1 - CAPACITARES Y CAPACIDAD

Sean dos placas metálicas paralelas separadas por vacío una distancia **d**, ambas con cargas eléctricas **Q** de distinto signo, sostenidas por una diferencia de potencial **V** (considerando que la separación entre placas es pequeña), tenemos según la ley de Gauss que:

$$\phi e = \oint \vec{E} \ . \ \overrightarrow{dA} \ = \ \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad (23)$$

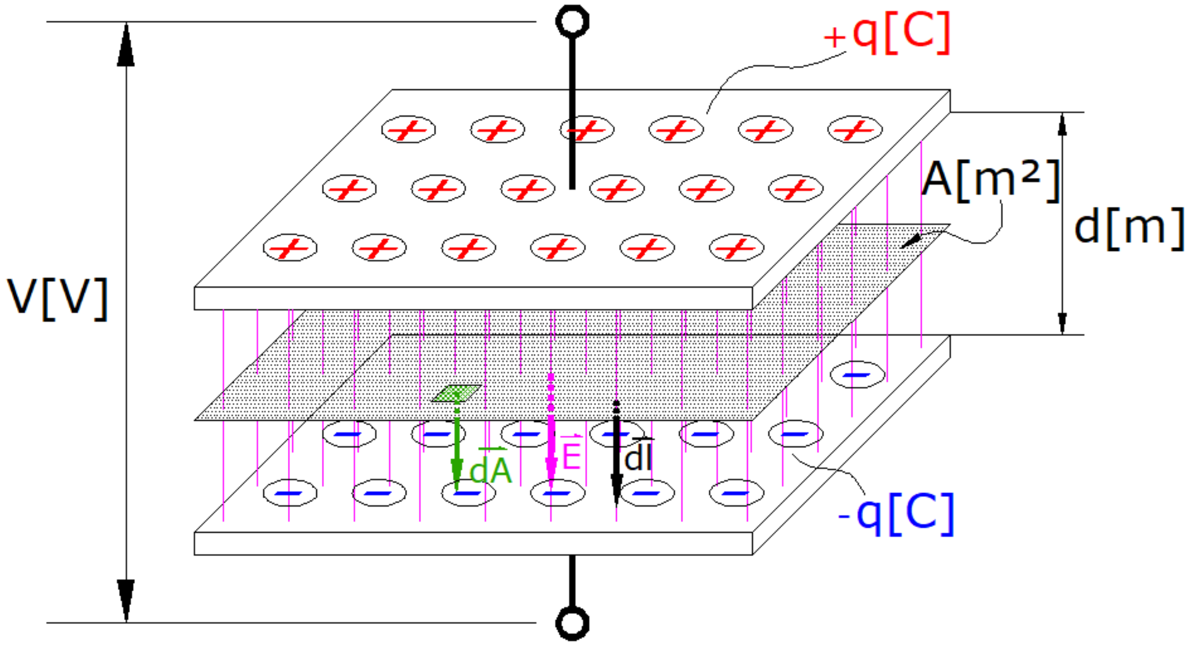


Fig. 9: Capacitor de placas paralelas.

Donde:

Φe: Flujo Eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana en **[V.m]**

E: Intensidad del Campo Eléctrico en **[V/m]**

dA: Superficie elemental en **[m²]**

ε_0: Constante de Permitividad eléctrica del vacío; (**8,8542 x 10^{-12} [C²/N.m²]**)

Q_{enc}: Carga Eléctrica encerrada por la superficie gaussiana en **[C]** ≡[Coulomb].

Como los vectores de Intensidad de campo Eléctrico **E** y de superficie elemental **dA** están a **0°** entre sí, su producto escalar es igual a: **E . dA . Cos 0° = E . dA**, entonces la expresión (23) queda:

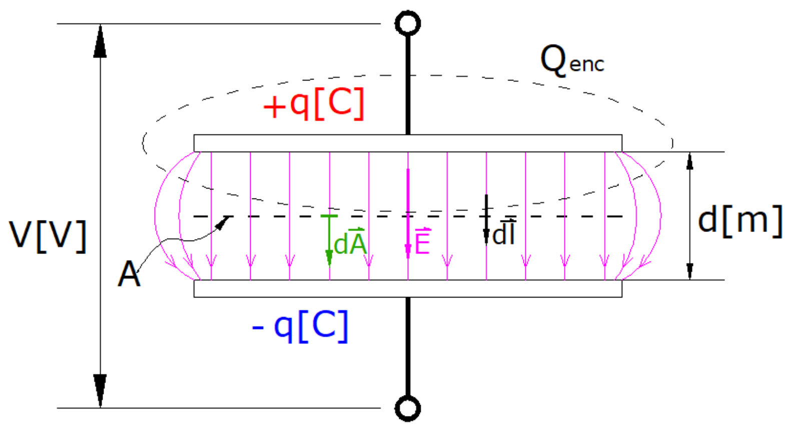


Fig. 10: Capacitor de placas paralelas(vista lateral en corte)

$$\phi e = \oint E \,.\, dA = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

y como la intensidad del campo eléctrico entre las placas es constante (lejos de los bordes), por estar uniformemente distribuido, podemos sacarlo de la integración $\phi e = E \oint dA = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$; la integral de superficie será igual al área entre las placas

$$\boxed{\phi e = E \,.\, A = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}} \qquad (24)$$

Considerando además que, la Intensidad del campo Eléctrico es equivalente a la variación de la diferencia de potencial eléctrico respecto de la distancia: $E = \frac{dV}{dl}$

$$\Rightarrow dv = \vec{E} \,.\, \vec{dl} \;\Rightarrow V = \int \vec{E} \,.\, \vec{dl} = \int E \,.\, dl \,.\, Cos\, 0° = \int E \,.\, dl = E \int dl$$

$$\boxed{V = E \,.\, d} \qquad (25)$$

De la expresión (24): $Q_{enc} = \varepsilon_0 \,.\, E \,.\, A$

De la expresión (25): $E = \frac{V}{d}$

Uniendo estas dos expresiones: $Q_{enc} = \varepsilon_0 \,.\, \frac{V}{d} \,.\, A \;\Rightarrow\; Q_{enc} = \varepsilon_0 \,.\, \frac{A}{d} \,.\, V$

Tanto la carga almacenada, como la tensión pueden ser variables en el tiempo y guardan una proporcionalidad entre ellas que denominamos **Capacidad** $C = \frac{\varepsilon_0 . A}{d}$ (26) y su unidad de medida será el Faradio **[F]**.

Se define entonces a la Capacidad como la relación entre la Carga eléctrica almacenada en función de la tensión: $C = \frac{dq}{dv}$ (27).

De la expresión (27) incorporando el tiempo en las variaciones de tensión y carga eléctrica, tenemos: $\frac{dq}{dt} = C \,.\, \frac{dv}{dt}$ y la variación de la carga en la unidad de tiempo representa la Intensidad de corriente eléctrica **i** en **[A]**; hemos llegado así a relacionar la Corriente con la Tensión en un circuito con Capacidad eléctrica.

$$i = C \,.\, \frac{dv}{dt} \quad (28) \qquad \text{ó} \qquad v = \frac{1}{C} \,.\, \int i \,.\, dt \quad (29)$$

En el caso de la expresión (26) si consideramos que las placas están separadas por otro medio dieléctrico que el vacío, debemos incorporar en la ecuación un nuevo parámetro que multiplica a la Permitividad eléctrica del vacío por un número adimensional, denominado **Constante Dieléctrica** del material **Kd**: $C = \varepsilon_0 \,.\, K_d \,.\, \frac{A}{d}$ (30)

Con los distintos materiales se busca aumentar el valor de la Capacidad, o sea que utilizaremos materiales con **Kd >1**, por ej el Polietileno con **Kd = 2,3**. Ahora bien otro factor que utilizamos para aumentar **C** es la disminución de la distancia entre placas y aquí encontramos una limitante que es: a) La capacidad de laminarse del material dieléctrico y su flexibilidad, y; b) Su Capacidad de Ruptura, esto quiere decir la capacidad de mantenerse aislante con la tensión aplicada; por ej. la capacidad de ruptura del aire es de aproximadamente **1800 [V/mm] ≡ 18 [KV/cm]** y la del polietileno es de **400 [KV/cm]**.

2 - CIRCUITO R-C EN SERIE ANTE UNA TENSIÓN ESCALÓN

Ahora estudiaremos como se comporta la corriente en este circuito cuando es sometido a una tensión escalón, o sea una tensión continua que, antes de cerrar el interruptor vale cero y luego de cerrarlo vale **ɛ** (Por ej. Fuerza electromotriz de una pila).

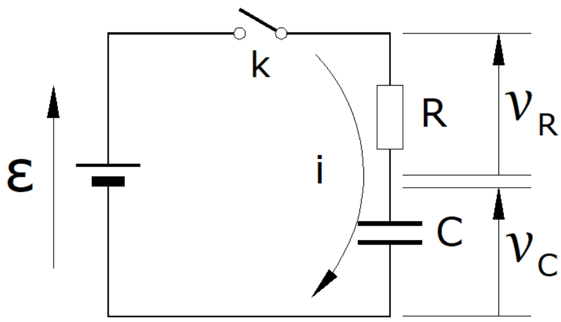


Fig.11

Según la 2da ley de Kirchhoff : $\boxed{v(t) = v_R(t) + v_C(t) \;\Rightarrow\; v = R\,.\,i + \frac{1}{C}\int i\,.\,dt}$ (31)

Si dividimos miembro a miembro por R entonces tenemos: $\frac{v}{R} = i + \frac{1}{R\,.C}\int i\,.\,dt$; donde

$R.C = \tau_C$ representa una constante de tiempo capacitiva en **[s]** ya que **[Ω .F] ≡[Ω. C/V]=[s]**

La ecuación diferencial quedará: $\frac{v}{R} = i + \frac{1}{\tau_C}\int i\,.\,dt$ (32)

Recordando que **i = dq / dt** y reemplazando en (32): $\frac{v}{R} = \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau_C}\int \frac{dq}{dt}\,.\,dt$

$$\Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau_C}\int dq \quad \Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau_C}\,.\,q$$

Multiplicando miembro a miembro por **R.C** nos queda:

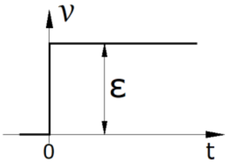
$$v\,.C = R.C.\frac{dq}{dt} + q = \tau_C.\frac{dq}{dt} + q \qquad (33)$$

Ecuación diferencial donde: $$\boldsymbol{v(t)} = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \varepsilon & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Para la resolución de la ecuación diferencial (33), analizaremos dos puntos característicos: **a)** cuando la tensión aplicada pasa de 0 a **ε** y **b)** cuando la tensión aplicada pasa de **ε** a 0.

a)

Si $v_{(0)}$ **= ε**



$$\Rightarrow \varepsilon\,.C = \tau_C.\frac{dq}{dt} + q \;; \text{ donde } \varepsilon\,.C = \hat{Q}$$

$\hat{Q}$:Carga máxima que puede almacenar el capacitor.

$$\Rightarrow \varepsilon\,.C = \tau_C.\frac{dq}{dt} + q \;\Rightarrow\; \hat{Q} - q = \tau_C.\frac{dq}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dt}{\tau_C} = \frac{dq}{\hat{Q} - q}$$

Integrando miembro a miembro esta última expresión: $\int dt/\tau_C = \int di/(\hat{Q} - q)$

Resulta: $\boxed{t/\tau_C = -\ln(\hat{Q} - q) + Ki}$ (34)

Para determinar la constante de integración tomamos un punto conocido de la función en **t = 0**; donde sabemos la carga **q = 0**; entonces: $0 = -\ln(\hat{Q}) + Ki \quad \Rightarrow \quad Ki = \ln(\hat{Q})$

Reemplazando el valor de la constante de integración en la expresión (34), obtenemos:

$$t/\tau_C = \ln(\hat{Q}) - \ln(\hat{Q} - q) \quad (35)$$

y por propiedad del logaritmo:

$$\frac{t}{\tau_C} = \ln\left(\frac{\hat{Q}}{\hat{Q}-q}\right) \quad (36) \quad \Rightarrow e^{t/\tau_C} = \frac{\hat{Q}}{\hat{Q}-q} \Rightarrow \hat{Q} - q = \frac{\hat{Q}}{e^{t/\tau_C}} \;\Rightarrow\; q = \hat{Q} - \frac{\hat{Q}}{e^{t/\tau_C}}$$

Finalmente podemos expresar la solución de la ED como: $q = \hat{Q}\,.\left(1 - e^{-t/\tau_C}\right)$ (36)

La corriente será por lo tanto: $i = \dfrac{dq}{dt}$; y derivando la carga respecto del tiempo tenemos:

$$i = \frac{d(\hat{Q} - \hat{Q}.e^{-t/\tau_C})}{dt} \Rightarrow i = -\hat{Q}.e^{-t/\tau_C}.\left(-\frac{1}{\tau_C}\right) \Rightarrow i = \frac{\hat{Q}}{\tau_C}.e^{-t/\tau_C} \Rightarrow i = \frac{\varepsilon\,.C}{R\,.C}\,.e^{-t/\tau_C}$$

$i = \dfrac{\varepsilon}{R}\,.e^{-t/\tau_C} = \hat{I}\,.e^{-t/\tau_C}$ (37) donde $\hat{I} = \dfrac{\varepsilon}{R}$, es la corriente máxima del circuito cuando el capacitor se encuentra sin carga eléctrica inicial.

La tensión en el capacitor es proporcional a la carga $\Rightarrow\ v_C = \frac{1}{C}.\int i\,.dt = \frac{1}{C}\,.q\ \Rightarrow$ la tensión será: $v_C = \frac{\hat{Q}}{C}.\left(1 - e^{-t/\tau_C}\right)$ donde $\varepsilon = \hat{Q}/C \Rightarrow$ $v_C = \varepsilon.\left(1 - e^{-t/\tau_C}\right)$ (39)

La corriente (expresión 37) y la tensión entre placas del capacitor (expresión 39), a partir de una tensión escalón ascendente, quedan representadas en función del tiempo, por las siguientes gráficas.

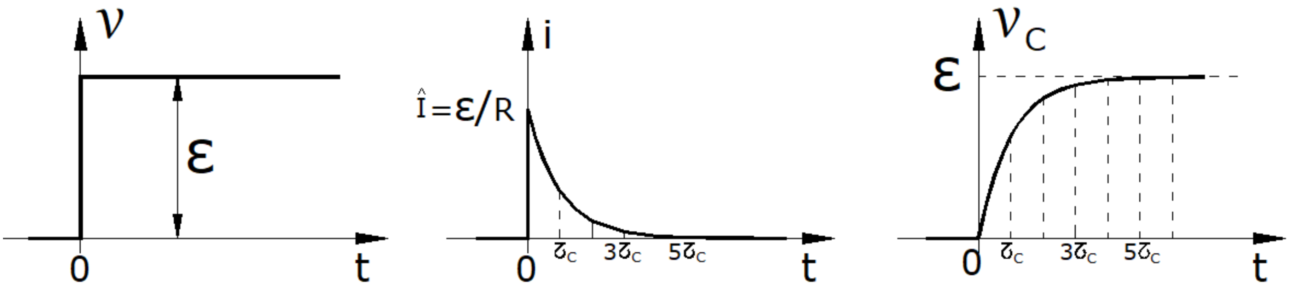


Fig.12

Ahora vamos a suponer que el interruptor ***K*** pasa a la posición que se indica en la figura 13; cortocircuitando el capacitor; la tensión de alimentación que antes valía **E** pasa a valer **0**. En tal caso la corriente no se agotará instantáneamente, sino que irá disminuyendo de a poco, sostenida por una tensión almacenada por el campo eléctrico en el capacitor y será de sentido contrario a la anterior.

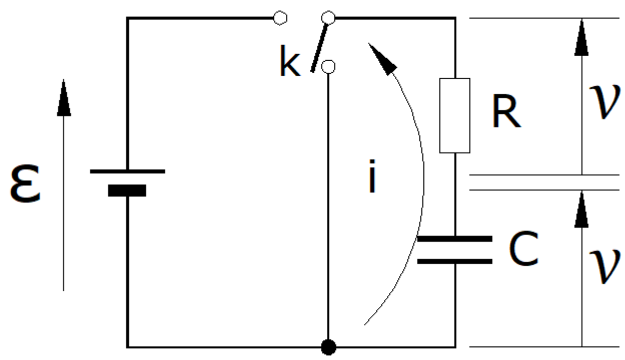
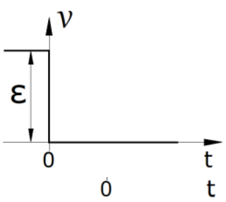


Fig.13

Este fenómeno se debe a que, existe una energía almacenada en el campo eléctrico producido por las cargas almacenadas en las placas del capacitor.

b)

Si $v_{(0)}$ = 0



$$\Rightarrow 0 = \tau_C.\frac{dq}{dt} + q \ \Rightarrow\ -q = \tau_C.\frac{dq}{dt} \ \Rightarrow\ -\frac{\mathrm{dt}}{\tau_C} = \frac{dq}{dt}$$

Integrando miembro a miembro esta última expresión: $\int \frac{dt}{\tau_C} = -\int \frac{dq}{q}$

Resulta: $t/\tau_C = -\ln q + Ki$ (40)

Para determinar la constante de integración tomamos un punto conocido de la función en **t = 0;** donde sabemos la carga $q = \hat{Q}$; entonces: $0 = -\ln \hat{Q} + Ki \quad \Rightarrow \quad Ki = \ln \hat{Q}$

Reemplazando el valor de la constante de integración en la expresión (40), obtenemos: $t/\tau_C = -\ln(q) + \ln(\hat{Q})$ y por propiedad del logaritmo: $t/\tau_C = \ln(\hat{Q}/q)$ (41)

$$\Rightarrow \quad e^{t/\tau_C} = \frac{\hat{Q}}{q} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\hat{Q}}{e^{t/\tau_C}} \quad \Rightarrow$$

Finalmente podemos expresar la solución de la ED como: $q = \hat{Q}.e^{-t/\tau_C}$ (42)

En este caso para calcular **i** derivamos **q(t)** respecto del tiempo: $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d\left(\hat{Q}.e^{-t/\tau_C}\right)}{dt}$

$$i = \frac{\hat{Q}}{\tau_C}.e^{-t/\tau_C}$$ (43) y como $\hat{Q} = \varepsilon . C \Rightarrow i = -\dfrac{\varepsilon . C}{R . C} . e^{-t/\tau_C} \Rightarrow i = -\dfrac{\varepsilon}{R} . e^{-t/\tau_C}$

$i = -\hat{I}.e^{-t/\tau_C}$ (44) Que como vemos es igual que la anterior cambiada de signo, lo que quiere decir que en el capacitor se invierte el sentido de la corriente.

La tensión en el capacitor es proporcional a la carga: $\Rightarrow$ $v_C = \varepsilon . e^{-t/\tau_C}$ (45)

La corriente (ecuación 44) y la tensión entre placas del capacitor (ec. 45), a partir de una tensión escalón descendente, quedan representadas en función del tiempo, por las siguientes gráficas.

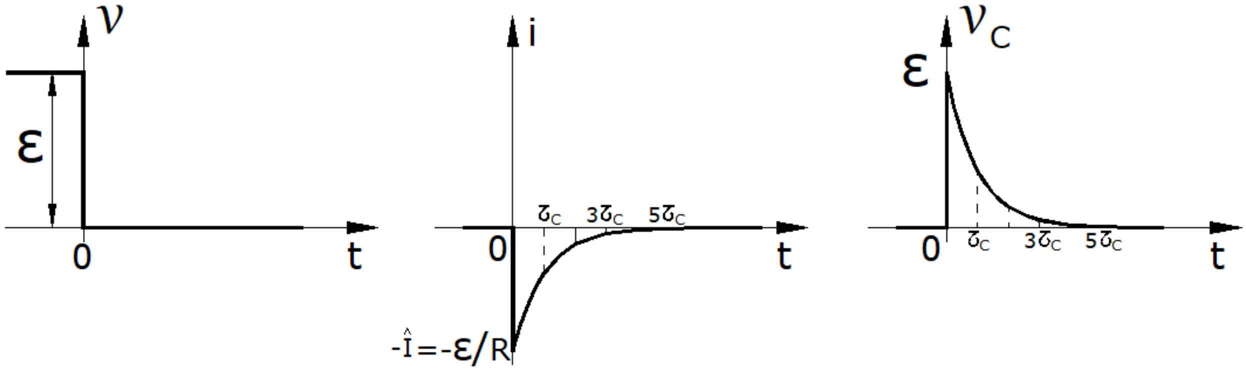


Fig. 14

Cuando ha transcurrido un tiempo $t = \tau_C$ la función adquiere un valor $i_{(\tau_C)} = \hat{I} . e^{-\tau_C/\tau_C} \Rightarrow$ $i_{(\tau_C)} = \hat{I}.e^{-1} \Rightarrow$ $i_{(\tau_C)} = 0{,}368 . \hat{I}$ (46)

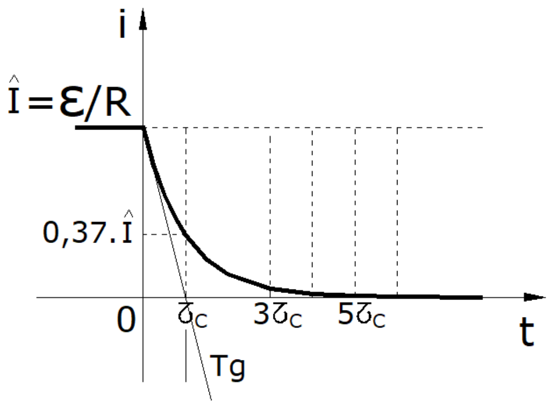


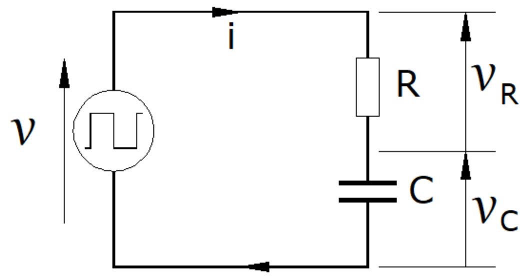
Fig. 15

3 - CIRCUITO R-C EN SERIE CON TENSIÓN CUADRADA PERIÓDICA

Si a una bobina con resistencia e inductancia, le aplicamos una tensión cuadrada periódica:

$$\boldsymbol{v(t)} = \begin{cases} \varepsilon \quad si \quad 0 + n.T \leq t \ \leq {}^{T}/_{2} + n.T \\ 0 \quad si \quad {}^{T}/_{2} + n.T \ \leq t \ \leq T + n.T \end{cases}$$ con n = 0; 1; 2; 3; …..n

Obtenemos:



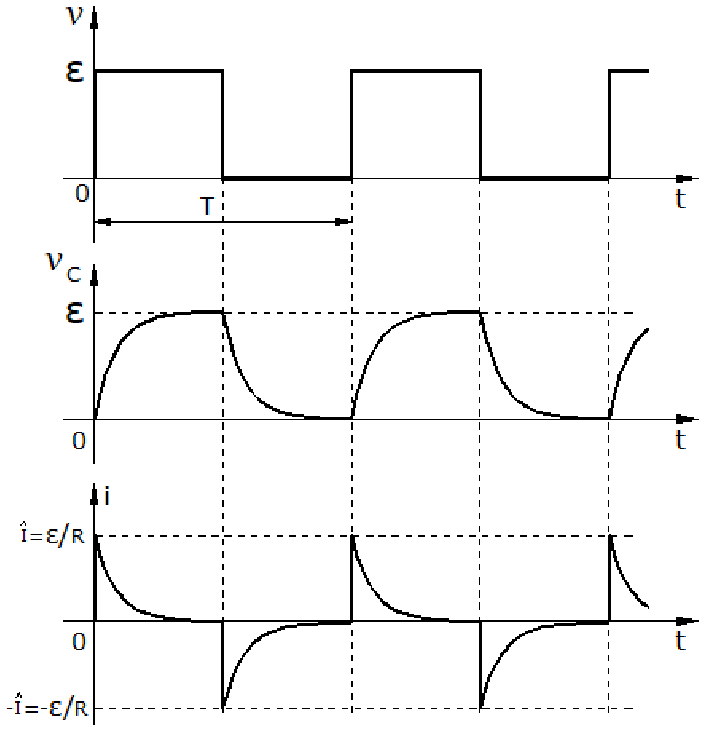


Fig. 16

Fig. 17: Imágenes de capacitores:
Arriba a la izquierda se observan distintos tipos y tamaños de capacitores electrolíticos (Polarizados, para corriente continua) de uso en circuitos eletrónicos, otros cerámicos y uno variable. Arriba a la derecha, se observan capacitores de potencia de uso en corriente alterna de baja tensión, para la corrección del factor de potencia en instalaciones industriales.
Abajo se muestran, bancos de capacitores de alta tensión (115 KV), para lacorrección del factor de potencia en líneas de transmisión.

4 – CONEXIÓN DE CAPACITORES

CONEXIÓN EN PARLELO

Dos capacitores están conectados en paralelo si sus placas homólogas (en el dibujo las superiores) se conectan mediante alambres de conexión a un polo de la tensión, por ej borne **a**, formando una superficie equipotencial; y las otras placas (las inferiores) se conectan al otro polo, borne **b**, formando la otra superficie equipotencial; Ver figura 18-a. Entonces, en una conexión en paralelo, la diferencia de potencial para todos los capacitores individuales es la misma, e igual a $V_{ab} \equiv V$. Sin embargo las cargas Q_1 y Q_2 no son necesariamente iguales, esto depende de las dimensiones de cada capacitor.

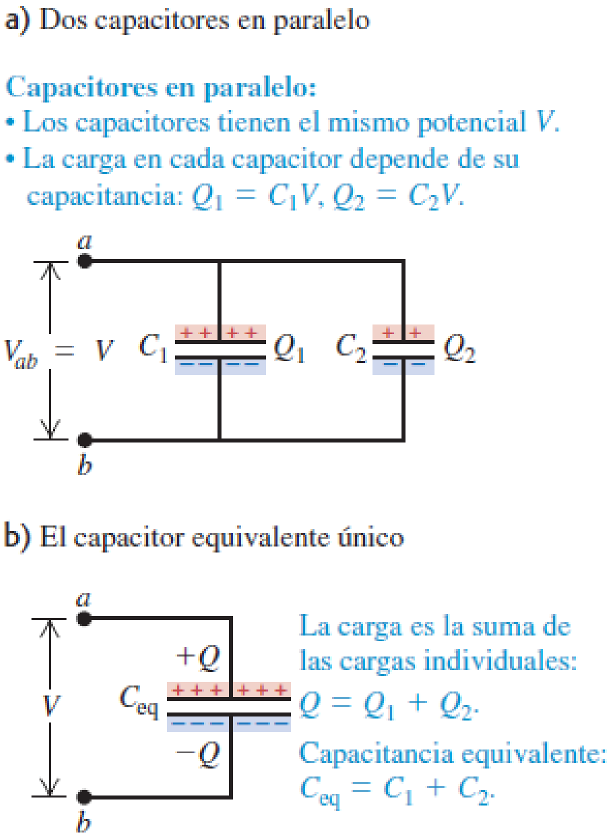


Fig. 18: Capacitores en paralelo y su equivalente.

La cantidad de carga que va a recibir un capacitor depende de la tensión, en este caso igual para ambos capacitores y de su capacidad:

$$Q_1 = V \cdot C_1 \qquad \text{y} \qquad Q_2 = V \cdot C_2$$

La carga total **Q** de la combinación y por consiguiente del capacitor equivalente es la suma de las cargas individuales: $Q = Q_1 + Q_2 = V \cdot C_1 + V \cdot C_2 = V \cdot (C_1 + C_2)$

De donde: $C_1 + C_2 = Q / V$ (47)

La combinación en paralelo es equivalente a un solo capacitor de la misma carga total $\mathbf{Q = Q_1 + Q_2}$ y diferencia de potencial **V** que la combinación; figura 18-b. La capacitancia equivalente de la combinación, $\mathbf{C_{eq}}$, es la misma que la capacitancia **Q / V** de este único capacitor equivalente, así la ecuación (47) queda: $C_{eq} = C_1 + C_2$ (48)

De igual forma se puede demostrar que para cualquier número de capacitores en paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \cdots\cdots \text{Capacidad en paralelo} \qquad (49)$$

La capacitancia equivalente de una combinación en paralelo, es igual a la suma de las capacitancias individuales. En una conexión en paralelo la capacitancia equivalente es siempre mayor que cualquier capacitancia individual. Nótese que los capacitores en paralelo se suman de manera análoga a las resistencias en serie.

CONEXIÓN EN SERIE

Dos capacitores están en serie cuando la salida de uno está conectado a la entrada del otro y así sucesivamente y la entrada del primero se conecta al borne **a** de la fuente y la salida del último al borne **b**, como se observa en la figura 19.

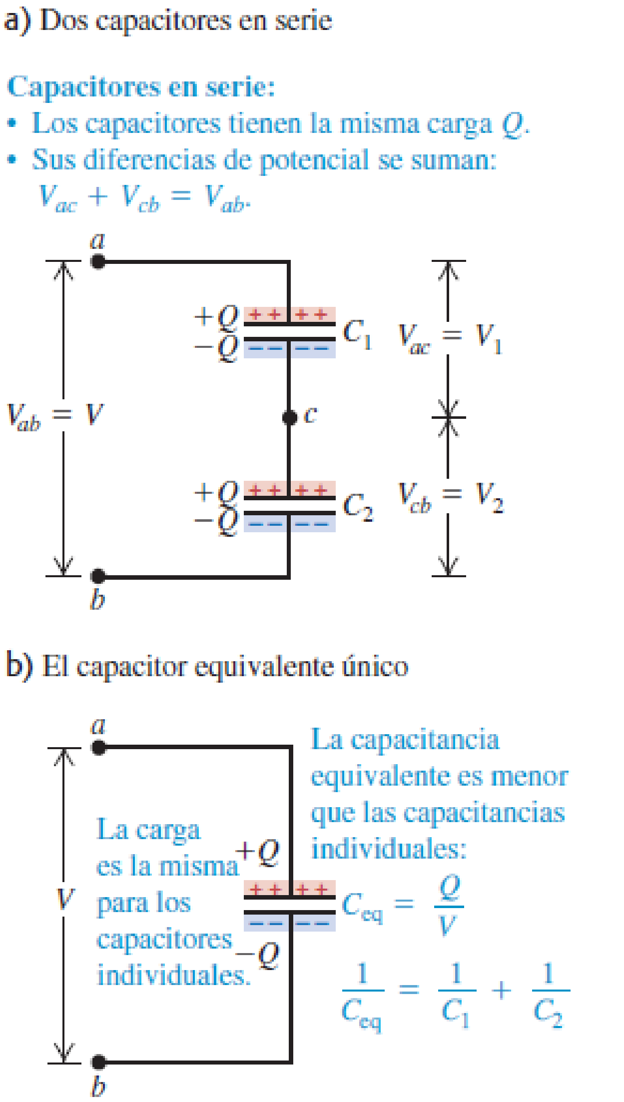


Fig. 19: Capacitores en serie y su equivalente

Al principio ambos capacitores están inicialmente sin carga. Cuando se aplica una tensión entre los bornes a-b, **Vab** constante, los mismos se cargan; todas las placas conductoras quedan con una carga de la misma magnitud. Para comprender lo que sucede, observe que la placa superior del capacitor C_1 en la figura 19-a, adquiere una carga +Q, por estar conectada al positivo de la fuente. El campo eléctrico de esta carga positiva, atrae hacia la placa inferior de C_1 una carga negativa, hasta que todas las líneas de campo que nacen de la placa superior terminan en la placa inferior. Para ello requiere que la placa inferior adquiera una carga –Q. Estas cargas negativas tuvieron que venir de la placa superior de C_2 de, la cual se carga positivamente con +Q. Luego esta carga positiva atrae carga negativa –Q, desde el borne **b** de la fuente de polaridad negativa, así la placa inferior de C_2 queda con una carga -Q.

La carga total de la placa inferior de C_1 debe ser igual a la de la placa superior de C_2, esto quiere decir que la carga neta encerrada debe ser igual a cero, ya que inicialmente no tenían carga y luego de ser polarizadas el defecto de cargas negativas de la placa superior de C_2, es el exceso de de cargas negativas de la placa inferior de C_1. De esto se desprende que en una conexión en serie la magnitud de la carga en todas las placas debe ser la misma.

En relación con la figura 19-a, las diferencias de potencial entre los puntos a–c entre placas de C_1 (Vac = V_1) y c-b entre placas de C_2 (Vcb = V_2), pueden representarse como:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} \qquad (50)$$

Según ley de Kirchhoff la tensión total de la fuente ($V_{ab} = V$): $V = V_1 + V_2$

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow V = Q.\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (51)$$

La capacitancia equivalente $\mathbf{C_{eq}}$ de la combinación serie se define como la capacitancia de un solo capacitor para el que la carga Q, es la misma que para la combinación, cuando la diferencia de potencial es la misma:

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \qquad o\ bien \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} \qquad (52)$$

Al combinar las ecuaciones (51) y (52) nos queda:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (53)$$

Generalizando, esta expresión se puede extender a cualquier número de capacitores conectados en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \cdots\cdots\cdots \text{Capacidad en serie} \qquad (54)$$

La inversa de la capacidad equivalente es igual a la suma de las inversas de las capacidades individuales. En una conexión serie de capacitores, la capacitancia equivalente siempre es menor que cualquiera de las capacitancias individuales. Nótese que la suma de capacitores en serie es análoga a la suma de resistores en paralelo.