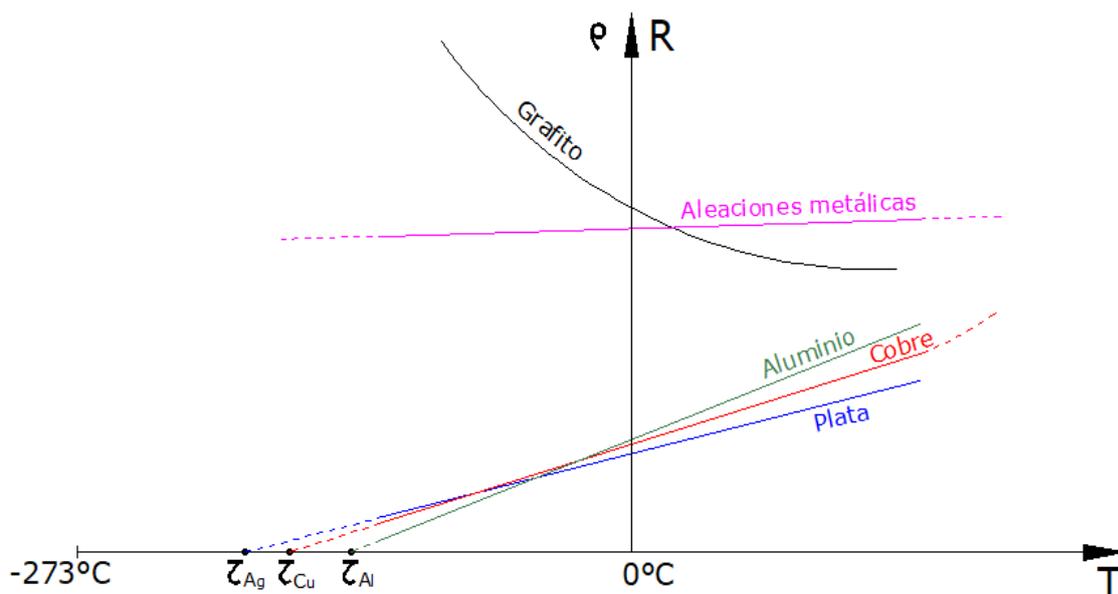


Fig.8: Gráfica de la variación de la resistividad y la resistencia con la temperatura para varios materiales.

Otro comportamiento particular de la resistividad se produce cuando el metal sufre una variación alotrópica, por ej. el hierro a los 775 ° C sufre un cambio de estado cristalino (punto de

Curie, en el que desaparece el ferromagnetismo) y la resistividad aumenta bruscamente hasta los 850 °C y a partir de dicha temperatura disminuye nuevamente. Esta propiedad se utiliza en las "lámparas reguladoras de intensidad de Hierro-Hidrógeno", destinadas a estabilizar la corriente eléctrica: en régimen normal, la temperatura de la parte central del filamento es superior a la temperatura de transformación, mientras que la de los extremos es inferior. Si la tensión de alimentación aumenta, la longitud de la parte transformada en la variedad estable a alta temperatura también aumenta; la resistencia del filamento aumenta igualmente y tiende a mantener la corriente constante, no obstante el aumento de tensión. La atmósfera de hidrógeno asegura un enfriamiento enérgico sin atacar el metal.

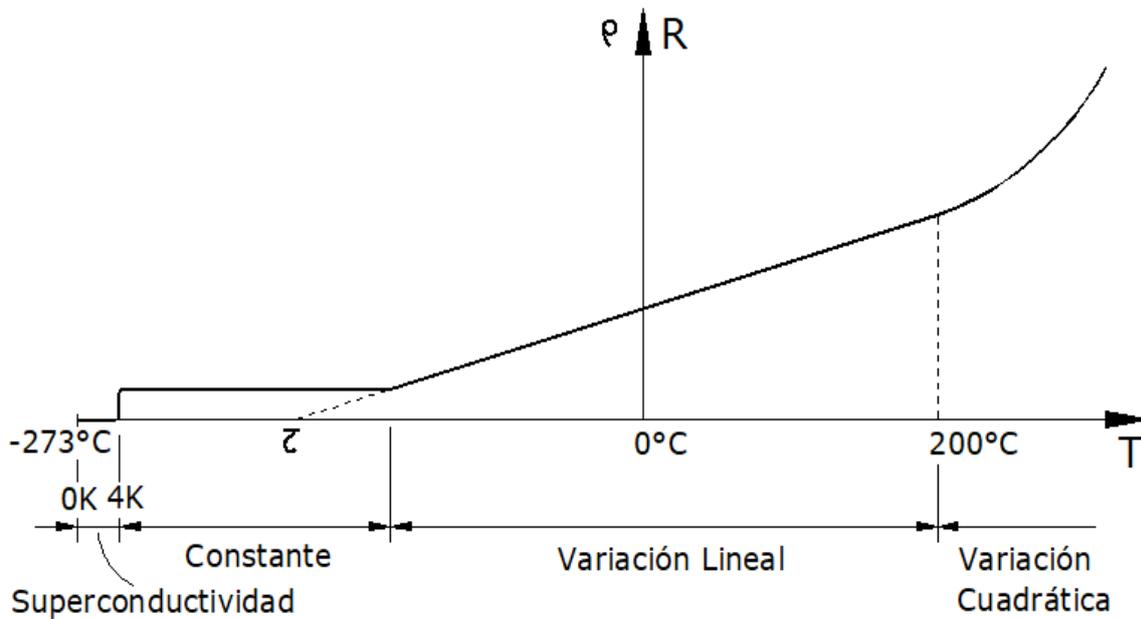


Fig.9: Gráfica de la variación de la resistividad y la resistencia con la temperatura para en los metales.

**Vamos a analizar la variación de la resistencia con la temperatura en el rango de variación lineal.**

El problema es determinar la ecuación de una recta, de la que conocemos las coordenadas de un punto inicial (i) y de un punto final (f). Para dicha recta extrapolamos hasta obtener en la intersección con el eje de ordenadas, un punto característico **T** que depende de cada material:

Cobre: **TCu = - 234,5 °C** ; Aluminio: **TAI = - 228,1 °C** ; Plata: **TAg = - 243,2 °C**

En la Fig. 10, nos quedan formados dos triángulos semejantes: **aib** y **afc**

Planteamos en la semejanza de triángulos razones y proporciones:

$$\frac{R_f}{T_f - T} = \frac{R_i}{T_i - T} \text{ para el cobre nos quedaría: } \frac{R_f}{T_f + 234,5} = \frac{R_i}{T_i + 234,5} \quad (16)$$

$$R_f = R_i * \left( \frac{T_f + 234,5}{T_i + 234,5} \right) \quad (16) \quad \text{ó} \quad \rho_f = \rho_i * \left( \frac{T_f + 234,5}{T_i + 234,5} \right)$$

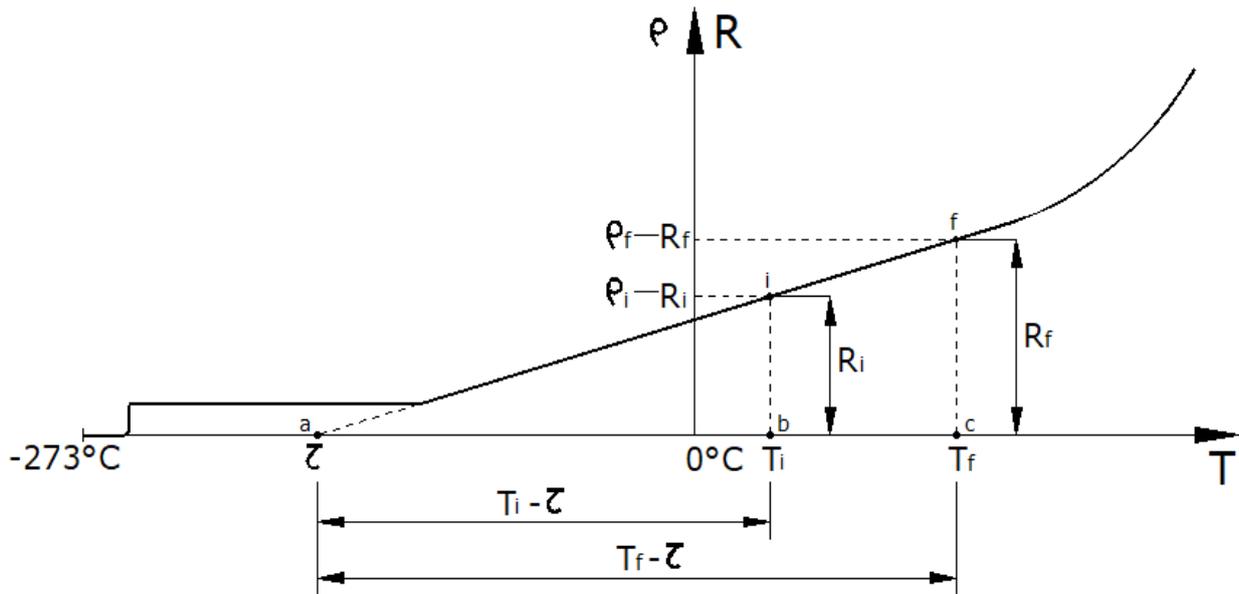


Fig.10: Gráfica de la variación de la resistividad y la resistencia con la temperatura para en los metales.

La expresión (16) también tiene otro formato muy utilizado, para ello desarrollaremos algebraicamente, en el cociente sumaremos y restaremos la temperatura inicial:

$$R_f = R_i * \left( \frac{T_f + 234,5 - T_i + T_i}{T_i + 234,5} \right)$$

Reordenando:

$$R_f = R_i * \left( \frac{T_i + 234,5 + T_f - T_i}{T_i + 234,5} \right)$$

Agrupando y distribuyendo en el cociente:

$$R_f = R_i * \left( \frac{(T_i + 234,5) + (T_f - T_i)}{T_i + 234,5} \right) = R_i * \left( \frac{T_i + 234,5}{T_i + 234,5} + \frac{(T_f - T_i)}{T_i + 234,5} \right)$$

$$R_f = R_i * \left( 1 + \frac{1}{(T_i + 234,5)} * (T_f - T_i) \right) \quad (17)$$

Definimos como  $\alpha = 1 / (234,5 + T_i)$  en  $[1/^\circ\text{C}]$  al **Coefficiente de variación lineal** de la resistencia con la temperatura. El coeficiente  $\alpha$  se tabula para los distintos materiales tomando como referencia una temperatura inicial de  $20^\circ\text{C}$ .

Entonces para el cobre  $\alpha_{20^\circ} = 1 / (234,5 + 20) = 1 / 254,5^\circ\text{C} \Rightarrow \alpha_{20^\circ} = 3,93 \times 10^{-3} [^\circ\text{C}^{-1}]$

y la expresión (17) queda:

$$R_f = R_i * (1 + \alpha_{20^\circ} * (T_f - 20)) \quad \Rightarrow \quad R_f = R_i * (1 + \alpha_{20^\circ} * \Delta T) \quad (18)$$

Para considerar la variación cuadrática de la resistencia, para temperaturas elevadas, a la expresión se le agrega un término:

$$R_f = R_i * (1 + \alpha_{20^\circ} * \Delta T + \beta_{20^\circ} * \Delta T^2) \quad (19)$$

Donde  $\beta$  es el coeficiente de variación cuadrática en  $[1/^\circ\text{C}^2]$ .

### 3. Ley de JOULE

Si  $V$  una diferencia de potencial ( $V_A - V_B$ ) aplicada a los extremos de una resistencia  $R$ , recorrida por una corriente  $I$ , la ley de ohm expresa que:  $V = R \cdot I$

La cantidad de electricidad que atraviesa el citado conductor será:  $dq = I \cdot dt$

El trabajo de las fuerzas eléctricas será entonces:  $W = V \cdot dq$

$$W = V \cdot I \cdot dt$$

$$W = P \cdot dt$$

$$W = R \cdot I \cdot I \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot dt \quad (20)$$

Y siendo este trabajo igual a la energía transformada en calor, la cantidad de calor  $dQ$  disipada resulta:  $dQ = K \cdot R \cdot I^2 \cdot dt \quad (21)$

Donde  $K$ , es la **equivalente termoeléctrica del calor** e igual a **0,239 [cal / J]**

Recordando que la caloría se definía como la energía necesaria para elevar en  $1^\circ\text{C}$  (desde  $14,5^\circ\text{C}$  a  $15,5^\circ\text{C}$ ) la temperatura de 1 gr de agua.

Y esta cantidad era igual 4,186 Joule:  $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ [J]}$

Entonces si la corriente es continua, la cantidad de calor disipada durante un tiempo  $t$ , será:

$$Q = 0,239 \cdot R \cdot I^2 \cdot dt \quad (22) \quad \text{Ley de JOULE}$$

La interpretación electrónica de este fenómeno es el siguiente.

En un conductor entre cuyos extremos se ha establecido una diferencia de potencial eléctrico, los electrones errantes adquieren una velocidad suplementaria en el sentido de la fuerza que sobre ellos ejerce el campo eléctrico (Gradiente de potencial). De esto resulta:

- Un movimiento ordenado de dichos electrones, que se superpone al movimiento ordenado; y en consecuencia un movimiento continuo de ellos, la corriente eléctrica.
- Un aumento de la energía cinética recibida por cada electrón al acelerarse por la acción de la fuerza electrostática, entre dos choques sucesivos contra los iones fijos de la estructura.
- Esta energía cinética suplementaria se la comunica el electrón a dichos corpúsculos en cada choque y la agitación térmica de estos alrededor de su posición de equilibrio, se ve aumentada. Como la energía de esta agitación (teoría molecular del calor) es proporcional a la temperatura absoluta del cuerpo, el resultado del paso de la corriente por un conductor es el calentamiento del mismo.

#### 3.1. Aplicaciones

La ley de Joule se aplica constantemente en electrotecnia, para calcular el calor desarrollado por el pasaje de la corriente en conductores de arrollamiento de máquinas o de cables de transporte de energía eléctrica.

El calor disipado representa pérdida de potencia y es para reducir esta pérdida y mejorar, en consecuencia, el rendimiento de las máquinas eléctricas y líneas de transmisión, que se utilizan conductores fabricados con metales de pequeña resistividad y con secciones suficientemente grandes para reducir la resistencia. Pero este aumento de sección está limitado por la necesidad de ubicar los conductores en espacios reducidos (Caso de las máquinas eléctricas) o por el aumento

del peso del conductor (caso de las líneas soportadas aéreas) y consecuentemente, el aumento del costo de material e instalaciones.

El calor producido por la corriente eléctrica puede tener por efecto, elevar en forma apreciable la temperatura de los conductores. Esta elevación de temperatura es la que limita generalmente, la intensidad de corriente que puede fluir por un aparato o cable eléctrico. El valor de dicha intensidad de corriente es muy variable, según las condiciones en que se efectúa la refrigeración (disipación del calor) en los conductores: Por ej. para una misma resistencia y corriente, la elevación de temperatura es más grande en un conductor aislado, que en uno no aislado (desnudo), o sea que la misma es más débil cuando la ventilación del conductor está mejor asegurada.

El calor producido por efecto Joule, se aplica en la mayor parte de los aparatos dedicados a la calefacción eléctrica: Calentadores, planchas, estufas, calventores, secadores, hornos a resistencia, etc....

Si la corriente que atraviesa el conductor es elevada, o mejor dicho la densidad de corriente, el mismo puede ponerse incandescente e iluminar, este es el principio de termoluminiscencia por el que funcionan las lámparas incandescentes.

En otros casos la elevación de temperatura produce la fusión del conductor, de esta manera se protegen las instalaciones eléctricas intercalando en cada circuito un "cortacorriente fusible", formado por un hilo de resistividad bastante elevada y bajo punto de fusión, de sección convenientemente elegida. Este hilo se funde antes de que la corriente pudiera llegar a un valor peligroso para los aparatos intercalados en el circuito y los conductores de la instalación.

#### 4. Calentamiento en conductores eléctricos

Expresión de la ley de variación

Según lo expresado en el punto 3., un conductor de resistencia **R**, recorrido por una corriente **I**, recibe cada segundo una potencia **P = I<sup>2</sup> . R** (23)

De esta potencia, una parte **P1** calienta al conductor y el resto **P2** se disipa por radiación, convección o conducción.

Llamaremos:

**θ**: Temperatura alcanzada por el conductor, por sobre la temperatura ambiente [°C].

**R**: Resistencia del conductor [Ω].

**c**: Calor específico [J/Kg.°C].

**δ**: Densidad [Kg/m<sup>3</sup>].

**ℓ**: Longitud [m].

**A**: Sección recta [m<sup>2</sup>].

El valor de **P1**, en el instante **t** durante el calentamiento resulta: **P1 . dt = m . c . dθ**

Como la masa del conductor es, el volumen de material por la densidad: **m = A . ℓ . δ**

La potencia nos queda: **P1 . dt = A . ℓ . δ . c . dθ** (24)

El valor de la potencia **P2** (a bajas temperaturas y pequeñas variaciones de la misma) dentro de los límites impuestos por los conductores aislados, o sea la energía disipada por segundo, es

proporcional a la superficie de enfriamiento  $S$  y al exceso de temperatura  $\theta$  sobre la temperatura ambiente exterior al conductor, o sea:  $P_2 = k \cdot S \cdot \theta$  (25)

Donde  $k$  [ $W / m^2 \cdot ^\circ C$ ] resulta un coeficiente de proporcionalidad, llamado de Radiación Térmica

Para el caso de un conductor prismático o cilíndrico, la superficie lateral será igual al perímetro  $p$  por la longitud:  $S = p \cdot l \Rightarrow P_2 = k \cdot p \cdot l \cdot \theta$  (26)

Si en el tiempo  $t$  se tiene  $P = P_1 + P_2$ , en el instante  $dt$  tendremos:  $P \cdot dt = P_1 \cdot dt + P_2 \cdot dt$  (27)

O sea: Energía aportada igual calor de calentamiento más calor aportado.

Reemplazando en la ec. (27), la ec. (24) y (26) y la  $R$  por la ec. (15):

$$\rho \cdot \frac{l}{A} \cdot I^2 \cdot dt = l \cdot A \cdot \delta \cdot c \cdot d\theta + k \cdot p \cdot l \cdot \theta \cdot dt$$

Multiplicando miembro a miembro por  $A$  y obtenemos:

$$\rho \cdot l \cdot I^2 \cdot dt = l \cdot A^2 \cdot \delta \cdot c \cdot d\theta + k \cdot p \cdot l \cdot A \cdot \theta \cdot dt$$

$$(\rho \cdot I^2 - k \cdot p \cdot A \cdot \theta) \cdot dt = A^2 \cdot \delta \cdot c \cdot d\theta$$

$$dt = \frac{A^2 \cdot \delta \cdot c \cdot d\theta}{\rho \cdot I^2 - k \cdot p \cdot A \cdot \theta} \quad (28)$$

Esta ecuación diferencial es de la forma:

$$dt = \frac{a \cdot d\theta}{b - c \cdot \theta} = \frac{\frac{a}{c} \cdot d\theta}{\frac{b}{c} - \theta} \quad (29)$$

Haciendo un cambio de variables:  $x = \frac{b}{c} - \theta \Rightarrow \theta = \frac{b}{c} - x$

Derivando:  $d\theta = -dx$

Reemplazando en (29):  $dt = \frac{-\frac{a}{c} \cdot dx}{x} \quad \therefore \quad \frac{c}{a} * dt = -\frac{dx}{x}$

Integrando miembro a miembro:  $\therefore \quad \frac{c}{a} \int dt = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{c}{a} * t = -\ln x + Ci$

Cambiamos nuevamente las variables:  $\frac{c}{a} * t = -\ln \left( \frac{b}{c} - \theta \right) + Ci$  (30)

Determinamos la constante de integración  $Ci$  para las condiciones iniciales: para  $t=0$  ;  $\theta=0$

$$\frac{c}{a} * 0 = -\ln \left( \frac{b}{c} - 0 \right) + Ci \Rightarrow 0 = -\ln \left( \frac{b}{c} \right) + Ci \Rightarrow Ci = \ln \left( \frac{b}{c} \right)$$

Reemplazando  $Ci$  en (30):  $\frac{c}{a} * t = -\ln \left( \frac{b}{c} - \theta \right) + \ln \left( \frac{b}{c} \right)$

$$\frac{c}{a} * t = -\ln\left(\frac{\frac{b-\theta}{c}}{\frac{b}{c}}\right) \Rightarrow e^{-\frac{c}{a}*t} = \frac{\frac{b-\theta}{c}}{\frac{b}{c}} \Rightarrow \frac{b}{c} * e^{-\frac{c}{a}*t} = \frac{b}{c} - \theta$$

$$\theta = \frac{b}{c} - \frac{b}{c} * e^{-\frac{c}{a}*t} \Rightarrow \theta = \frac{b}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{a}*t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\rho.I^2}{k.p.A} \left(1 - e^{-\left(\frac{k.p.A}{A^2.\delta.c}\right)*t}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\rho.I^2}{k.p.A} \left(1 - e^{-\left(\frac{k.p}{A.\delta.c}\right)*t}\right) \quad (31)$$

Expresión donde el multiplicador de la exponencial, expresa el valor de equilibrio térmico y la inversa del factor exponencial que multiplica al tiempo, representa una constante de tiempo **T**. Se considera que una vez transcurrido un tiempo equivalente a 6 constantes de tiempo se alcanza la estabilidad de temperatura. Ver gráfica (11).

La expresión de la ecuación (31) es una exponencial de la forma:

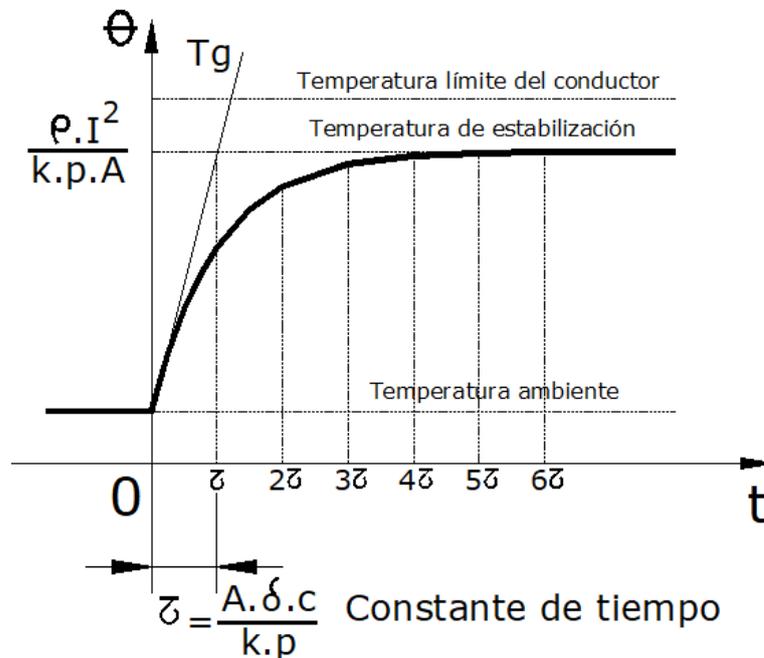


Fig. 11: Curva de calentamiento de un conductor eléctrico.

Si reemplazamos perímetro y sección recta de un conductor cilíndrico, la ecuación (31) nos queda:

$$\theta = \frac{4.\rho.I^2}{k.\pi^2.d^3} \left(1 - e^{-\left(\frac{4.k}{d.\delta.c}\right)*t}\right) \quad (32)$$

Con:  $\theta$  [°C];  $\rho$  [ $\Omega.m$ ];  $d$  [m];  $I$  [A];  $k$  [ $W/m^2.\text{°C}$ ];  $\delta$  [ $Kg/m^3$ ];  $c$  [ $J/Kg.\text{°C}$ ]

El multiplicador de la exponencial, podemos obtenerlo también de la siguiente manera, sin necesidad de cálculo diferencial:

Igualamos Energía Adicionada a la Energía Disipada en un tiempo **t**:  $R \cdot I^2 \cdot t = S \cdot k \cdot \theta \cdot t$

$$0,239 \cdot \frac{\rho \cdot l \cdot 4}{\pi \cdot d^2} \cdot I^2 \cdot t = \pi \cdot d \cdot l \cdot k \cdot \theta \cdot t$$

⏟
⏟  
 E adicionada                  E disipada

$$\theta = \frac{0,239 \cdot \rho \cdot 4 \cdot I^2}{\pi^2 \cdot k \cdot d^3} \quad \text{ó} \quad I^2 = \left( \frac{\pi^2 \cdot k}{0,239 \cdot \rho \cdot 4} \right) \cdot d^3 \cdot \theta \Rightarrow I^2 = K \cdot d^3 \cdot \theta \quad (33)$$

Con: Coeficiente de radiación térmica  $k$  en [cal / mm<sup>2</sup>·°C.s]; Resistividad eléctrica en  $\rho$  [Ω.mm];  
 Diámetro del conductor  $d$  [mm] y Sobretemperatura  $\theta$  [°C].

#### 4.1. Temperatura límite de conductores eléctricos

La temperatura en un conductor deja de aumentar y alcanza su valor máximo cuando el calor disipado se hace igual al aportado. Cuando esta alcanza un valor límite se considera la condición de régimen del conductor.

El conocimiento del valor de la temperatura de régimen es de gran importancia, ya que, si se sobrepasa esta temperatura, el conductor que está envuelto en un aislante se deteriora; el aislante se descompone llegando en algunos casos a la carbonización y combustión. Y si la temperatura excedente es muy elevada puede llegar a fundirse el metal.

La expresión de la temperatura límite la obtenemos haciendo  $t = \infty$  en la ecuación (31), o bien a partir de la igualdad  $P = P_2$ :

$$\theta_{\max} = \rho \cdot I^2 / (k \cdot \pi \cdot A) \quad (34)$$

Para conductores cilíndricos podemos escribir:

$$\theta_{\max} = \rho \cdot I^2 \cdot A / (k \cdot \pi \cdot A^2) = (\rho \cdot A / k \cdot \pi) \cdot (I / A)^2$$

$$\theta_{\max} = \frac{\rho \cdot A}{k \cdot \pi} * \left( \frac{I}{A} \right)^2 \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{\rho \cdot \pi \cdot \left( \frac{d^2}{4} \right)}{k \cdot \pi \cdot d} * \left( \frac{I}{A} \right)^2 \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{\rho \cdot d}{4 \cdot k} * \left( \frac{I}{A} \right)^2 \quad (35)$$

$$\Rightarrow \theta_{\max} = \frac{\rho \cdot d}{4 \cdot k} * J^2$$

Con:  $\theta$  [°C];  $\rho$  [Ω.m];  $d$  [m];  $I$  [A/m<sup>2</sup>];  $k$  [W/m<sup>2</sup>·°C]

Que es la misma expresión de las ecuaciones (32) y (33) pero en función de la densidad de corriente.

De esta ecuación se deduce:

- Para un conductor dado (valores determinados de:  $\rho$ ,  $d$  y  $k$ ) la temperatura límite es sensiblemente proporcional al cuadrado de la densidad de corriente  $J$ ; la proporcionalidad absoluta, supone la constancia del calor específico y de la resistividad del conductor al aumentar la temperatura.
- Para una temperatura límite impuesta y condiciones de enfriamiento determinados ( $k = \text{cte}$ ) la densidad de corriente es tanto menor cuanto mayor es el diámetro del conductor. Desde

el punto de vista del calentamiento, los conductores gruesos son poco aconsejables, entonces es mejor sustituirlos por un conjunto de pequeños conductores, separados unos de otros.

- c) En iguales condiciones, la densidad de corriente ha de ser tanto menor cuanto más pequeño sea  $k$ , o sea cuanto peor sea el enfriamiento del conductor.

En definitiva, la densidad de corriente que puede admitirse en un conductor deberá ser la apropiada al diámetro, aislamiento y situación del mismo. Dado que el valor de  $k$  varía dentro de límites muy amplios, la sección de los conductores (que en condiciones determinadas de enfriamiento no debe sobrepasar una temperatura dada) se determina generalmente, por medio de tablas experimentales suministradas por los fabricantes de los mismos.

## 4.2. Sobrecalentamiento de los conductores eléctricos

Si un conductor eléctrico está aislado en PVC (Policloruro de vinilo), su temperatura límite es de 70 °C. Esto quiere decir que si la temperatura ambiente es de 40 °C, existe una corriente que en régimen permanente hace que el conductor alcance esta temperatura máxima, tal corriente llamada admisible, normalmente la encontramos en las tablas de conductores dadas por el fabricante.

La sobretensión admisible será:  $\theta = 70^{\circ}\text{C} - 40^{\circ}\text{C} = 30^{\circ}\text{C}$ . Ver figura (12).

Con este sobrecalentamiento, según las tablas, el número de conductores y tipo de canalizaciones, se admitirá una corriente que garantizará una vida útil del conductor de 30 años. Por cada 8°C de sobretensión respecto del límite, la vida útil del conductor disminuye a la mitad.

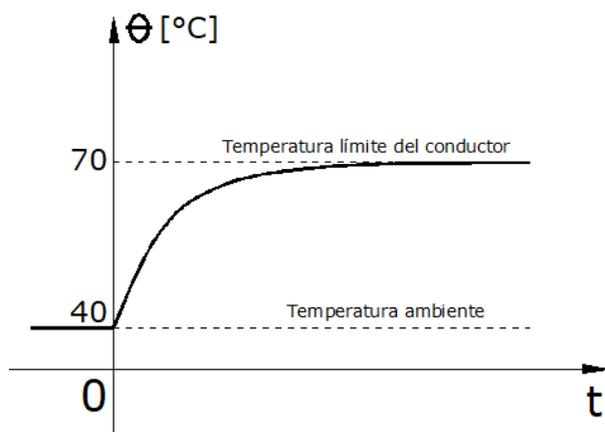


Fig. 12: Calentamiento y condición de régimen de un conductor eléctrico con corriente nominal.

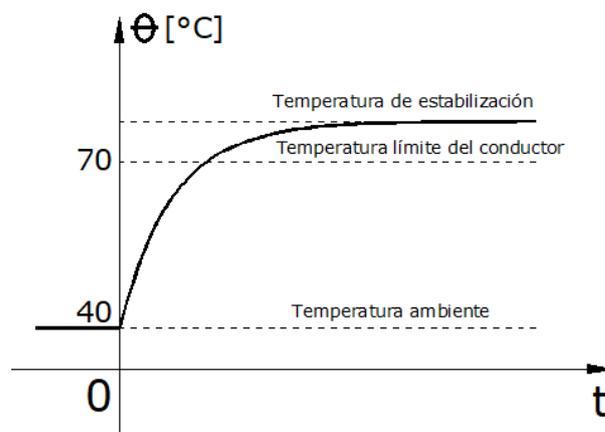


Fig. 13: Sobrecalentamiento superior al admisible. Sobrecarga de larga duración.

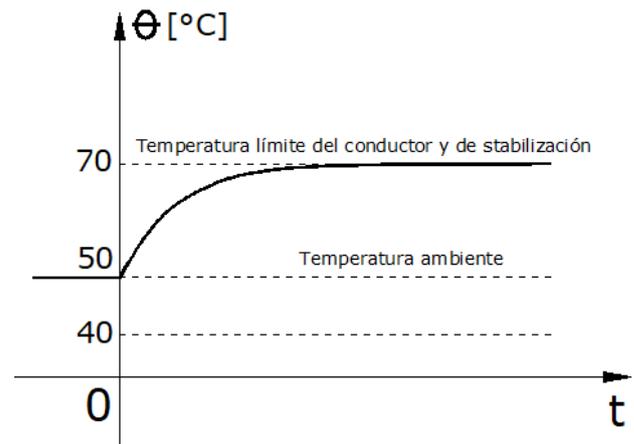
### a) Sobrecarga de larga duración:

Si una corriente que es superior al admisible se sostiene en el tiempo producirá que el mismo se sobrecaliente más allá de sus límites, pudiendo llegar a dañarse. Esta condición se denomina sobrecarga de larga duración. Ver figura (13).

Si el conductor debe trabajar con una temperatura ambiente superior a los 40°C, por ej. 50°C. La capacidad de conducir corriente respecto de cuando la temperatura era 40 °C, será menor, ya que el exceso de temperatura admisible es ahora:  $\theta = 70^{\circ}\text{C} - 50^{\circ}\text{C} = 20^{\circ}\text{C}$ . Ver figura (14).

El problema es ahora, determinar la nueva corriente admisible a partir de la dada para una sobretemperatura de 20°C (temperatura ambiente de 50°C).

Fig. 14: Calentamiento y condición de régimen de un conductor eléctrico con temperatura de partida mayor a los 40°C.



Llamamos  $\theta_{30}$  a la sobretemperatura, para la que está dada la corriente admisible partiendo de temperatura ambiente 40°C. Entonces según la ecuación (33) tenemos:

$$I_{30}^2 = K \cdot d^3 \cdot \theta_{30} \Rightarrow K = I_{30}^2 / (d^3 \cdot \theta_{30}) \quad (36)$$

Llamamos  $\theta_{20}$  a la nueva sobretemperatura para el conductor sometido a una temperatura ambiente de 50 °C, entonces:

$$I_{20}^2 = K \cdot d^3 \cdot \theta_{20} \Rightarrow K = I_{20}^2 / (d^3 \cdot \theta_{20}) \quad (37)$$

Igualando las ecuaciones (36) y (37):  $I_{30}^2 / (d^3 \cdot \theta_{30}) = I_{20}^2 / (d^3 \cdot \theta_{20})$

$$I_{20}^2 = I_{30}^2 \cdot (\theta_{20} / \theta_{30}) \Rightarrow I_{20} = I_{30} \cdot \sqrt{\frac{\theta_{20}}{\theta_{30}}} \quad (38)$$

En este ejemplo:  $I_{20} = I_{30} \cdot \sqrt{\frac{20}{30}} \Rightarrow I_{20} = 0,812 \cdot I_{30}$

### b) Sobrecargas de corta duración:

En este caso se trata de corrientes varias veces superiores a las nominales del conductor para régimen permanente con duraciones inferiores a los 5 [s], puesto que si una corriente de estas características perdura mucho tiempo, la elevación de temperatura es tan grande que el metal se funde. Por lo tanto un tiempo corto de duración lo garantiza una protección con fusible o interruptor termomagnético. Estos impiden que la temperatura de la aislación se supere: 160°C para el PVC (Policloruro de vinilo); 250°C para el XLP (Polietileno reticulado); durante 5 [s].

El aumento de temperatura, por sobre la temperatura ambiente con un tiempo corto de duración, sin tener en cuenta la refrigeración, se calcula de la siguiente manera:

$$\theta = K \cdot t \cdot \left(\frac{I}{A}\right)^2 \quad (39)$$

Donde  $I / A$  es la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  [A/mm<sup>2</sup>] y  $\mathbf{K}$  es una constante y  $\mathbf{t}$  el tiempo hasta la respuesta del fusible o del interruptor termomagnético.

$$K_{Cu} = 5,21 \times 10^{-3} [\text{mm}^4 \cdot ^\circ\text{C} / \text{A}^2 \cdot \text{s}]$$

$$K_{Al} = 11,7 \times 10^{-3} [\text{mm}^4 \cdot ^\circ\text{C} / \text{A}^2 \cdot \text{s}]$$

## 5. Algunas aplicaciones

### 5.1. Cálculo de una resistencia

Para el cálculo de una resistencia es necesario contar con los siguientes datos:

- Potencia a disipar  $P$ .
- Tensión entre terminales  $V$ .
- Sustancia de que está constituido el hilo, definido por su resistividad  $\rho$ .
- Temperatura límite  $\theta_{\max}$ .
- Condiciones previstas para el enfriamiento.

Los parámetros a determinar son el diámetro  $d$  y la longitud  $\ell$  del hilo o conductor.

Suponiendo conocidos  $\theta_{\max}$  y  $k$ , como así también  $I = P / V$

Reemplazando  $(\rho \cdot A)$  en la ecuación (33):  $\rho \cdot A = \pi \cdot d \cdot \pi \cdot d^2 / 4 = \pi^2 \cdot d^3 / 4 = 2,467 d^3$

$$\theta_{\max} = \rho \cdot I^2 / (k \cdot 2,467 d^3)$$

Podemos deducir el diámetro del conductor supuesto cilíndrico:

$$d = [\rho \cdot I^2 / (2,467 \cdot k \cdot \theta_{\max})]^{1/3}$$

La longitud  $\ell$  la obtenemos de la fórmula:  $R = V / I = \rho \cdot \ell / A$

Pero como sabemos  $\rho$  varía con la temperatura y por consiguiente con la corriente  $I$  por el efecto Joule. Es por ello que los fabricantes de conductores para resistencias, proponen las diferentes aleaciones que fabrican, según las condiciones expresadas a continuación:

- $I = f(\theta_{\max})$  para diferentes diámetros. Fig.12.
- $r = f(d)$  para diferentes temperaturas  $\theta_{\max}$ . Fig.13.

Esta familia de curvas permite determinar la "resistencia por metro"  $r$  [ $\Omega/m$ ] del hilo a utilizarse. Como se conoce la resistencia total  $R = V^2 / P$  necesaria, se deduce la longitud, haciendo  $\ell = R / r$ .

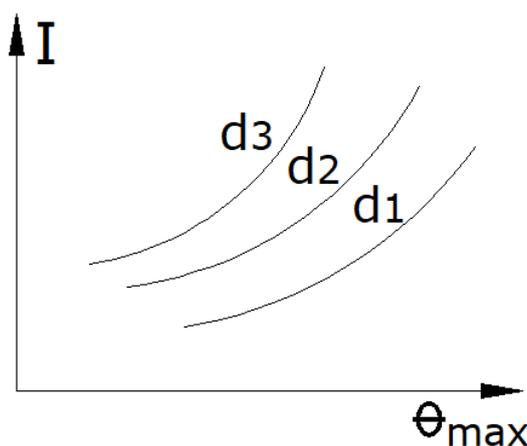


Fig. 12.

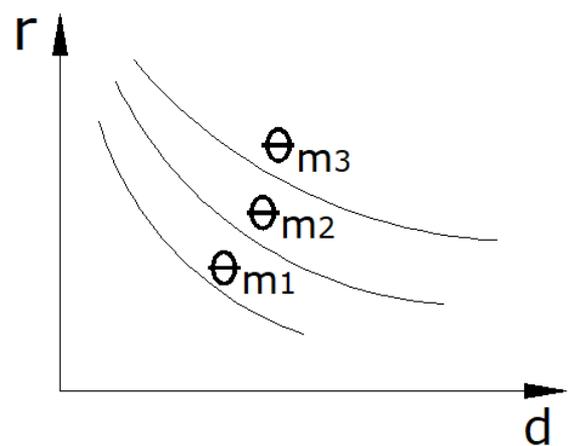


Fig 13.

Estas familias de curvas son para hilos desnudos.

Además aconsejan tener en cuenta las condiciones de enfriamiento, para lo cual se multiplica la temperatura límite que se impone por un coeficiente, tanto menor cuanto peores sean las condiciones de enfriamiento.

## 5.2. Cálculo de la potencia disipada

**La potencia perdida por efecto Joule puede escribirse:**

$$P = \rho \cdot (\ell / A) \cdot I^2 = \rho \cdot \ell \cdot A \cdot (I/A)^2 \Rightarrow P = \rho \cdot \text{Vol} \cdot (I/A)^2 \Rightarrow P = \rho \cdot \text{Vol} \cdot J \quad (37)$$

Donde  $V_{ol}$  es el volumen del metal conductor.

Si se conocen las densidades de corrientes admisibles, la fórmula (35) permite el cálculo rápido de la potencia disipada en un arrollamiento.

## 6. Protectores fusibles

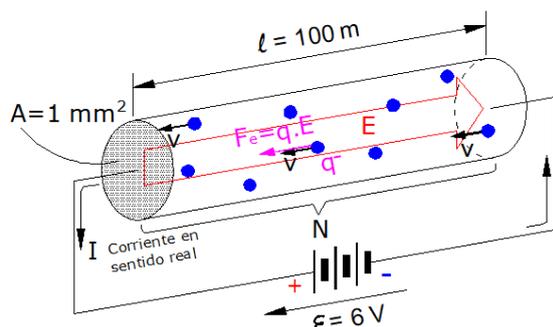
Constituyen un dispositivo económico y eficaz para la protección de las instalaciones de baja tensión (hasta 1000 V), en especial de las instalaciones domiciliarias, contra los efectos de las corrientes de cortocircuito.

Desde el punto de vista constructivo, los fusibles de baja tensión se fabrican de varias maneras diferentes:

Los más comunes tipo cartucho, que encierran el o los alambres fusibles (plata, zinc, cobre o aleaciones especiales), a veces vacío o en otras rellenos con un material inerte (pulverizado de arena y cuarzo, óxido de circonio o de aluminio, vidrio o porcelana en polvo; estos materiales no producen gases en forma apreciable a la elevada temperatura de fusión del alambre; y en consecuencia la presión interna del cartucho no aumenta excesivamente en el momento de la interrupción)

## ANEXO de CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA Y TEMPERATURA

Ej. 1) Análisis microscópico del circuito de la figura, si el material del conductor es cobre.



Datos:

Conductividad eléctrica:  $\sigma = 58 \text{ [m / } \Omega \cdot \text{mm}^2\text{]}$

Peso atómico relativo:  $A = 63,546 \text{ [g/mol]}$

Número atómico:  $Z = 29$

Densidad:  $\delta = 8,96 \text{ [g/cm}^3\text{]}$

Número de Avogadro:  $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ [Atomos/mol]}$

$$\begin{aligned} \text{Concentración atómica: } n_{\text{At}} &= N_A \cdot \delta / A \Rightarrow n_{\text{At}} = 6,022 \times 10^{23} \text{ [At/mol]} \cdot 8,96 \text{ [g/cm}^3\text{]} / 63,546 \text{ [g/mol]} \\ &\Rightarrow n_{\text{At}} = 8,491 \times 10^{22} \text{ [At/cm}^3\text{]} \end{aligned}$$

De  $Z = 29$  y con la ley del  $(2 \cdot n^2)$ , tenemos una distribución electrónica de:  $2e + 8e + 18e + 1e$ .

El electrón de la última capa es el que se libera, por lo que tendremos un electrón libre por cada átomo, entonces la concentración de electrones libres será igual a la de átomos

$$\text{Concentración de electrones libres: } n = 8,491 \times 10^{22} \text{ [e/cm}^3\text{]} = 8,491 \times 10^{19} \text{ [e/mm}^3\text{]}$$

$$\text{Volumen de material: } \text{Vol} = A \cdot l = 1 \text{ mm}^2 \cdot 100 \times 10^3 \text{ mm} = 100 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 100 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{Número de electrones libres contenidos en el material: } N &= \text{Vol} \cdot n = 100 \text{ [cm}^3\text{]} \cdot 8,491 \times 10^{22} \text{ [e/cm}^3\text{]} \Rightarrow \\ N &= 8,491 \times 10^{24} \text{ [e]} \end{aligned}$$

$$\text{Resistencia eléctrica: } R = \rho \cdot l / A = 58^{-1} \text{ [}\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m]} \cdot 100 \text{ [m]} / 1 \text{ [mm}^2\text{]} \Rightarrow R = 1,724 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$\text{Corriente eléctrica: } I = \epsilon / R = 6 \text{ [V]} / 1,724 \text{ [}\Omega\text{]} \Rightarrow I = 3,48 \text{ [A]}$$

$$\text{Densidad de corriente: } J = I / A = 3,48 \text{ [A]} / 1 \text{ [mm}^2\text{]} \Rightarrow J = 3,48 \text{ [A/mm}^2\text{]}$$

$$\text{Intensidad del campo eléctrico: } E = V / l = 6 \text{ [V]} / 100 \text{ [m]} \Rightarrow E = 0,06 \text{ [V/m]}$$

$$\text{Movilidad de los electrones libres: } \mu = J / (n \cdot q \cdot E) \Rightarrow$$

$$\mu = 3,48 \text{ [A/mm}^2\text{]} / (8,491 \times 10^{19} \text{ [e/mm}^3\text{]} \cdot 1,6 \times 10^{19} \text{ [C/e]} \cdot 6 \times 10^{-5} \text{ [V/mm]}) \Rightarrow \mu = 4269,2 \text{ [mm}^2/\text{V}\cdot\text{s]}$$

$$\text{Velocidad de deriva: } v = \mu \cdot E = 4269,2 \text{ [mm}^2/\text{V}\cdot\text{s]} \cdot 6 \times 10^{-5} \text{ [V/mm]} \Rightarrow v = 0,256 \text{ [mm/s]}$$

Ej. 2) Análisis microscópico del circuito de la figura anterior para las mismas dimensiones, si el material del conductor es plata.

Datos:

Conductividad eléctrica:  $\sigma = 62,5 \text{ [m / } \Omega \cdot \text{mm}^2\text{]}$

Peso atómico relativo:  $A = 107,868 \text{ [g/mol]}$

Número atómico:  $Z = 47$

Densidad:  $\delta = 10,50 \text{ [g/cm}^3\text{]}$

$$\begin{aligned} \text{Concentración atómica: } n_{\text{At}} &= N_A \cdot \delta / A \Rightarrow n_{\text{At}} = 6,022 \times 10^{23} [\text{At/mol}] \cdot 10,50 [\text{g/cm}^3] / 107,868 [\text{g/mol}] \\ &\Rightarrow n_{\text{At}} = 5,862 \times 10^{22} [\text{At/cm}^3] \end{aligned}$$

De  $Z = 47$  y con la ley del  $(2 \cdot n^2)$ , tenemos una distribución electrónica de:  $2e + 8e + 18e + 18e + 1e$ .

El electrón de la última capa es el que se libera, por lo que tendremos un electrón libre por cada átomo, entonces la concentración de electrones libres será igual a la de átomos

$$\text{Concentración de electrones libres: } n = 5,862 \times 10^{22} [\text{e/cm}^3] = 5,862 \times 10^{19} [\text{e/mm}^3]$$

$$\text{Volumen de material: } Vol = A \cdot \ell = 1 \text{ mm}^2 \cdot 100 \times 10^3 \text{ mm} = 100 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 100 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{Número de electrones libres contenidos en el material: } N &= Vol \cdot n = 100 [\text{cm}^3] \cdot 5,862 \times 10^{22} [\text{e/cm}^3] \Rightarrow \\ N &= 5,862 \times 10^{24} [\text{e}] \end{aligned}$$

$$\text{Resistencia eléctrica: } R = \rho \cdot \ell / A = 62,5^{-1} [\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}] \cdot 100 [\text{m}] / 1 [\text{mm}^2] \Rightarrow R = 1,6 [\Omega]$$

$$\text{Corriente eléctrica: } I = \mathcal{E} / R = 6 [\text{V}] / 1,6 [\Omega] \Rightarrow I = 3,75 [\text{A}]$$

$$\text{Densidad de corriente: } J = I / A = 3,75 [\text{A}] / 1 [\text{mm}^2] \Rightarrow J = 3,75 [\text{A/mm}^2]$$

$$\text{Intensidad del campo eléctrico: } E = V / \ell = 6 [\text{V}] / 100 [\text{m}] \Rightarrow E = 0,06 [\text{V/m}]$$

$$\text{Movilidad de los electrones libres: } \mu = J / (n \cdot q \cdot E) \Rightarrow$$

$$\mu = 3,75 [\text{A/mm}^2] / (5,862 \times 10^{19} [\text{e/mm}^3] \cdot 1,6 \times 10^{19} [\text{C/e}] \cdot 6 \times 10^{-5} [\text{V/mm}]) \Rightarrow \mu = 6663,7 [\text{mm}^2/\text{V.s}]$$

$$\text{Velocidad de deriva: } v = \mu \cdot E = 6663,7 [\text{mm}^2/\text{V.s}] \cdot 6 \times 10^{-5} [\text{V/mm}] \Rightarrow v = 0,4 [\text{mm/s}]$$

**Comparando el Cobre y la Plata, observamos que el cobre posee una mayor concentración de portadores libres pero a pesar de ello su conductividad es menor, ello se debe a que en la plata los electrones tienen una mayor movilidad. Esta movilidad se debe; aunque ambos tienen la misma estructura cristalina; a que la plata constituye una red más abierta, donde los iones fijos están un poco más separados.**

**La distancia interatómica en la plata es mayor que en el cobre y al ser una red más abierta los electrones se pueden mover con mayor facilidad.**

**Ej. 3)** Realicemos un análisis semejante en el filamento de Tungsteno de una lámpara incandescente. Aquí aplicaremos conceptos de variación de la resistencia con la temperatura, ya que el filamento se calienta a unos 2000°C.

Datos:

$$\text{Conductividad eléctrica a } 20^\circ\text{C: } \sigma_{20} = 18,9 [\text{m} / \Omega \cdot \text{mm}^2]$$

$$\text{Peso atómico relativo: } A = 183,85 [\text{g/mol}]$$

$$\text{Número atómico: } Z = 74$$

$$\text{Densidad: } \delta = 19,3 [\text{g/cm}^3]$$

Potencia de la Lámpara:  $P = 40$  [W]

Tensión nominal:  $V = 220$  [V]

Diámetro del filamento:  $d = 22$  [ $\mu\text{m}$ ]

Concentración atómica:  $n_{\text{At}} = N_A \cdot \delta / A \Rightarrow n_{\text{At}} = 6,022 \times 10^{23}$  [At/mol]  $\cdot 19,30$  [g/cm<sup>3</sup>] /  $183,85$  [g/mol]  
 $\Rightarrow n_{\text{At}} = 6,322 \times 10^{22}$  [At/cm<sup>3</sup>]

De  $Z = 74$  y con la ley del ( $2 \cdot n^2$ ), tenemos una distribución electrónica de:  $2e + 8e + 18e + 32e + 12e + 2e$ .

Los dos electrones de la última capa es el que se liberan, por lo que tendremos dos electrones libres por cada átomo, entonces la concentración de electrones libres será igual a la de átomos

Concentración de electrones libres:  $n = 2 \cdot 6,322 \times 10^{22}$  [e/cm<sup>3</sup>] =  $12,644 \times 10^{19}$  [e/mm<sup>3</sup>]

Corriente eléctrica:  $I = P / V = 40$  [W] /  $220$  [V]  $\Rightarrow I = 0,182$  [A]

Resistencia eléctrica a 2000°C:  $R = V / I = 220$  [V] /  $0,182$  [A]  $\Rightarrow R = 1210$  [ $\Omega$ ]

Sección del filamento:  $A = \Pi \cdot d^2 / 4 = \Pi \cdot (0,022$  [mm])<sup>2</sup> /  $4 \Rightarrow A = 3,801 \times 10^{-4}$  [mm<sup>2</sup>]

Resistividad eléctrica a 2000°C:  $\rho_f = \rho_i \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T + \beta \cdot \Delta T^2) =$

$\rho_f = 18,9^{-1}$  [ $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ ]  $\cdot \{1 + 3,9 \times 10^{-3}$  [ $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ]  $\cdot (2000 - 20)$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] +  $1 \times 10^{-6}$  [ $^{\circ}\text{C}^{-2}$ ]  $\cdot (2000 - 20)^2$  [ $^{\circ}\text{C}^2$ ]}  
 $\Rightarrow \rho_f = 0,6585$  [ $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ ]

Longitud del filamento:  $\ell = R \cdot A / \rho = 1210$  [ $\Omega$ ]  $\cdot 3,801 \times 10^{-4}$  [mm<sup>2</sup>] /  $0,6585$  [ $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ ]  $\Rightarrow \ell = 0,7$  [m]

Densidad de corriente:  $J = I / A = 0,182$  [A] /  $3,801 \times 10^{-4}$  [mm<sup>2</sup>]  $\Rightarrow J = 478,3$  [A/mm<sup>2</sup>]

Intensidad del campo eléctrico:  $E = V / \ell = 220$  [V] /  $0,7$  [m]  $\Rightarrow E = 0,3143$  [V/mm]

Movilidad de los electrones libres:  $\mu = J / (n \cdot q \cdot E) \Rightarrow$

$\mu = 478,3$  [A/mm<sup>2</sup>] / ( $12,644 \times 10^{19}$  [e/mm<sup>3</sup>]  $\cdot 1,6 \times 10^{-19}$  [C/e]  $\cdot 0,3143$  [V/mm])  $\Rightarrow \mu = 75,22$  [mm<sup>2</sup>/V.s]

Velocidad de deriva:  $v = \mu \cdot E = 75,22$  [mm<sup>2</sup>/V.s]  $\cdot 0,3143$  [V/mm]  $\Rightarrow v = 23,64$  [mm/s]

**Observamos en este último ejemplo la resistividad aumentada muchas veces por efecto de la temperatura.**

**Para alcanzar temperaturas tan elevadas, la densidad de corriente es mucho mayor que en los ejemplos 1 y 2.**

**La velocidad de deriva aumenta y por lo tanto la energía puesta en juego en las colisiones y la movilidad de los portadores es mucho menor debido a la estructura cristalina y al elevado tránsito de portadores.**

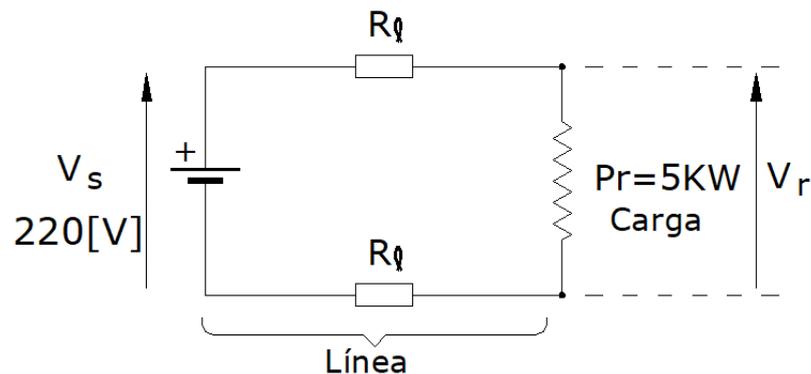
**Cuanto más abierta es la red y menos portadores circulan y la movilidad aumenta, esto ocurre en los semiconductores como por ej el Germanio, donde la movilidad de los electrones libres es de 150000 [mm<sup>2</sup>/V.s] .**

**Ej. 4)** Una resistencia de carga invariable con la temperatura, es de una potencia de 5500 W con 220 V de tensión nominal, la misma es alimentada desde una fuente de 220 V, con un par de conductores de cobre de

30 m de largo y  $4 \text{ mm}^2$  de sección recta con de 2,54 mm de diámetro; aislados en PVC, cuya temperatura límite de trabajo es  $70^\circ\text{C}$ .

Considerando que la capacidad de conducir corriente del conductor es de 28 [A] dentro de un caño embutido en la pared y la temperatura ambiente es de  $35^\circ\text{C}$ . Determinar:

- La corriente, la tensión y la potencia de la carga, inicial, o sea inmediatamente luego de la conexión.
- La corriente, la tensión y la potencia de la carga, una vez que los conductores alcanzaron la temperatura de equilibrio.
- La caída de tensión en la línea de alimentación en valor absoluto y relativo porcentual, en la condición de régimen.
- La pérdida de potencia en la línea de alimentación y el rendimiento de la misma.



La resistividad del cobre a  $20^\circ\text{C}$  es de  $0,01786 \text{ } [\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}]$

Coefficiente de temperatura lineal a  $20^\circ\text{C}$  es de  $3,93 \times 10^{-3} \text{ } [1/^\circ\text{C}]$

Coefficiente de radiación térmica  $k = 11,5 \text{ } [\text{W}/\text{m}^2]$

Calculamos:

**a)**

Corriente de carga en condiciones nominales:  $I_r = P_r / V = 5500 / 220 \Rightarrow I_r = 25 \text{ } [\text{A}]$

Resistencia de carga en condiciones nominales:  $R_r = V^2 / P_r = 220^2 / 5000 \Rightarrow R_r = 8,8 \text{ } [\Omega]$

Resistencia de los conductores a  $20^\circ\text{C}$ :  $R_{l20} = \rho_{20} \cdot \ell / A = 0,01786 \cdot 30 / 4 \Rightarrow R_{l20} = 0,134 \text{ } [\Omega]$

Resistencia de los conductores a la temperatura ambiente:  $R_{l35} = R_{l20} \cdot [1 + \alpha_{20} \cdot (35 - 20)] \Rightarrow$

$$R_{l35} = 0,142 \text{ } [\Omega]$$

La condición inicial del circuito es la correspondiente a la temperatura ambiente ( $35^\circ\text{C}$ ), debido a que el conductor aún no alcanzó a calentarse por efecto Joule. Calculamos la corriente en esta condición:

$$I_r' = V / (2 R_{l35} + R_r) = 220 / (2 \cdot 0,142 + 8,8) = 220 \text{ V} / 9,084 \text{ } \Omega \Rightarrow I_r' = 24,22 \text{ } [\text{A}]$$

Se observa una disminución de la corriente al aumentar la temperatura y por lo tanto también de la tensión en el receptor, ya que habrá que considerar una caída de tensión en la línea ( $R_{l20}$ ). Otra consecuencia de esta disminución de la corriente es la potencia del receptor que no alcanzará a ser la nominal.

$$\text{Caída de tensión en la línea: } V_{l'} = 2 \cdot R_{l35} \cdot I_r' = 0,284 \cdot 24,22 \text{ A} = 6,87 \text{ A}$$

$$\text{Caída de tensión en el receptor de carga: } V_r' = V_s - V_{l'} = 220 - 6,87 = 213,13 \text{ } [\text{V}]$$

$$\text{ó } V_r' = R_r \cdot I_r' = 8,8 \text{ } \Omega \cdot 24,22 \text{ A} = 213,13 \text{ } [\text{V}]$$

Potencia en el receptor de carga:  $Pr' = Vr' \cdot Ir' = 213,22 \text{ V} \cdot 24,22 \text{ A} \Rightarrow Pr' = 5161,68 \text{ [W]}$

Consecuencia de la temperatura:  $5161,68 \text{ W} < 5500 \text{ W}$

**b)**

Ahora consideraremos la elevación de la temperatura por efecto Joule, condición que se da en el circuito una vez que se alcanza el equilibrio térmico. Esto es un tiempo posterior, que se calcula teniendo en cuenta la constante de tiempo. Ver ecuación (31) y gráfica (11).

La sobrettemperatura por efecto Joule, sin considerar la variación de la resistividad con la temperatura, será:

$$\theta = \frac{4 \cdot \rho \cdot I^2}{k \cdot \pi^2 d^3} = \frac{4 \cdot 1,786 \cdot 10^{-8} [\Omega \cdot m] \cdot (24,22 [A])^2}{11,5 \left[ \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \right] \cdot \pi^2 \cdot (2,55 \cdot 10^{-3} [m])^3} \Rightarrow \theta = 22,4 \text{ } ^\circ C$$

La temperatura de estabilidad térmica, será:  $T_f = T_{amb} + \theta = 35 + 22,4 \Rightarrow T_f = 57,4 \text{ } ^\circ C$

La condición final del circuito es la correspondiente a la temperatura final del conductor ( $57,4^\circ C$ ). Ahora la resistividad del mismo, aplicando la ecuación (16) será:

$$\frac{Rl_f}{T_f + 234,5} = \frac{Rl_i}{T_i + 234,5} \Rightarrow Rl_f = Rl_i \cdot \frac{T_f + 234,5}{T_i + 234,5} \Rightarrow Rl_f = 0,142 \cdot \frac{57,4 + 234,5}{35 + 234,5}$$

$$Rl_f = 0,152 \text{ } [\Omega]$$

Calculamos la corriente para la condición final (equilibrio térmico), las caídas de tensión y potencias:

$$\text{Corriente: } Ir'' = V / (2 Rl_{57} + R_r) = 220 / (2 \cdot 0,152 + 8,8) = 220 \text{ V} / 9,104 \text{ } \Omega \Rightarrow Ir'' = 24,165 \text{ [A]}$$

$$\text{Caída de tensión en la línea: } Vl'' = 2 \cdot Rl_{57} \cdot Ir'' = 0,304 \cdot 24,17 \text{ A} \Rightarrow Vl'' = 7,35 \text{ A}$$

$$\text{Potencia consumida por la línea: } Pl'' = 2 \cdot Rl_{57} \cdot Ir''^2 = 0,304 \cdot 24,17^2 \Rightarrow Pl'' = 177,52 \text{ A}$$

$$\text{Caída de tensión en el receptor de carga: } Vr'' = Vs - Vl'' = 220 - 7,35 \Rightarrow Vr'' = 212,65 \text{ [V]}$$

$$\text{ó } Vr' = R_r \cdot Ir' = 8,8 \text{ } \Omega \cdot 24,17 \text{ A} = 212,65 \text{ [V]}$$

$$\text{Potencia en el receptor de carga: } Pr'' = Vr'' \cdot Ir'' = 212,65 \text{ V} \cdot 24,17 \text{ A} \Rightarrow Pr'' = 5138,82 \text{ [W]}$$

$$\text{Potencia suministrada por la fuente: } Ps'' = Vs \cdot Ir'' = 220 \text{ V} \cdot 24,17 \text{ A} \Rightarrow Ps'' = 5316,34 \text{ [W]}$$

Balance de potencias

La potencia suministrada debe ser igual a la suma de las potencias consumidas; la útil, supuesta en el receptor de carga y la perdida en forma de calor en la línea:

$$Ps'' = Pr'' + Pl'' \Rightarrow 5316,34 \text{ W} = 5138,82 \text{ W} + 177,52 \text{ W}$$

Con los valores calculados podemos determinar la caída de tensión relativa porcentual de la línea (el valor de referencia es el nominal, en este ej 220 V) y el rendimiento de la misma y lo hacemos para la condición final de equilibrio.

c) Caída de tensión porcentual de la línea, también llamada Regulación:

$$\Delta V\% = \frac{V_S - V_r}{V_{r_{nom}}} * 100 \Rightarrow \Delta V\% = \frac{V_l}{V_{r_{nom}}} * 100 \Rightarrow \Delta V\% = \frac{7,35 V}{220 V} * 100 = 3,34 \%$$

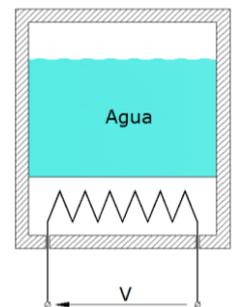
d) Rendimiento que es la relación entre la potencia útil o aprovechada (del receptor de carga) y la potencia suministrada por la fuente:

Potencia perdida en la línea:  $P_{l''} = 177,52 \text{ A}$

$$\text{Factor de pérdida: } \eta = \frac{P_l}{P_s} * 100 \Rightarrow Fp = \frac{177,52}{5316,34} * 100 = 3,34 \%$$

$$\text{Rendimiento: } \eta = \frac{P_r}{P_s} * 100 = \left( \frac{P_s - P_l}{P_s} \right) * 100 \Rightarrow \eta = \frac{5138,82}{5316,34} * 100 = 96,66 \%$$

**Ej. 5)** Se construye un calentador de agua con una resistencia de Níquel-Cromo-Hierro cuyo alambre posee un diámetro **0,6 [mm]** para trabajar con una densidad de corriente de **28,5 [A/mm<sup>2</sup>]**, alimentada con una tensión de **220 [V]**. Determinar:



- La corriente y potencia de consumo.
- La longitud de alambre despreciando la variación de la resistencia con la temperatura.
- El tiempo que demora en calentar **10 litros** de agua, desde **20 a 100 °C**.
- Si además del tiempo de calentamiento, demora **10 minutos** endescargar el agua caliente y **10 minutos** más en volver a cargar agua a **20 °C**, repitiendo este ciclo durante **9 hs 12 m'** por día. ¿Qué consumo y costo de la energía eléctrica tendría en un mes, considerando que la misma cuesta **7 [\$/KW.h]** y la caldera tiene un rendimiento del **90 %**.
- ¿Cuánta energía se pierde?

Datos:

Agua: Calor específico del agua  $c_{ag} = 4186 \text{ [J/Kg.°K]}$ ; Densidad  $\delta_{ag} = 1 \text{ [kg/dm}^3\text{]}$

Nicrome: Resistividad  $\rho_{20} = 1,12 \text{ [\Omega mm}^2\text{/m]}$ ; Coeficiente de temperatura  $\alpha_{20} = 0,893 \times 10^{-3} \text{ [1/°C]}$

Solución:

a)

Determinamos primero la sección transversal del conductor:

$$A = \pi \cdot d^2 / 4 = \pi \cdot 0,6^2 / 4 \Rightarrow A = 0,283 \text{ [mm}^2\text{]}$$

Con el área y la densidad de corriente obtenemos la corriente:

$$I = J \cdot A = 28,5 \text{ A/mm}^2 \cdot 0,283 \text{ mm}^2 \Rightarrow I = 8,06 \text{ [A]}$$

La resistencia de calefacción en condición de régimen, esto es cuando alcanza una temperatura de equilibrio de **100 °C** (temperatura a la que hierve el agua), será:

$$R_f = V / I = 220 \text{ V} / 8,06 \text{ A} \Rightarrow R_f = 27,3 \text{ [\Omega]}$$

La potencia será:  $P = V \cdot I = 220 \text{ V} \cdot 8,06 \text{ A} \Rightarrow P = 1772,8 \text{ [W]}$

b)

La resistividad a 100 °C será:  $\rho_{100} = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta T) = 1,12 \cdot [1 + 0,893 \times 10^{-3} \cdot (100 - 20)]$   
 $\Rightarrow \rho_{100} = 1,20 \text{ } [\Omega \text{ mm}^2/\text{m}]$

Calculo de la longitud de alambre, de la ecuación (15):  $\ell = R_f \cdot A / \rho = 27,3 \cdot 0,283 / 1,20 \Rightarrow$   
 $\ell = 6,44 \text{ [m]}$

c)

La cantidad de calor necesaria para aumentar 80 °C la temperatura de la masa de agua, según la ecuación general de la calorimetría, será:  $Q = m \cdot C_{ag} \cdot \Delta T$

Volumen = 10 lt . 1 dm<sup>3</sup>/lt = 10 dm<sup>3</sup>

mag = Volumen .  $\delta_{ag} = 10 \text{ dm}^3 \cdot 1 \text{ kg/dm}^3 = 10 \text{ Kg}$

$Q = 10 \text{ kg} \cdot 4186 \text{ J/Kg} \cdot 80 \text{ } ^\circ\text{C} \Rightarrow Q = 3348800 \text{ [J]}$  Energía térmica consumida (útil)

Como esta energía representa el 90 % de la suministrada; porque el 10% de perderá, ya que la caldera no tiene una aislación perfecta, entonces no podrá transmitir toda la energía térmica desde la resistencia eléctrica al agua, ya que parte se intercambiara con el ambiente a través de las paredes de la caldera. Aplicando el concepto de rendimiento, tendremos:

$\eta = (\text{Energía útil} / \text{Energía consumida}) \cdot 100 = (E_u / E_c) \cdot 100 \Rightarrow E_c = (E_u / \eta) \cdot 100$

$E_c = (E_u / \eta) \cdot 100 = (3348800 / 90) \cdot 100 = 3348800 / 0,9 \Rightarrow E_c = 3720889 \text{ [J]}$

Esta es la energía que debe entregar la resistencia de calefacción, para abastecer los 3348800 J que necesita el agua para calentarse más los 372089 J (3720889 J - 3348800 J) que se pierden al ambiente.

Como la energía es la integración de la potencia en el tiempo:  $E = P \cdot t$

Entonces el tiempo de calentamiento deberá ser:  $t = E_c / P = 3720889 \text{ J} / 1772,8 \text{ W} \Rightarrow$

$$t = 2098,88 \text{ [s'']}$$

$t = 2098,88 \text{ [s'']} / 60 \text{ [s''/m']} = 34,98 \text{ [m']} \Rightarrow t \approx 35 \text{ [m']}$

d)

Tenemos un proceso cíclico de 10 m' de carga + 35 m' de calentamiento + 10 m' de descarga, que se repite durante el tiempo estipulado de 9 h 12 m'.

El tiempo total en el sistema decimal será en segundos  $t_d = 9 \cdot 3600 + 12 \cdot 60 = 33120 \text{ s''}$

Duración del ciclo de trabajo:  $T_c = 55 \text{ m'}$

Calculamos la energía de consumo durante un día de trabajo si la resistencia de calentamiento consume energía eléctrica durante 35 m' de los 55 m' que dura el ciclo:

$$E_d = (t / T_c) \cdot t_d \cdot P = \underbrace{(35\text{m}'/55\text{m}') \cdot 33120 \text{ [s'']}}_{21076,36 \text{ s''}} \cdot 1772,8 \text{ [W]} \Rightarrow E_d = 37364177,5 \text{ [J]}$$

$$21076,36 \text{ s''}$$

Tiempo de consumo eléctrico durante un día de trabajo

Expresado en KW.h:  $E_d = 37364177,5 \text{ [J]} / 3600000 \text{ [J/KW.h]} \Rightarrow E_d = 10,38 \text{ [KW.h]}$

Si el ciclo de trabajo se repite todos los días durante un mes el consumo mensual será:

$$E_m = E_d \cdot 30 = 10,38 \text{ [KW.h]} \cdot 30 \Rightarrow E_m = 311,37 \text{ [KW.h]}$$

El costo de este consumo eléctrico será de:

$$C_m = E_m \cdot c_u = 311,37 \text{ [KW.h]} \cdot 10 \text{ [$/KW.h]} \Rightarrow C_m = 3113,7 \text{ \$}$$

e)

La potencia perdida es en la misma proporción que la energía o sea un (100 - 90) % de 1772,8 W.

Potencia perdida:  $P_p = (10/100) \cdot P = 0,1 \cdot 1772,8 \text{ W} \Rightarrow P_p = 177,28 \text{ [W]}$  (energía instantánea).

Energía perdida durante un día:  $E_{pd} = (t / T_c) \cdot t_d \cdot P_p \Rightarrow$

$$E_{pd} = (35m' / 55m') \cdot 33120 \text{ [s'']} \cdot 177,28 \text{ [W]} \Rightarrow E_{pd} = 3736417,75 \text{ [J]}$$

$$E_{pd} = 3736417,75 \text{ [J]} / 3600000 \text{ [J/KW.h]} \Rightarrow E_d = 1,038 \text{ [KW.h]}$$

$$E_{pm} = E_d \cdot 30 = 1,038 \text{ [KW.h]} \cdot 30 \Rightarrow E_{pm} = 31,14 \text{ [KW.h]}$$